KÖZÖS ELEMEK MÁSODRENDŰ REKURZÍV SOROZATOKBAN

DR. KISS PÉTER

Legyen G = G (A, B, G_0, G_1) egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az A, B, G_0 és G_1 racionális egészekkel és a

$$G_n = AG_{n-1} - BG_{n-2} \qquad (n > 1)$$

rekurzív formulával definiálunk. Legyenek α és β a sorozat

$$f(x) = x^2 - Ax + B$$

karakterisztikus polinomjának a gyökei és tegyük fel, hogy a sorozat nem degenerált, vagyis $AB \neq O$, G_0 és G_1 nem mindkettője nulla és α/β nem egységgyök. Jól ismert, hogy a sorozat tagjainak explicit előállítása

$$(1) \qquad G_n = \frac{a\alpha^n - b\beta^n}{\alpha - \beta},$$

ahol $a = G_1 - G_0\beta$ és $b = G_1 - G_0\alpha$, továbbá

$$(2) \qquad |G_n| > c_1 \cdot |\alpha|^n n^{-c_2}$$

ha $n > n'$, ahol c_1, c_2 és n' a sorozat adataiból explicit meghatározható konstansok (lásd pl. [3]-ban).

A G sorozat speciális esetét, amikor $G_0 = 0$ és $G_1 = 1$, a következőkben R-rel jelöljük. Az R sorozat tagjai (1) alapján

$$(3) \qquad R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

alakban írhatók fel.

(2)-ből adódik, hogy minden R és minden G sorozatban, ha α/β nem egységgyök, bármely x valós szám esetén $|R_n| > x$, illetve $|G_n| > x$ ha $n > n_0$ (A, B, x), illetve $n > n_0$ (A, B, G_0, G_1, x). Ebből következik, hogy a sorozatokban minden elem csak véges sok elemmel lehet egyenlő. K. K. Kubota [4, 5] ennél többet bizonyított: ha egy G sorozatban α/β nem egységgyök, akkor a sorozatban minden elem legfeljebb négyszer fordulhat elő. F. Beukers [1] javította ezt az eredményt, megmutatta, hogy néhány kivételtől eltekintve a négyes konstans hárommal helyettesíthető.

Hasonló probléma a következő. Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ és $H = H(A, B, H_0, H_1)$ két másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyeket ugyanazok az A, B konstansok definiálják. A két sorozat közül elemeinek halmaza véges-e vagy végtelen? Ha G és H ekvivalens sorozatok (vagyis ha $G_{n+r} = H_{n+s}$ minden $n \geqq 0$ egész esetén valamely rögzített r és s természetes számok mellett) akkor nyilván végtelen sok közös elem létezik, ezért csak azzal az esettel érdemes foglalkozni, amikor G és H nem ekvivalensek. Ebben az esetben, a sorozatok tagjainak explicit alakja alapján, G. Revuz [8] egy általános tétele ad választ a kérdésre; bebizonyította, hogy ha a_i $(1 \leqq i \leqq M)$, b_j $(1 \leqq j \leqq N)$, Θ és φ algebrai számak, Θ és φ lineárisan függetlenek az egész számok felett, akkor a

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \Theta^{m_i} = \sum_{j=1}^{N} b_j \varphi^{n_j}$$

egyenletnek csak véges sok m_i, n_j racionális egész megoldása van, eltekintve attól az esettől, mikor mindkét oldal zérus. Ebből pedig következik, hogy a $G_x = H_y$ egyenlet (x, y) megoldásainak száma is véges, vagyis valamely m_0 konstans esetén $G_x \neq H_y$, ha $x > m_0$.

Hasonló eredményt bizonyított M. Mignotte [7]. Ő a tételét tetszőleges rendű lineáris rekurzív sorozatokra mondta ki. állítása a mi esetünkre leszűkítve a következőt mondja ki: Ha $D > 0$ és α/β nem egységgyök, akkor létezik egy effektív meghatározható m_0 konstans úgy, hogy $G_x \neq H_y$ ha $x, y > m_0$. F. Mátyás [6] különböző A, B konstansokkal generált másodrendű sorozatok esetéén ezeket a konstansokat explicit alakban is megadta, azonban ezek nagyságrendje jelenleg még számítógéppel sem érhető el.

