A MATEMATIKAI MEGISMERÉS MINT PROBLÉMAMEGOLDÁS

SEMPERGER TIBOR

(Közlésre érkezett: 1973. december 22.)

Ahhoz, hogy a matematikáról filozofálni lehessen, egyrészről meg kell ismerni a matematikát, másrészt vizsgálni kell azokat a sajátosságokat, amelyet a matematikai megismerés mutat. A matematika tudományelméleti problémáinak vizsgálata segíthet bennünket abban, hogy megismerjük belső struktúráját, hogy választ kapjunk arra, hogyan születnek a matematikai ismeretek, hogy mivel magyarázható a matematika térhódítása más szaktudományok területén.

Ezeknek a problémáknak csak egy töredékét jelenti a matematikai megismerés, mint problémamegoldás vizsgálata, de kiindulópont lehet a matematika tudományelméleti szempontból felderítetlen területeinek feltérképezéséhez. A megszabott keretek nem teszik lehetővé, hogy a matematikai megismerés minden vonatkozását tárgyalja a dolgozat, így a kifejtés során szigorúan a matematikai megismerés, mint problémamegoldásra koncentrál.

A matematikai megismerés a mindennapi megismerésen való túllépés speciális formája

Az emberi tudat fejlődésének fontos állomása az, amikor az ember mintegy kidolgozza magát a természetből, megérti (még ha nagyon primitív formában is) azt, hogy a természet rajta kívül és tőle függetlenül létezik. Ahogy az ember egyre ragyogóbb eredményeket ér el a munkában, úgy fejlődik az a képessége, hogy a dolgok lényegét konkrét megnyilvánulásaikból kiszűrje, egyszóval erősödik absztraháló, általánosító képessége. Ezzel szorosan összefügg, ennek eredménye, hogy egyre jobban képes a valóság jelenségei mennyiségi viszonylatainak felismerésére, majd ezeknek a felismeréseknek a gondolati feldolgozására. A gyakorlati élet az ember számára rengeteg problémát vet fel, amelyek megoldása azonban a mindennapiság szintjén már nem lehetséges. Túl kell lépni a mindennapi megismerés szintjén. Két út kínálkozik: a tudomány és a vallás.

A „tisztán" matematikai jellegű problémák a tudomány szintjén merülnek fel, elvonatkoztatás eredményei. Vannak olyan matematikai jellegű problémák, amelyek közvetlenül az empiria szintjén jelentkeznek. Ezen az alapon kiépülő empirikus matematika még erősen kötődik a gyakorlathoz.

Ahhoz, hogy a matematikai megismerést, mint problémamegoldást vizsgálhassuk, először az *empirikus matematika* és a *deduktív matematika* kialakulására kell utalnunk, anélkül persze, hogy a matematika fejlődésének történetét részleteznénk. Az alapok kutatásánál ugyanis különbséget kell tenni az empirikus matematika keletkezésének problémája és a deduktív matematika létrejöttének kérdése között. Ha elhanyagoljuk a különbséget, könnyen olyan következtetésre jutunk, hogy a deduktív matematika a gyakorlati szükségletek kielégítésére dolgozódott ki. Ez természetesen nem így van. Ami igaz az empirikus matematikára, az nem igaz a deduktívra. Engels a következőket írja:

„Akárcsak minden más tudomány, a matematika az emberek szükségleteiből származott: a földmérésből és edények űrtartalmának méréséből, időszámításból és mechanikából." ⟨1⟩

Ezek a megállapítások az empirikus, regisztratív matematika korára vonatkoznak. Ebben a korban érvényes, hogy közvetlen emberi szükségletek kielégítése érdekében jött létre. Engelsnél a továbbiakban ezt olvashatjuk:

„De akárcsak a gondolkodás valamennyi területén, a fejlődés egy bizonyos fokán a valóságos világból elvonatkoztatott törvényeket elválasztják a valóságos világtól, vele szembeállítják, mint önálló valamit, mint kívülről jövő törvényeket, amelyekhez a világnak igazodnia kell... *így és nem másként alkalmazzák utólag a világra a tiszta matematikát, bárha éppen ebből a világból kölcsönözték, és a világ összetételi formáinak csak egy részét alkotja — és éppen csakis emiatt alkalmazható egyáltalában.*" ⟨2⟩ (Kiemelés tőlem — S. T.)

