

TAPOTI ANTAL – KÖVES GABRIELLA

GEOMETRIAI FELADATOK ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE ELSŐ ÉS MÁSODIK OSZTÁLYOS MATEMATIKA TANKÖNYVEKBEN

A témaválasztás indoklása

A Károli Gáspár Református Egyetemen az egyik kutatócsoport dr. Köves Gabriella vezetésével az elemi matematika tankönyvek vizsgálatával foglalkozik. 2016 ősze óta tagja ennek a kutatócsoportnak Tapoti Antal, másodéves levelező hallgató is, akinek személyes indíttatása tanítói tapasztalataiból ered. Tapoti általános iskolában dolgozik jelenleg asszisztensként, ahol rálátása van az ott folyó matematikaoktatásra/ -tanításra. Találkozott olyan matematika-tankönyvekkel, amelyek alapvető eltéréseket, esetenként hibákat is mutatnak. Ezért esett témaválasztása a napjainkban használatos, két-két, eltérő felépítésű, 1. és 2. osztályos matematikai tankönyv geometriai feladatainak összehasonlítására.

A vizsgálat célja

Átfogó képet kívánunk adni mai két 1. és 2. osztályos matematika-tankönyvek geometria- tananyagának felépítéséről, a tananyag szerkesztéséről, konkrétan a geometriai tananyag megjelenéséről a kiemelt szempontok szerint.

Gondolatok a magyarországi geometria tanításának bevezetéséről

Magyarországon elsőként a pannonhalmi kolostori iskola (996) kezdte meg működését, amely az oktatási-nevelési hálózat kialakításának első lépése volt (Mészáros, Németh, Pukánszky, 2005). Alapszinten nem tartalmazott mértani ismereteket. A magasabb évfolyamokon megjelent például a síkbeli egyszerű alakzatok leírása, a naptárkészítés, az időszámítás.

Az első magyar nyelvű matematikakönyv a Debreceni aritmetika (1577) sem foglalkozott még geometriával. Maróthi György 1743-ben kiadott *Arithmetica* vagy számvetésnek mestersége című művében sincs geometria fejezet, de az előszavában így ír: „Az Ólókkel s Lábakkal való számvetés nagy részént a Geometriában szokott taníttatni; minthogy abban van a fundamentoma. De mivel a dolog igen hasznos, a mint okos emberek által látják: a Geometriát pedig igen kevés ember tanulja: jónak ítélem ide tenni.” (Maróthi, 1743) Az oktatás kötelezővé tétele óta, fokozatosan beszívárgott a geometria az 1-2. osztályos tananyagba. Kezdetben (1777) csak a második osztályban tanultak számolást-mérést, később kiterjesztették mindegyik kötelező évfolyamra, de ezen túl a geometria nem szerepelt az 1-2. osztályos tananyagban. (Köves, 2014) Lényeges változás történt az 1868-ban megjelent közoktatási törvény bevezetésével, (1868. évi XXXVIII) amely előírta a fejbeli és jegyekkel való számolás és a hazai mértékek ismeretét is. (Mészáros, Németh, Pukánszky, 2003)

A 19-20. század fordulójára bekerültek az 1-2. osztályos tananyagba a mértékek [pénz, hosszúság, űrtartalom, súly (tömeg), idő], és a mérések méterrúddal, mérőszalaggal témakörök. A 3. osztályosba a négyzettel, téglalappal kapcsolatos ismeretek, a 4. osztályosba a területmértékek, valamint az űrmérték. Lényeges változást az 1978-as tantervben bevezetett komplex matematika hozott. A komplex matematikatanítás tananyaga mindegyik évfolyamon öt tantervi tárgykörből állt: 1. a halmazok, logika; 2. a számtan, algebra; 3. a függvények, sorozatok; 4. a geometria, mérések; 5. a kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika. Kicsiny változtatással ezt a felosztást találjuk a 2012-es NAT-ban is. Ezek szerint az 1978-as tantervi reform óta matematikatanításunknak szerves része a geometriai ismeretek tanítása.

A geometriai tananyag az 1-2. osztályban

1-2. osztályban a NAT három nagy téma köré csoportosítja a geometriai ismeretanyagot.

1. A síkgeometria, amely tartalmazza a síkidomok előállítását tevékenységgel, síkbeli tájékozódást, helymeghatározást; irányokat, irányváltoztatásokat, valamint egyszerű geometriai tulajdonságok felismerését, összehasonlítását.

2. A térgeometria témakörbe tartozik a térbeli alakzatok megfigyelése, szétválogatása, megkülönböztetése. Síkidom és test különbségének megfigyelése. Testek építése

szabadon, illetve modell alapján, valamint a térbeli tájékozódás, helymeghatározás; irányok, irányváltoztatások megfigyelése, felismerése.

3. A transzformációk témakörben a feladat a sík tükörrel és hajtogatással, valamint a tengelyes tükrözés megtapasztaltatása, a tapasztalatok megfogalmazása. (NAT 2012)

A vizsgálat struktúrája, az elemzés szervezése

A hipotézisek felállításához Dárdai (2002) és Köves (2014) munkáit használtuk fel. A hipotéziseket három nagyobb csoportra (A, B, C) bontottuk, és mindegyikhez alpontokat (a, b stb) rendeltünk:

A/ A tananyag tartalmi elemei, strukturáltsága

- a) A tankönyvre jellemző a vertikális koherencia, egymásra épülés (épít az előző években elsajátított ismeretanyagra.
- b) A tankönyvre jellemző a horizontális koherencia (a tananyagot kellő mélységben fejtik ki).
- c) A tankönyvben jellemző a tantárgyon belüli koncentráció. Épít a különböző matematikai területek ismeretanyagai közötti kapcsolatra.

B/ A problémamegoldás szintjei

- a) A tankönyv megfelelő mennyiségű és minőségű feladatot biztosít a direkt és az indirekt differenciálásra, amely meg is valósítható a tanórán.
- b) A minimum, optimum és az optimumot meghaladó követelmények megfelelő arányban jelennek meg a tankönyvben.
- c) A tankönyvre jellemző, hogy szem előtt tartja a felzárkóztatást.
- d) A tankönyvre jellemző, hogy szem előtt tartja a tehetséggondozást.