Az $A = -B = 1$ esetre (általános Fibonacci sorozatokra) M. D.. Hirsch [2] konkrétabb eredményt bizonyított: Ha $G(1, -1, G_0, G_1)$ és $H(1, -1, H_0, H_1)$ nem ekvivalens sorozatok, akkor a G és a H sorozatoknak nincs $c(\sqrt{5}-1)$ -nél nagyobb abszolút értékű közös elemük, ahol $c = \max(|G_1G_3 - G_2^2|, |H_1H_2 - H_2^2|)$

A következőkben általánosítjuk M. D. Hirsch eredményét a $D = A^2 - 4B > 0$ feltételnek eleget tevő általános másodrendű sorozatokra, és egyben javítjuk Revuz és Mignotte eredményeinek másodrendű sorozatokra vonatkozó állítását, megadva az m_0 konstans explicit értékét.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyenek A és B rögzített nem zérus egészek, $G = G(A, B, G_0, G_1)$ és $H = H(A, B, H_0, H_1)$ két másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyekre $D = A^2 - 4B > 0$, és G_0, G_1, illetve H_0, H_1 nem mindkettője zérus. Legyen G és H tagjainak explicit előállítása

$$G_n = \frac{a\alpha^n - b\beta^n}{\alpha - \beta}$$

és

$$H_n = \frac{p\alpha^n - q\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ahol $a = G_1 - G_0\beta$, $b = G_1 - G_0\,\alpha$, $p = H_1 - H_0\,\beta$, $q = H_1 - H_0\,\alpha$ és tegyük fel, hogy α/β nem egységgyök. Továbbá legyen

$$\underline{m} = \max(|G_0|, |H_0|, |G_1|, |H_1|),$$

$$w = \max(|b|, |q|),$$

$$n_0 = \frac{1}{\log|\beta|} \cdot \log\frac{|\alpha|}{2w},$$

$$\underline{z} = \frac{\log|p/a|}{\log|\alpha|}$$

és

$$\varepsilon = \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1-|a/p|\cdot|\alpha|^{[z]}}{4}, \frac{|a/p|\cdot|\alpha|^{[z]+1}-1}{4}\right)$$

A feltételek miatt α és β valós és $|\alpha| \neq |\beta|$, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $|\alpha| > |\beta| \neq 0$.

Ezen jelöléseket felhasználva a következőket bizonyítjuk.

2. *Tétel.* Ha a G és H sorozatok nem ekvivalensek és $|\beta| < 1$, akkor nincs olyan közös elemük, melyek indexei nagyobbak mint $n_0 + 1$.

Következmény. Az $F = F(1, -1, 0, 1)$ Fibonacci és az $L = L(1, -1, 2, 1)$ Lucas sorozatoknak csak 1 ($= F_1 = F_2 = L_1$) és 3 ($= F_4 = L_2$) a közös elemük. Ugyanis ebben az esetben $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ és $w = \sqrt{5}$, és könnyű ellenőrizni, hogy $n_0 < 3$. Így $F_i = L_j$ csak akkor teljesülhet az 1. Tétel miatt, ha $i < 3$ vagy $j < 3$. Ezekben az esetekben pedig közvetlenül belátható, hogy csak a felsoroltak a közös elemek.

2 *.Tétel.* Ha a G és H sorozatok nem ekvivalensek, $B < 0$ és $|\beta| < 1$, akkor nincs olyan közös elemük, melyek abszolút értéke legalább $6\,mw\,|B|^{n_0}$.

3. *Tétel.* Ha $a \neq 0$, $p \neq 0$ és a G és H sorozatok nem ekvivalensek, akkor nincs olyan közös elemük, melyek indexei nagyobbak mint

$$n_1 = \max\left(\frac{\log\varepsilon - \log|b/a|}{\log|\beta/\alpha|}, \frac{\log\varepsilon - \log|q/p|}{\log|\beta/\alpha|}.\right)$$

Megjegyezzük, hogy a 3. Tétel nem igaz, ha elhagyjuk az $a \neq 0$, $p \neq 0$ feltételeket. Ugyanis $G = G(6, 8, 1, 4)$ és $H = H(6, 8, 1, 2)$ sorozatok esetén $A = 6$, $B = 8$ miatt $\alpha = 4$, $\beta = 2$ és $p = H_1 - H_0\,\beta = 0$, a tagok explicit előállítása pedig $G_n = 2^{2n}$, $H_n = 2^n$. Így a $G_x = H_y$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, de a két sorozat nem ekvivalens.