Ezek a megállapítások már a fejlődés magasabb fokára, a deduktív matematikára vonatkoznak. Itt nem állítja Engels, hogy az emberi szükségletek kielégítése céljára dolgozódott volna ki a deduktív matematika. A kiemelt rész lényeges gondolatot fogalmaz meg: a matematika azért alkalmazható a valóságra, mert a matematika törvényei a valóság jelenségeinek *absztrakciója* útján születnek.

Az empirikus matematikára a még közvetlenül a tapasztalati anyagra épülő empirikus megismerés jellemző. Ennek a megismerésnek az alapját a tapasztalati dolgok alkotják, a feldolgozott anyag tapasztalati, de a feldolgozás módja már gondolati. A felmerülő problémák is a tapasztalatból, a gyakorlatból adódó matematikai problémák. Itt az empirikus általánosításnak van domináló szerepe, ebből következően az empirikus általánosítások megalapozásánál használt logikai eljárásokat magába foglaló *induktív módszer* a meghatározó.

Az empirikus matematika keretei között empirikus általánosítás alapján induktíve alkothatók általános szabályok, de megváltozik a helyzet, amint az empirikus matematika kilép a mindennapi gyakorlat keretei közül, és eljut több pusztán matematikai jellegű problémához. (Ezeket a pusztán matematikai jellegű problémákat felvethetik a tapasztalatból származó matematikai jellegű problémák megoldásai is, de megoldhatatlanságuk is.) Ezeknek a problémáknak a megoldásához már ugyanis nem fűződik közvetlen gyakorlati érdek, és tapasztalati úton, empirikus általánosítások segítségével nem is oldhatók meg. A matematika belső fejlődéséből származó problémák megoldásához új módszert kell keresni. Ez pedig csak az absztrakció további mélyítésével érhető el. Ez a fokozódó absztrakció egyre több olyan új fogalom és új művelet bevezetését teszi szükségessé, amelyek egyáltalán nem szemléletesek. (Természetesen, fordítva is igaz, hogy az új fogalmak, új műveletek bevezetése felvet bizonyos problémákat. A két oldalt együtt kell vizsgálni.) Így vagyunk képesek olyan matematikai problémákat is megoldani, amelyek a józan ész számára nem szemléletesek, nem gyakorlati jellegűek, hanem a matematika fejlődésének belső összefüggéseiből adódnak. Ezt természetesen csak úgy tehetjük, ha a dolgok belső lényegét megközelítő absztrakciók híven tükrözik az objektív valóságot, sokkal hívebben, mintha pusztán érzékszerveink által érzékelhető szemléletes fogalmakkal dolgoznánk. A matematika számos területe az érzékelés, a tapasztalás számára teljesen hozzáférhetetlen, rendkívül absztrakt dolgokkal foglalkozik. Az itt jelentkező problémák megoldása minőségileg magasabb szintű matematikai tevékenységet igényel, mint amire az empirikus matematika képes. Ez a deduktív matematika elvontabb és általánosabb jellegében található meg. A matematikának éppen ez az elvont és általános jellege adja meg a matematika ismeretelméleti jelentőségét, de egyben gyakorlati jelentőségét is. De amíg eddig a matematika eljutott, számos nehézséget kellett leküzdeni.

A fejlődéssel praktikus okok miatt először az empirikus matematika felhalmozott tudásanyagának rendszerezése válik szükségesssé. Ez a rendszerezés persze, már támaszkodott az összeg, a vonal, a terület, a távolság stb. jól kidolgozott fogalmaira. Ezek a rendszerezések megkönnyítették a tájékozódást az ismeretek rendszerében, gyakorlati és tudományos vonatkozásban egyaránt.

Az ismeretanyagnak, vagy akár egy részének többé-kevésbé szerencsés rendszerezése is már kidomborította a matematika két jellegzetes vonását, és így az empirikus matematikában két hatékony eljárást ismertek fel: a *visszavezetést* és a *következtetést. Az egyik* eljárásnál a cél: bonyolult problémákat olyan egyszerű problémákra *visszavezetni,* amelyeknek a megoldása már ismert. Ezek után már csak azt kellett eldönteni, hogy melyek az egész matematika felépítésekor kiindulásul szolgáló alapfogalmak, tények stb. *A másik* eljárás lényege: következtetni ismert tapasztalati adatokból, tapasztalati ellenőrzés nélkül más (még nem tapasztalt) tények fennállására. Ehhez már csak a következtetés általános szabályai kellenek.