C/ A problémamegoldás segítése

- a) A tankönyvben a probléma megfogalmazása matematikailag egzakt (pontos), a tanulók előismereteinek, értelmi szintjének megfelelő.

A vizsgálat tárgya

Két tankönyvcsaládból választottuk ki az 1-2. osztályos köteteket. A Hajdu Sándor által szerkesztett Matematika (Műszaki Könyvkiadó; a továbbiakban: Hajdu-tankönyv), illetve a Fülöp Mária által szerkesztett Matematika (OFI) című tankönyvek sorozatából.

A geometriai témák megjelenése az OFI-s és a Hajdu-tankönyvekben

A vizsgált matematika-tankönyvekben mind a három téma megjelenik, de eltérő módon. Első lépésben a feladatok számszerű megjelenését figyeltük.

Első osztályban fejezetszinten átlagosan a tankönyvek 10%-ában, másodikban a 12%-ában jelennek meg a főleg mérésekhez, geometriai fogalmakhoz kapcsolódó témakörök. Nem fejezetszinten előfordul, hogy egy-egy feladatban tantárgyon belüli koncentráció keretében is megjelennek új témaköri tartalmak.

	Síkgeometria	Térgeometria	Transzformációk
OFI-s tankönyvek			
1. év	31	9	16
2. év	12	6	30
Össz.:	43	15	46
Hajdu-tankönyvek			
1. év	10	2	25
2. év	28	15	8
Össz.:	38	17	23

II/2. táblázat: A geometriai témakör feladatainak száma (saját szerkesztés)

Azonban a feladatok száma nem ad valós információt, mivel itt nem vettük figyelembe a feladatok ütemezését.

A/ A tananyag tartalmi elemei, strukturáltsága

a) A tankönyvre jellemző a vertikális koherencia, az egymásra épülés (épít az előző években elsajátított ismeretanyagra).

Az első osztályos tankönyvnek építenie kell az óvodai nevelésből hozott tapasztalatokra, természetesen a másodikos tankönyvnek az elsősre kell épülnie.

Az Óvodai nevelés országos alapprogramja (ONOAP) szerint az elsajátítandó matematikai kompetenciák: képes érzékelni a tárgyak egymáshoz viszonyított helyzetét, méretét, képes a térben és a síkban tájékozódni. A külső világ tevékeny megismerése során matematikai (geometriai) tartalmú tapasztalatoknak is birtokába jut, és azokat a tevékenységeiben alkalmazza. Felismeri a mennyiségi, alak, nagyságbeli és téri viszonyokat [...] fejlődik tér-, sík- és mennyiségszemlélete. [363/2012. (XII. 17.) Korm. rendelet]. Szinte az összes óvodai tevékenységformának, a tervezett és spontán játéknak is része a geometriai tapasztalatszerzés. Ugyanígy az lenne kívánatos, hogy az

iskolai tevékenységeket is áthassa a geometriai tapasztalatszerzés. A geometriai ismeretek jelenjenek meg a többi nagy matematikai témakörben a gondolkodási, megismerési módszerek, halmazok-logikában; az algebra, számelméletben; a relációk, függvények sorozatokban; a kombinatorikában és a statisztikában is.

1-2. osztályban a gondolkodási megismerési módszerek témakörbe sorolja a NAT a halmaz, a logika, illetve a kombinatorika elemeit. Az alsó tagozatban nem önálló fejezetben foglalkozunk ezekkel a területekkel, hanem beépítjük a többi témakörbe, eszközként használjuk a feladatok megoldásában. Az ide tartozó ismeretek a matematikai szemlélet fejlesztését szolgálják, segítik a tanulókat a fogalmak kialakításában, a köztük lévő kapcsolat felismerésében, saját gondolataik és észrevételeik pontos kifejezésében, mások gondolatainak megértésében.

A Hajdu-tankönyvek koncepciója: A másodikos gyerekek gondolkodásában - tevékenységeik közvetítésével - elindítható a logikai elemek kiépítése. A tárgyakkal, személyekkel, dolgokkal, matematikai fogalmakkal, összességekkel való ismerkedésben összehasonlításokat (azonosítást, megkülönböztetést) végeznek, ezt fejezik ki az elemek kétfelé válogatásával, egy és két szempontú sorba rendezésekkel és megfelelő szóbeli megállapításokkal. Az állítások tartalma mindig a gyerekek által közvetlenül érzékelt valóság; igazságértéke a valósággal való összhang szerint dönthető el. Ha azonban egy tulajdonság igaz az adott tárgyra, dologra, fogalomra, akkor a tagadása biztosan nem igaz. Ennek a gondolatnak a kidolgozása tárgyi tevékenységgel (kétfelé válogatással) lehetséges, de így is hosszú, türelmes munkát igényel. A nyitott mondatok kiegészítése igazzá, tévessé önálló feladattá válik, de a fenti gondolat kimunkálásának is eszköze. (Czeglédy, Hajdu, Novák, Scherlein, 2007)

A kerettanterv szerinti tananyagszervezés (II/3-4. táblázat)

Itt csak a geometriához kapcsolható részeket jelenítem meg.

Tematikai egység / Fejlesztési cél	1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	
Előzetes tudás	Tárgyak, személyek, dolgok csoportosítása. Irányok (lent, fent, jobbra, balra) ismerete. Egyszerű utasítások megértése, annak megfelelő tevékenység. A feladat gondolati úton való megoldásának képessége. Tevékenységekben (rajzaiban) újszerű ötletek, kreativitás, fantázia megjelenése.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Egyszerű geometriai szakkifejezések megismertetése. Az összehasonlítás képességének fejlesztése. Tárgyak jellemzése egy-két tulajdonsággal. Halmazszemlélet megalapozása.	
Ismeretek	Fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Tárgyak, dolgok összehasonlítása, válogatása, rendezése, csoportosítása, halmazok képzése közös tulajdonságok alapján.	Összességek alkotása adott feltétel szerint, halmazalkotás. Tárgyakkal kapcsolatos jellemzők azonosítása, csoportosítása.	Környezetismeret: tárgyak, összehasonlítása, csoportosítása különböző tulajdonságok alapján.
Állítások igazságtartalmának eldöntése.	Relációszőkincs: kisebb, nagyobb, egyenlő.	
Néhány elem sorba rendezése próbálgatással.	Finommotoros koordinációk: apró tárgyak rakosgatása.	