1. Tétel bizonyítása. n_0 megválasztása miatt

$$\left|\frac{w}{\alpha}\beta^{n_0}\right| = \frac{1}{2}$$

(az n_0 konstansnak van értelme, mert $w = 0$ és $G_x = H_y$ esetén G és H ekvivalens sorozatok lennének), így $|\beta| < 1$ miatt

$$(4) \qquad \left|\frac{b}{\alpha}\beta^n\right| < \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{q}{\alpha}\beta^n\right| < \frac{1}{2}$$

ha $n > n_0$. Legyen $G_{r+1} = H_{s+1} = Q$ és $r, s > n_0$. Könnyű belátni (1) segítségével, hogy

$$\frac{G_{n+1}}{\alpha} - G_n = \frac{b}{\alpha}\beta^n$$

minden n természetes szám index esetén, ezért (4) alapján

$$\left|\frac{Q}{\alpha} - G_r\right| = \left|\frac{b}{\alpha}\beta^r\right| < \frac{1}{2}$$

és

$$\left|\frac{Q}{\alpha} - H_s\right| = \left|\frac{q}{\alpha}\beta^s\right| < \frac{1}{2}$$

adódik. Ebből következik, hogy G_r és H_s a $\frac{Q}{\alpha}$ valós számhoz legközelebbi egészek így $G_r = H_s$. De ez $G_{n+1} = H_{s+1}$ egyenlőséggel együtt azt mutatja, hogy a G és H sorozatok ekvivalensek, tehát igaz a tétel állítása.

2. Tétel bizonyítása. Először belátjuk, hogy a tétel feltételei mellett

$$(5) \qquad |R_n| \leqq |\alpha|^{n-1}$$

minden $n > 0$ természetes szám esetén. A bizonyítást n-re teljes indukcióval végezzük el. $n = 1$ és $n = 2$ esetén $R_1 = 1$ és $R_2 = A$ miatt igaz az állítás, mert α és β különböző előjelű és így $|A| = |\alpha + \beta| < |\alpha|$.
Ha (5) fennáll valamely n és $n + 1$ esetén, akkor $A = \alpha + \beta$ és $B = \alpha\beta < 0$ miatt

$$|R_{n+2}| = |AR_{n+1} - BR_n| \leqq |\alpha|^{n-1}(|A| \cdot |\alpha| - \alpha\beta) =$$
$$= |\alpha|^{n+1} \cdot \left(\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right| - \frac{\beta}{\alpha}\right) = |\alpha|^{n+1},$$

mivel $-1 < \frac{\beta}{\alpha} < 0$, ezért (5) valóban teljesül minden $n > 0$ esetén.

Ezek után rátérünk a tételben szereplő állítás bizonyítására. Az n_0 konstans megválasztása miatt

$$\left|\frac{w}{\alpha}\beta^n\right| \begin{cases} < \frac{1}{2} & \text{ha } n > n_0 \\ \geqq \frac{1}{2} & \text{ha } n \leqq n_0 \end{cases} \tag{6}$$

(1) és (3) alapján könnyű belátni, hogy

$$G_n = G_0\, \alpha^n + (G_1 - G_0\, \alpha) \cdot R_n,$$

ezért (5) felhasználásával

$$N = \max(|G_n|, |H_n|) \leqq m\, |\alpha|^n + w\, |R_n| \leqq m\, |\alpha|^n + w|\alpha|^{n-1}$$

adódik. De ha $n \leqq n_0 + 1$, akkor $\alpha\beta = B$ miatt (6)-ból

$$|\alpha|^n = |\alpha| \cdot |\alpha|^{n-1} = |\alpha| \cdot \frac{|B|^{n-1}}{|\beta|^{n-1}} = \frac{|\alpha|}{w|\beta|^{n-1}} \cdot w\,|B|^{n-1} \leqq 2w|B|^{n-1}$$

adódik. Így $n \leqq n_0 + 1$ esetén, felhasználva hogy $w \leqq m + m\,|\alpha|$ és $|\alpha| > 1$,

$$N \leqq 2mw|B|^{n-1} + \frac{w}{|\alpha|} \cdot 2w|B|^{n-1} \leqq 2w|B|^{n_0}\left(m + \frac{w}{|\alpha|}\right) \leqq$$

$$\leqq 2mw|B|^{n_0}\left(1 + \frac{1 + |\alpha|}{|\alpha|}\right) < 6mw|B|^{n_0}.$$

Ebből már következik az állítás az 1. Tétel miatt.

3. *Tétel bizonyítása.* Először belátjuk, hogy a $G_x = H_y$, vagy ami ezzel ekvivalens, az

$$a\, \alpha^x - b\, \beta^x = p\, \alpha^y - q\, \beta^y \tag{7}$$

egyenletnek, csak véges sok $(x; y)$ egész megoldása van, ha G és H nem ekvivalens sorozatok. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis hogy végtelen sok $(x; y)$ megoldása van (7)-nek. $a \neq 0$ és $p \neq 0$ miatt (7)-ből

$$\frac{a}{p}\alpha^{x-y} = \frac{1 - \frac{p}{q}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^y}{1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x} \tag{8}$$

következik. A bal oldal egész x, y esetén 1 környezetében csak diszkrét értékeket vehet fel, a jobb oldal határértéke viszont 1, ha x és y a végtelenhez tart, ezért végtelen sok $(x; y)$ egész értékpárra csak akkor állhat fenn az egyenlőség, ha

$$\frac{a}{p}\alpha^{x-y} = 1,$$

vagyis

$$a\alpha^{x} = p\alpha^{y}$$

valamely (x; y) esetén. Ebből azonban $b\,\beta^{x} = q\,\beta^{y}$ és $G_{x+n} = H_{y+n}$ adódik minden n természetes számra, vagyis G és H ekvivalens sorozatok.