II/3. táblázat [51/2012 (XII. 21.) számú EMMI-rendelet 1. melléklete]

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	
Előzetes tudás	Formák között különbség felismerése (kerek, szögletes). Az azonos formák közül az eltérők kiválogatásának képessége. Adott formák összekapcsolása tárgyakkal. Térbeli tájékozódás a testsémáknak megfelelően.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Megfigyelőképesség, tartós figyelem fejlesztése. Feladattudat és feladattartás fejlesztése. Térszemlélet kialakításának alapozása. Finommotorikus mozgás fejlesztése. Pontosság, tervszerűség, kitartás a munkában. Helyes és biztonságos eszközkézelés. A környezet megismerésének igénye. Mérések alkalmilag választott és szabvány mérőeszközökkel. Gyakorlottság kialakítása tényleges mérésekben. Irányok megismerése, alkalmazása.	
Ismeretek	Fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Az egyenes és görbe vonal megismerése.	Tudatos megfigyelés. Egyenes rajzolása vonalzóval. Objektumok alkotása szabadon.	Környezetismeret: a testek formája szerint (egyenes és görbe vonalak keresése).
Tapasztalatgyűjtés egyszerű alakzatokról.	A megfigyelések megfogalmazása az alakzatok formájára vonatkozóan. Alakzatok másolása, összehasonlítása, annak eldöntése, hogy a létrehozott alakzat rendelkezik-e a kiválasztott tulajdonsággal. A geometriai alakzatokhoz kapcsolódó képek megtekintése, készítése.	Vizuális kultúra: Geometriai alakzatok rajzolása, nyírása. A vizuális nyelv alapvető eszközeinek (pont, vonal, forma) használata és megkülönböztetése. Kompozíció alkotása geometriai alakzatokból (mozaikkép).
Tengelyesen tükrös alakzat előállítás hajtogatással, nyírással, megfigyelése tükrös segítségével. A tapasztalatok megfogalmazása.	A tükrös alakzatokhoz kapcsolódó képek jellemzése.	

Sík- és térbeli alakzatok megfigyelése, szétválogatása, megkülönböztetése.	Síkidom és test különbségének megfigyelése. Síkidomok előállítás hajtogatással, nyírással, rajzolással. Testek építése testekből másolással, vagy szóbeli utasítás alapján.	
Síkidomok (négyzet, téglalap, háromszög, kör).	Síkidomok rajzolása szabadon és szavakban megadott feltétel szerint.	Vonalzó használata.
Testek (kocka, téglatest). Tulajdonságok, kapcsolatok, azonosságok és különbözőségek.	Testek válogatása és osztályozása megadott szempontok szerint. Testek építése szabadon és adott feltételek szerint, tulajdonságaik megfigyelése. A tér- és síkbeli tájékozódó képesség alapozása érzékszervi megfigyelések segítségével. Szemponttartás. Kreativitás fejlesztése.	Technika, életvitel és gyakorlat: testek építése.
Tájékozódás, helymeghatározás, irányok, irányváltoztatások.	Mozgási memória fejlesztése nagytesti mozgással, mozgássor megisméltése. Térbeli tájékozódás fejlesztése. Tájékozódás síkban	Környezetismeret: az osztályterem elhelyezkedése az iskolában, az iskola elhelyezkedése a településen. Testnevelés és sport: térbeli tudatosság, elhelyezkedés a térben, mozgásirány, útvonal, kiterjedés.
Összehasonlítások a gyakorlatban: rövidebb-hosszabb, magasabb-alacsonyabb.	Összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés. Együttműködő képesség fejlesztése	Környezetismeret: közvetlen környezetünk mérhető tulajdonságai.

II/4. táblázat [51/2012 (XII. 21.) számú EMMI-rendelet 1. melléklete]

A továbbhaladás feltétele, minimum követelmények a kerettanterv szerint:

1. osztály: A tanuló tudjon egyszerű tárgyakat, elemeket sorba rendezni, összehasonlítani, szétválogatni. Legyen képes helymeghatározásra a tanult kifejezések alkalmazásával (alatta, felette, mellette stb.). Ismerje fel, tudja kiválasztani az alakzatok közül a háromszöget, négyszöget és a kört.

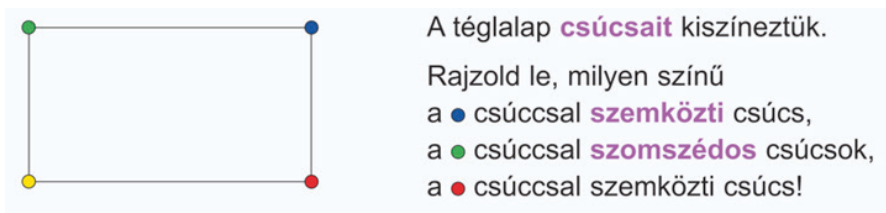
2. osztály: A tanuló ismerje fel a téglalapot, a négyzetet; tudjon alakzatokat csoportosítani, válogatni megadott szempont szerint; ismerje és tudja használni a tanult szabványegységeket; végezzen gyakorlati méréseket a tanult szabvány mértékegységekkel.

A fent említett követelményeknek a vizsgált matematikakönyvek fogalmi rendszerükben megfeleltethetők, elfogadhatók. Az OFI tankönyvei viszont csak a követelményekben lévő fogalmakat tartják szem előtt, ezért feladataik az adott témakörben nem egységesek. Mivel a feladatokat nem egységes rendszerben, egységes koncepció alapján dolgozták ki, hanem nyomon követhetően különböző forrásokból válogatták össze (amit jeleztek is a tankönyvek második oldalán), a feladatok között lévő kapcsolat nem jött létre. A fogalmi ismereteknek eleget tettek, ugyanakkor az egységes kép az adott témában nem jön létre. Az OFI által meghatározott követelményekben a folyamatos segítségnyújtás van jelen, ami arra enged következtetni, hogy erős koordinációs segítség mellett szerezheti meg a tanuló az ismereteket. A cél ellenben, ahogy az a fent bemutatott követelmény-táblázatból is kiderül, hogy a tanulónak arra a szintre kell eljutnia, hogy önállóan is képes legyen az elsajátított ismereteket alkalmazni az adott témakörben.

A geometriai transzformációkat tekintve a két tankönyv eltérő koncepciót mutat. Az OFI 2. osztályos tankönyvének II. kötetében a Testek, síkidomok, vonalak témakör után elszigetelten jelenik meg a Szimmetria, tükrözés. A Hajdu-tankönyv az OFI tankönyveivel ellentétben a Test, Téglatest, kocka, valamint a Négyszög, téglalap, négyzet témakörébe beépítve mutat rá a tengelyes tükrözés lehetőségeire. Az OFI tankönyveiben ezen tartalmak közötti kapcsolatok egyáltalán nem mutatkoznak meg.

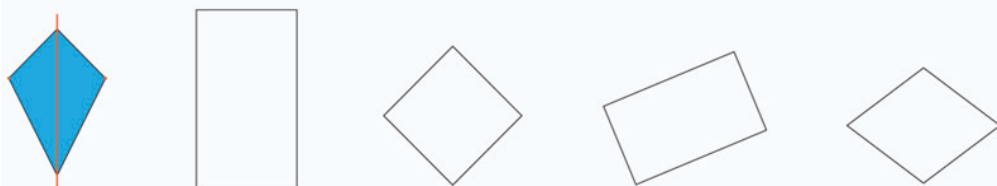
A tankönyvre jellemző a horizontális koherencia (a tananyagot kellő mélységben fejtik ki).

A Hajdu-tankönyv feladatai között egymásra épülés tapasztalható, egyik feladat épít a másikra, azaz az ismereteket felhasználja az utána következő feladatban. A feladatok közötti kapcsolat adja a téma egészét. Például: A szög fogalmának megtapasztaltatása (II/4. ábra) után alkalmazás szinten jelenik meg, kapcsolva az előző témához a tengelyes tükrözéshez (II/5. ábra).



II/4. ábra: Hajdu-tankönyv 2. második kötet 164. o.

Színezd ki azokat a négyszögeket, amelyek a szemközti csúcsokon keresztül félbehajthatók úgy, hogy a két fél fedje egymást! **Rajzold be a hajtásélt!**



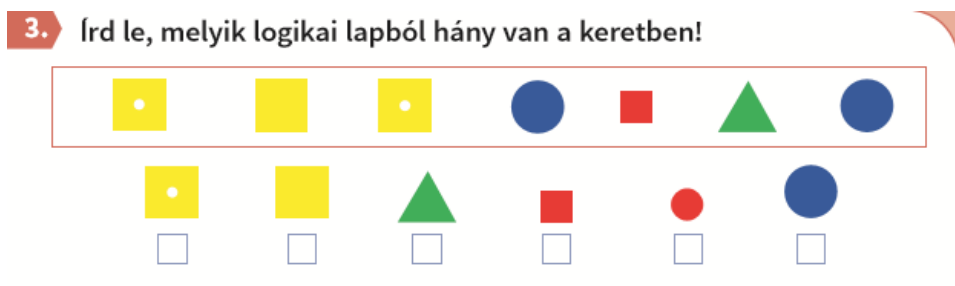
Keress több ilyen hajtásélt!

II/5. ábra: Hajdu-tankönyv 2. második kötet 164. o.

Az OFI tankönyvekben a feladatok egymástól függetlenül jelennek meg, nem találtam közvetlen kapcsolatot egy-egy feladat között.

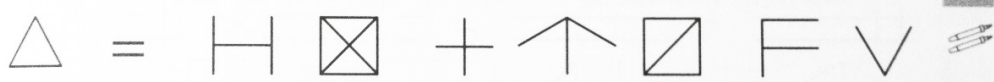
c) A tankönyvben jellemző a tantárgyon belüli koncentráció. Épít a különböző matematikai területek ismeretanyagai közötti kapcsolatra.

Szinte minden megjelenő matematikai témakörhöz kapcsolható a geometria témakör. A számfogalomhoz kapcsolható geometriai tartalmak mindkét tankönyvcsaládban bizonyos mértékben megjelennek. Főleg alakzatok megszámlálásával. A számfogalom alakításához kapcsolódó geometriai tartalmú feladatok például (II/6-7. ábra):

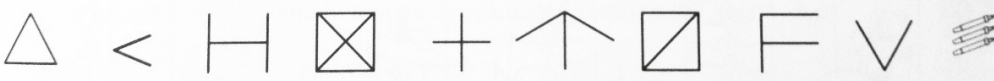


II/6. ábra: OFI 1. első kötet 27. o.

Karikázd be azt a formát, amely ugyanannyi pálcikából áll, mint a sor elején lévő! **2.**



Karikázd be azt a formát, amely több pálcikából áll, mint a sor elején lévő! **3.**

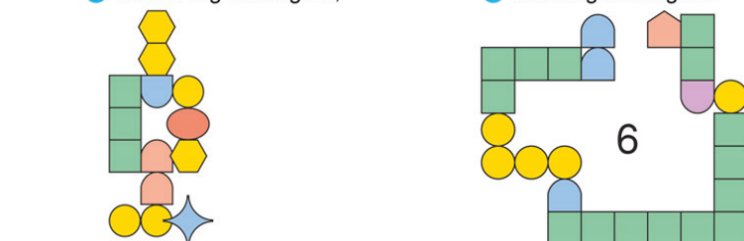


II/7. ábra: OFI 1. első kötet 27. o.

Mind a két feladat (II/6-7. ábra) a tanév elején jelenik meg. A második bevonja az egyenlő, a nagyobb fogalmakat, valamint az algebrai írásmódot is. Mind a két tankönyvben találni geometriai alakzatokhoz kapcsolódó számelméleti feladatot. A számok bontása (II/8. ábra) és a térszemlélet fejlesztése, illetve a geometriai fogalmak alapozás is megjelenik.