Tehát ha G és H nem ekvivalensek, akkor létezik olyan n_1 valós szám úgy, hogy $G_x \neq H_y$, ha $x, y > n_1$. A következőkben belátjuk, hogy a tételben megadott n_1 rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

z megválasztása miatt $\left|\frac{a}{p}\alpha\right| = 1$ és z nem egész szám, mert ha z egész lenne, akkor az előzőekhez hasonlóan következne, hogy G és H ekvivalensek. Ekkor azonban $|\alpha| > 1$ miatt.

$$\left|\frac{a}{p}\alpha^{i}\right| < 1 < \left|\frac{a}{p}\alpha^{j}\right|,$$

ha $i \leqq [z]$ és $j \geqq [z]+1$. Legyen

$$x > \frac{\log\varepsilon - \log|b/a|}{\log|\beta/\alpha|}$$

és

$$y > \frac{\log\varepsilon - \log|q/p|}{\log|\beta/\alpha|}$$

Nyilván $x, y > n_1$ is teljesül, ahol n_1 a tételben definiált konstans. Ekko

$$\left|\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x}\right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|\frac{q}{p}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{y}\right| < \varepsilon$$

Ezeket felhasználva (8)-ból

$$1-4\varepsilon < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < \left|\frac{a}{p}\alpha^{x-y}\right| < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1+4\varepsilon$$

adódik, ami viszont egész x, y esetén nem teljesülhet ε választása miatt. Ebből már következik az állítás.

IRODALOM

1. F. Beurkers, The multiplicity of binary recurrences, Comp. Math., 40 (1980), 251—267.
2. M. D. Hirsch, Additive sequences, Math, Mag., 50 (1977), 262.
3. P. Kiss, Zero terms in second order linear recurrences Math. Sem. Not. (Kobe Univ. Japan), 7 (1979), 145—152.
4. K. K. Kubota, On a conjecture of Morgan Ward I, Acta Arithm., 33 (1977), 11—28.
5. K. K. Kubota, On a conjecture of Morgan Ward II, Acta Arithm., 33 (1977), 29—48.
6. F. Mátyás, On common terms of second order linear recurrences, Mat. Sem. Not. (Kobe Univ. Jappan), 9 (1981), 89—97.
7. M. Mignotte, Intersection des images de certaines suites recurrentes lineaires, Theoretical Comput. Sci, 7 (1978), 117.—122
8. G. Revuz, Equations deiphantines exponentielles, Bull. Soc. Math. France, Mém., 37 (1974), 139—156.

COMMON TERMS IN SECOND ORDER RECURRENCES

by Péter Kiss

(Summary)

Let $G = G(A, B, G_0, G_1)$ be a second order linear recurrence defined by rational integers A, B, G_0, G_1 and by recursion $G_n = AG_{n-1} - BG_{n-2}$ for $n > 1$. We denote the roots of polynomial $x^2 - Ax + B$ by α and β. Let us suppose that $AB \neq 0$, G_0 and G_1 are not both zero, $D = A^2 - 4B > 0$, α/β is not a root of unity and $|\alpha| > |\beta|$. Let $H = H(A, B, H_0, H_1)$ be also a second order linear recurrence with similar conditions. The sequences G and H are called equivalent if there exist integers r and s such that $G_{n+r} = H_{n+s}$ for every integer $n \geqq 0$.

The following three theorems are proved in the paper.
Theorem 1. If the sequences G and H are not equivalent and $|\beta| < 1$ then the equation $G_x = H_y$ has no solutions with condition $x, y > n_0 + 1$. *Theorem 2.* If the sequences G and H are not equivalent, $B < 0$ and $|\beta| < 1$ then the equation $G_x = H_y$ has no solutions with condition $|G_x| \geqq 6\,mw\,|B|^{n_0}$ *Theorem 3.* Let the explicit form of the terms of sequences G and H be
$G_n = (a\,\alpha^n - b\,\beta^n)/(\alpha - \beta)$ and $H_n = (p\,\alpha^n - q\,\beta^n)/(\alpha - \beta)$
respectively. Suppose that the sequences G and H are not equivalent and $ap \neq 0$. Then the equation $G_x = H_y$ has no solutions for which $x, y > n_1$.

The constants n_0, n_1, m and w in the theorems are given in the paper and they depend only on the parameters of sequences G and H.