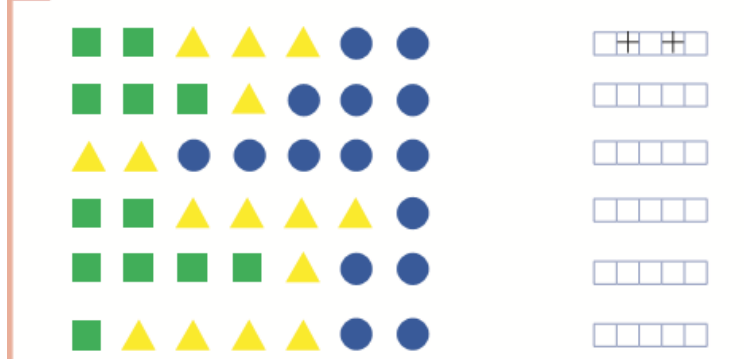
1. Bontsd fel a hatot

a három tag összegére, **b** több tag összegére!



II/8. ábra: Hajdu 1. első kötet 56. o.

3. Ügyeskedj! Bontsd a 7-et több tagra!



II/9. ábra: OFI 1. első kötet 67. o.

Megjelenik a számok bontása (II/9. ábra) a számlálás szintjén, valamint az összeadás és a művelet jelének értelmezése. A geometriai fogalmak az óvodás szintre korlátozódnak. A művelet- és a geometriai fogalmak alakítására a következő példát találtuk (II/10. ábra).

3. Színezd ki az ábrákat! Figyeld meg, mi változik!

$7 - \triangle = 7$	$7 - \diamond = 3$
$7 - \nabla = 6$	$7 - \blacktriangle = 2$
$7 - \blacktriangledown = 5$	$7 - \blacksquare = 0$
$7 - \blacktriangleleft = 4$	

a

b

II/10. ábra: Hajdu 1. első kötet 62. o.

Az OFI-s tankönyvben nem találtunk tantárgyon belüli koncentrációhoz kapcsolódó feladatokat.

Relációk, függvények, sorozatok témakörhöz és a geometriához kapcsolódik például II/11-12. ábrán látható feladat:

3. Színezd a madarat a jeleknek megfelelően!

II/11. ábra: OFI 2. első kötet 19. o.

Változtasd meg a színét!

Ami az első képen **sárga**, az a második képen legyen **piros**!

Ami az első képen **piros**, az a második képen legyen **sárga**!

Ami az első képen **zöld**, az a második képen legyen **kék**!

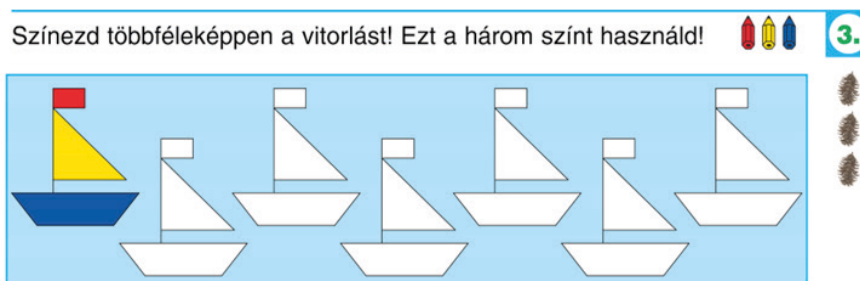
II/12. ábra: Hajdu 1. első kötet 5. o.

Az egyik feladatban az implikáció (ha, akkor) jelenik meg (II/11. ábra), a másikban az implikáción túl az ekvivalencia is (akkor és csak akkor, II/12. ábra).

Példa a geometria és a kombinatorika témakörök kapcsolódására (II/13-14. ábra).



II/13. ábra: OFI 1. első kötet 9. o.



II/14. ábra: Hajdu 1. első kötet 5. o.

Mind a két feladat az ismétlés nélküli permutációra példa. Az elsőben (II/13. ábra) a megoldások száma pontosan annyi, mint a babák száma. A második feladatban eggyel több hajó van, mint a lehetőségek száma. Így a tanulónak egyrészt módja nyílik annak felfedezésére, hogy ennyi megoldás van, és nincs több. Másrészt az esetleges tévedés korrigálására is van lehetőség.

Halmazok, logika témakör kapcsolódása a geometriához, például a II/15-16. ábra feladatai.

1. Csoportosítsd a rajzokat a számok segítségével!

a) **Testek** **Síkidomok**

b) **Síkidomok** **Téglaalakok**

II/15. ábra: OFI 2. második kötet 6. o.

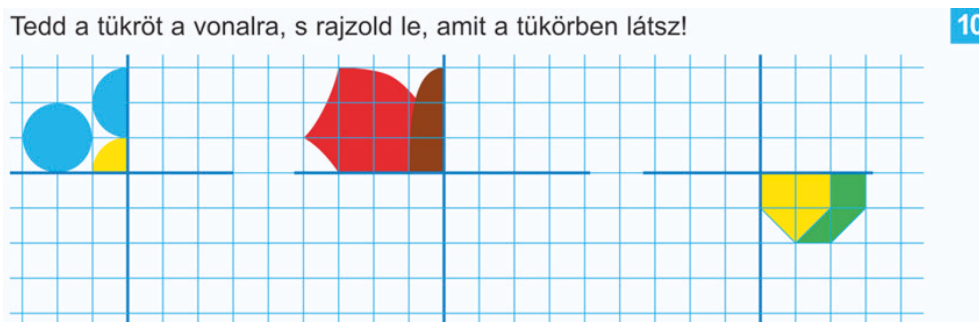
Melyik építőjátékot melyik tálcába tennéd?

Minden lapja sík Nem minden lapja sík

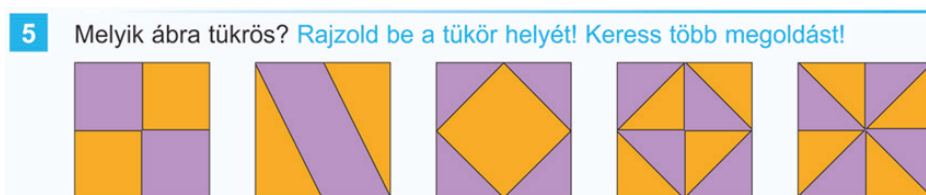
II/16. ábra: Hajdu 2. második kötet 161. o.

Mind a két feladatban szerepel egy szempont szerinti válogatás. A II/15. ábra feladatában megjelenik a részhalmaz fogalom, a II/16.-ban a negáció (tagadás) fogalma.

A Hajdu-tankönyvekben megjelenik a tengelyes tükrözés és más geometriai transzformációk kapcsolódásának vizsgálata feladatokon keresztül. Ezeket a transzformációkat nem nevezi még meg a tankönyv, csak tapasztalati szinten jelennek meg. Például a középpontos tükrözés értelmezése, mint egymás utáni tengelyes tükrözés, két egymásra merőleges tengelyre megjelenik a II/17. ábra feladatában, valamint a II/18. ábra 1., 3., 4., 5. négyzeténél. A 90 fokos forgatás megtapasztaltatására példa a II/17. ábra 3., 5. négyzet.



II/17. ábra: Hajdu 2. második kötet 39. o.



II/18. ábra: Hajdu 2. második kötet 38. o.

Megjelenik az eltolás is, mint elrontott tükrözés: II/19. ábra 2. rajz.



II/19. ábra: Hajdu 2. második kötet 39. o.

Az 1-2. osztályos OFI-s tankönyvek a geometriával is kapcsolódó feladatokban főleg a logikai készlet lapjait használják. Például a számfogalom kialakításánál nem is jelenik meg más geometriai alakzat. A Hajdu-tankönyvben is megjelennek egyes feladatokban a logikai készlet lapjai, de emellett számos más ötlettel is lehet találkozni. Olyan illusztrációkkal segíti a számfogalomhoz kapcsolódó feladatok megoldását, amelyekben különböző geometriai alakzatok szerepelnek, egyben illeszkednek a gyermek képi világához.

B/ A problémamegoldás szintjei

- a) A tankönyv megfelelő mennyiségű és minőségű feladatot biztosít a direkt és az indirekt differenciálásra, amely meg is valósítható a tanórán.

Ebben a pontban leszűkítettem a vizsgálatot a tengelyes tükrözésre.

Könyv Osztály	OFI-s		Hajdu-féle	
	1.	2.	1.	2.
	1/1. tankönyv 0 db	2/1. tankönyv 0 db	1/1. tankönyv 0 db	2/1. tankönyv 12 db
	1/2. tankönyv 5 db	2/2. tankönyv 13 db	1/2. tankönyv 14 db	2/2. tankönyv 5 db
Összesen	18 db		31 db	

II/5. táblázat: A tankönyvekben megjelenő tengelyes tükrözéssel kapcsolatos kérdések száma (saját szerkesztés)

A Hajdu-tankönyv 1,7-szer több feladatot tartalmaz, így nagyobb lehetőséget biztosít a direkt, illetve az indirekt differenciálásra.

b) A minimum, optimum és az optimumot meghaladó követelmények megfelelő arányban jelennek meg a tankönyvben.

Az OFI-s tankönyvekben nincs jelölés a feladatok nehézségi szintjére. A Hajdu-tankönyv három szintet kategorizál. Legnagyobb részben a minimum követelményeknek megfelelő feladatok szerepelnek, legkisebb arányban pedig az optimumot meghaladók.

A 28/2000. (IX. 21.) OM rendelet a kerettantervek kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról előírja, hogy 1. és 2. osztályban 148 óra matematikaórának kell lennie egy tanévben. 2013 szeptemberétől az új kerettantervek alapján az 1. és 2. osztályban heti 4 matematikaórát írnak elő. Tanévenként 2 tanórát szabadon tervezhetőnek engednek. A tanmenetekben láthatjuk, hogy a geometriához tartozó tengelyes tükrözés témakörre a Hajdu-tankönyvhöz tartozó program 8 tanórát ajánl a két évre (Scherlein, Hajdu, Köves, Novák, 2008; Hajdu, Köves, Novák, Scherlein, 2000). Az OFI-s tanmenet (letölthető változat) ajánlása a tengelyes tükrözés megismertetésére 4 tanóra a két évre. Az adatokból kiderül, hogy az OFI lényegesen kevesebb időt szán a tengelyes tükrözés megismertetésére.

Az 1. osztályban mindkét tankönyv feladatának tekinti a tükörjátékokat, a tükrös alakzatok vizsgálatát. Ez utóbbit az OFI-s tankönyv tengelytüréssel-nyírással kívánja megoldatni, a Hajdu-féle megkülönbözteti a tengelyes tükrözés és a tengelyes szimmetria fogalmakat. A tengelyes tükrökép vizsgálatát tükör segítségével, előállítását raktatással, színezéssel kívánja bevezetni. A tengelyesen szimmetrikus formák vizsgálatát tükörrel és hajtogatással. Második osztályban mind a két tankönyv foglalkozik a tükörkép, a tengelyesen tükrös alakzatok megfigyelésével, előállításával. A Hajdu-tanmenet

meghatározza a tengelyesen tükrös alakzatok előállításának a módját is (hajtogatással, építéssel, rajzzal, nyírással). A tankönyv pedig több geometriai témával kapcsolja össze a tengelyes tükrözést. Tapasztalatszerzési lehetőséget biztosít a négyszög, téglalap, négyzet témakörében a négyzet tükrösségének vizsgálatára, a testek tükröképek előállítására is.

c) A tankönyvre jellemző, hogy szem előtt tartja a felzárkóztatást.

A matematika tanulása 1-4. évfolyamon alapozó jellegű, a matematika főbb témaköreinek megismertetése, tapasztaltatása a cél. A kognitív fejlesztést szolgálja, lehetőséget ad a gondolkodási módszerek alkalmazására, valamint a tanulási szokások kialakításában segít, a módszerek önálló alkalmazására nevel. Az elsajátítandó ismeretek nem valósulnak meg minden esetben, mivel a tanulót más tényezők is befolyásolhatják, esetleg hátráltathatják (pl. tanulási nehézség, szociális háttér stb.). Ezért a tanórán elsajátítandó tananyagot nem minden esetben érti meg a tanuló, szükség van a felzárkóztatásra. Ennek megvalósulásához az a legcélszerűbb, ha a megismert és megszokott tankönyvet használjuk. A tankönyvnek figyelembe kell vennie azokat a tanulókat is, akiknek több gyakorlásra több feladatra van szükségük. A tanító és a tanuló munkáját megkönnyíti, ha a feladatok megoldásának nehézségi fokát jelzi a tankönyv. Az OFI tankönyveiben nincsenek meghatározva a feladatok szintjei.

A fenti adatokból láthatjuk, hogy a tengelyes tükrözés témakörébe bevezető feladatok száma – az OFI esetében – nem engedi a megfelelő felzárkóztatást. A felzárkóztatásra a pedagógusnak különböző, más forrásokból kell feladatokat keresnie, hogy az esetlegesen felmerülő problémák megoldásának eleget tudjon tenni. Az OFI 4 megadott tanórájára kellő differenciálás mellett megfelelő lehet a felzárkóztatásra, de ehhez nem kínál elegendő mennyiségű feladatot.

A Hajdu-tankönyvhöz rendelt tanmenet 8 tanórát javasol, amelybe differenciált feldolgozásban beleférhet a felzárkóztatás is. A feladatok mennyisége is elegendő lehet a tapasztalatok elmélyítésére. Mindemellett az otthoni vagy a napközis foglalkozás idejére is kiszabható gyakorlásra szánt feladat.

d) A tankönyvre jellemző, hogy szem előtt tartja a tehetséggondozást.

Joseph Renzulli tehetségkutató szerint három tulajdonságra épül a tehetség:

- átlagon felüli képességek;
- feladat iránti elkötelezettség;
- kreativitás.

Az átlagon felüli képességek az általános és a specifikus képességeket egyaránt magukba foglalják. A feladat iránti elkötelezettség azt jelenti, hogy az illető lelkesedik a feladatért, az vonzza őt. A tehetséget legjobban matematikai feladatokkal lehet azonosítani. A geometriai feladatok jól mérhetik a tehetség egyes vonásait. (Kovács, Balogh, 2010)

A két tankönyvről szinte ugyanazt lehet elmondani ez esetben, mint a felzárkóztatás, differenciálás pontokban. Kevés feladattal nem lehet eleget tenni ezen kívánalmaknak.

C/ A problémamegoldás segítése

c) A tankönyvben a probléma megfogalmazása matematikailag egzakt (pontos), a tanulók előismereteinek, értelmi szintjének megfelelő.

Az anyanyelvi kultúra közvetítése az egyik legjelentősebb terület az iskolai ismeretszerzés folyamatában. Az anyanyelvi és a matematikai kompetenciákban megjelennek közös elemek, mindkét területen megtalálható az utalás a nyelv és a gondolkodás kölcsönhatására, valamint a szövegértés, -alkotás fejlesztésére, az érvelés jelentőségére, a szókinccs bővítésére (Köves, Szegfű, 2016). Ebben a vizsgálati szempontban azt szeretném megjeleníteni, hogy a feladatok szövegezése néhol nem egyértelmű a kiválasztott matematik-tankönyvekben.

Az értelmi fejlesztéshez elengedhetetlen az egyértelműség, a pontosság, a matematika és a nyelv stb. oktatásában. Természetesen a tanulók értelmi szintjének megfelelően kell pontos megfogalmazásokat alkalmazni a problémamegoldásban. Találkoztunk olyan feladatokkal, amelyek a tanulók számára további értelmezést kívántak. A nem egzakt megfogalmazású problémákra nem várhatunk el a tanulóktól pontos feladatmegoldást. Például általában a régebbi tankönyvekben igen elterjedt a következő, az OFI-s tankönyv által is átvett mondat: „Mit mond a kép? Írj róla feladatokat.” (OFI 1. osztályos tankönyv, második kötet, 100. oldal, 2. feladat.) E mondat helyett célszerűbb lenne a Mit látsz a képen? mondatot használni. A kép nem mond semmit, nem tud beszélni – mondhatná a tanuló. Az OFI-s tankönyvek szövegezése több helyen pontatlan. A 2. osztályos könyv 1. kötetének 106. oldalán található fejezetcímében a hogyan és a mivel szavak keverednek: a „Hogyan mérték régen” című fejezet arról szól, hogy mivel mérték régen. A hogyan szó használata ebben az esetben helytelen. A 2. osztályos könyv 2. kötetének 10. oldalán már a cím is („Szimmetria, tükrözés”) pontatlan. A tengelyes tükrözés és a tengelyes szimmetria a tananyag. A középpontos tükrözés és a forgásszimmetria nem. A 2. osztályos könyv 2. kötetének 5. oldalán található 1. feladatában az ábra alapján a feladat kérdése nem a lapra, hanem az alaplapra vonatkozik. A feladat másik hiányossága, hogy a lap matematikai értelemben eddig nem tisztázott fogalom. Ugyanezen az oldalon a következő feladatban

(2. feladat) nem lapokat, hanem határoló lapokat kell keresni. A 6. oldalon a 2. feladatban nem a rajzokat, hanem a vonalakat vagy törött vonalakat kell kiegészíteni. A 10. oldalon a 2. feladat nem a tengelyes tükrözésre vonatkozik, hanem pl. a törtfogalom alakítására. A fele szó nem alkalmas a tengelyes tükrökép megnevezésére. Nem derül ki, hogy minek a felét kell kiszínezni.

Összegzés

A jelenleg a tankönyvlistáról válaszható 1–2. osztályos matematika-tankönyvek közül két kiadó (Műszaki Könyvkiadó és OFI) tankönyveinek geometriai tartalmát vizsgáltuk: a Hajdu-tankönyveket és az OFI-s tankönyveket három szempont és nyolc alszempont alapján.

Korábbi oktatási tapasztalatainkra és a tankönyvkutatás eredményeire hivatkozva jegyezzük meg, hogy e két, ma használatos matematika-tankönyv az általunk vizsgált szempontok alapján eltér egymástól koncepcióját, feladatait tekintve. A szempontok alapján főleg az OFI-s tankönyvekben alapvető problémákat fedeztünk fel mindhárom szempontcsoportban.

A következő elvek mentén gondolkodtunk. A geometria tanítását és azon belül a tengelyes tükrözés megismertetését és megtapasztaltatását igen fontos feladatnak gondoljuk. A többi témakörökhöz képest azonban ez lényegesen kevesebb figyelmet kap. A geometriába való bevezetést az eredményesség érdekében pontos és szervezett rendszerben érdemes megismertetni a tanulókkal, mivel tanítása fejleszti a képi gondolkodást, a térszemléletet. A geometria tananyagot nem lehet csak a tankönyv használatával megtanítani, de a tankönyv logikája alapján, annak használatával kell felépíteni a tanórai tananyagot. A tanulók korának megfelelő szöveggel, ábrával, a feladatok egymásra épülésével kell bevezetni az új tananyagot. A feladatok helyes arányú szintézise elengedhetetlen, hogy a különböző képességű tanulók önmagukhoz képest megfelelően fejlődhessenek. Az oktatás folyamán életközeli probléma megoldása a cél, hogy a tanulók a mindennapi életben jól használható ismeretekre tegyenek szert. Az eredményes tanuláshoz az is hozzájárul, hogy a tanulók szeressék a tankönyveiket és használják a feladataikat.

Irodalom

- Czeglédy I., Hajdu S., Novák L., Scherlein M. (2007). *Matematika 1–8. mintatanterv*, Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Dárdai Á. (2002). *A tankönyvkutatás alapjai*. Pécs: Dialóg Campus.
- Debreceni aritmetika (1577). *Aritmetika azaz a számvetés tudománya, mell' magyar nyelvre (ez tudományban gyönyörködöknek, hasznokra és hamarabb való értelmekre is móddal) fordítattott. Azt akarom, hogy az io és hasznos dolgokban eszesek legyetek, az gonosz és ártalmas dolgokban pedig egiugiuek*. Debreczen.
- Fischerné Dárdai Á. *Tankönyvelmélet 1*.
Letöltés: 2016. <http://www.lib.pte.hu/konyvtarrol/munkatarsaink/dardai/index.html>.
- Hajdu S., Köves G., Novák L., Scherlein M. (2002). *Matematika 2. Program*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Korm. rendelet az *Óvodai nevelés országos alapprogramjáról* 363/2012. (XII. 17.)
Letöltés: 2017. 10. 10-én http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=a1200363.kor
- Kovács G., Balogh L. (2010). *A matematikai tehetség fejlesztése*.
Letöltés: 2017. 10. 10-én http://tehetseg.hu/sites/default/files/15_kotet_net.pdf#page=53
- Köves G. (2012). *Alapozó szintű matematika-tankönyvek vizsgálata a kezdetektől napjainkig*.
Letöltés: 2017. 10. 10-én http://nevtudphd.pte.hu/sites/nevtudphd.pte.hu/files/files/Vedések/koves_gabriella_disszertacio.pdf
- Köves G. (2014). *Változások a magyarországi matematikaoktatásban*.
Letöltés: 2017. 10. 10-én http://www.tani-tani.info/a_matematikanitanitas_valtozasai/
- Köves G., Szegfű M. (2016). *Anyanyelvet a matematikához (is)!* Letöltés: 2017. 10. 10-én <http://docplayer.hu/7397181-Anyanyelv-es-nemzeti-identitas.html>
- Maróthi Gy. (1743). *Arithmetika vagy számvetésnek mestersége*, Debrecen.
- Mészáros I., Németh A., Pukánszky B. (2005). *Neveléstörténet*. Budapest: Osiris Kiadó Kft.
- Mészáros I., Németh A., Pukánszky B. (2006). *Neveléstörténet Szöveggyűjtemény*. Budapest: Osiris Kiadó Kft.
- NAT Nemzeti alaptanterv (2012). UTL <http://ofi.hu/nemzeti-alaptanterv>
- OFI Kerettanterv az általános iskola 1–4. évfolyamára 2013. Letöltés: 2017. 10. 10-én http://kerettanterv.ofi.hu/01_melleklet_1-4/index_alt_isk_also.html
- OFI Letölthető Tanmenetek. Letöltés: 2017. 10. 10-én <http://ofi.hu/letoltheto-tanmenetek>
- Scherlein M., Hajdu S., Köves G., Novák L., (2008). *Matematika 1. Módszertani Ajánlások*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Törvénycikk a népiskolai közoktatás tárgyában 1868. évi XXXVIII. 55§ c.,

A vizsgálatban felhasznált tankönyvek

- Balla M. M., Gáspár A., Harisné Lingli B., Hubertné Dobor M., Jancsula Vincéné (2014), Fülöp M. (szerk.), Matematika 1. osztályosoknak I. kötet. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Balla M. M., Gáspár A., Harisné Lingli B., Hubertné Dobor M., Jancsula Vincéné (2014), Fülöp M. (szerk.), Matematika 1. osztályosoknak II. kötet. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Fülöp M., Leszák M., Somfalvi E. D. (2014). Matematika 2. osztályosoknak I. kötet. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Fülöp M., Leszák M., Somfalvi E. D. (2014). Matematika 2. osztályosoknak II. kötet. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Hajdu S., Novák Lászlóné, Scherlein M. (2012). Matematika 1. Első kötet. Általános iskola 1. osztály Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Hajdu S., Novák Lászlóné, Scherlein M. (2014). Matematika 1. Második kötet. Általános iskola 1. osztály. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Hajdu S., Novák Lászlóné, Scherlein M. (2008). Matematika 2. Első kötet. Általános iskola 2. osztály. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Hajdu S., Novák Lászlóné, Scherlein M. (2008). Matematika 2. Második kötet. Általános iskola 2. osztály. Műszaki Könyvkiadó, 2012 Budapest.