Mindezek a felismerések mellett és az empirikus matematika fejlődése olyan akadályokba ütközött, amelyeket a régi induktív módszerekkel nem lehetett leküzdeni. Erre utalnak olyan máig is megoldatlan problémák, mint pl. a tökéletes számok és a barátságos számok problémája stb. ⟨3⟩. Itt az empirikus matematika módszerei csődöt mondtak.

A továbblépésre két alterníva kínálkozott:

vagy figyelmen kívül hagyják a matematika által támasztott belső igényeket, és megállnak azon a ponton, ahová a matematika eljutott,

vagy fordulat következik be a matematika fejlődésében.

Az utóbbbi azonban csak akkor következhet be, ha a matematika mindazokat a problémákat, amelyeket a matematika belső fejlődése tárt fel — mondhatnánk, amelyek megoldásához közvetlenül különösebb gyakorlati érdek nem fűződik — megoldja. Az előrelépéskor ugyanis azt kellett tisztázni, hogy melyek azok a legegyszerűbb alaptények, alapfogalmak, amelyek az egész matematika felépítéséhez alapul szolgálhatnak ⟨4⟩. Másrészt ki kellett dolgozni a következtetés legáltalánosabb szabályait.

Ennek eredményeképpen i. e. V. században a deduktív matematika első eredményei kezdtek határozott alakot ölteni ⟨5⟩. Ezzel egy időben a matematikusok azonnal szemléletellenes, antiempirikus felfogást képviselnek. Ez a szembefordulás kettős kiábrándulás eredménye: — *egyrészről*, hogy a felmerült problémákra az alkalmazott empirikus módszerek nem adtak olyan értékesíthető megoldást, amelyekből szabályosságok, vagy ismétlődések kiolvashatók lettek volna. *Másrészt* elhamarkodottak voltak a még nagy számú kísérletből levont következtetések is, amelyeket már nem támasztottak alá, hanem meg is cáfoltak az újabb tapasztalati ismeretek.

A deduktív matematika első eredményei, hogy a görög matematika kialakította a matematikai gondolkodásmód alapjait, megszületett a matematikai bizonyítás fogalma, amely modellt adott minden későbbi egzakt gondolkodás számára. Megszülettek a görög matematika nagy összefoglalásai, rendszerezései, a matematika három különböző, de egyformán lényeges területén:

a) — a matematika elvi és logikai megalapozása
b) — az infinitézimális analízis problémája
c) — a kúpszeletek elmélete.

Mindezek az eredmények alapját alkották a deduktív geometriai szerkesztések elméletének. Megindult a matematikának deduktív tudománnyá válása, amelyről elmondhatjuk, hogy még most sem fejeződött be, a matematika teljesen deduktívvá a mai napig sem vált. Eközben persze, számtalan pusztán matematikai probléma merült fel, és nyert megoldást, vagy még ma is megoldatlan.

Szükséges volt a fentiek vázlatos elemzése, mert csak az alapok kutatásával mutatható ki az empirikus és a deduktív matematika különbsége. Márpedig ez a különbség témánk szempontjából igen lényeges, ugyanis *a matematikai megismerést mint problémamegoldást* elsősorban a deduktív matematikára vonatkoztatjuk. Nem zárva ki ezzel azt, hogy az empirikus matematika szintjén a megismerés, mint problémamegoldás vizsgálható.

A matematikai megismerés, mint problémamegoldás

Az emberiség hosszú története során rengeteg ismeretet halmozott fel. A felnövekvő nemzedékek ezt a felhalmozott ismeretet elsajátítják, mintegy újratermelik. Így van ez a matematika által összegyűjtött ismereteknél is. Kezdetben az újratermelés során csupán passzív feldolgozásról beszélhetünk. Ez azonban csak egyik oldala a folyamatnak, ugyanis a felhalmozódással a matematikai ismeretek szerzése egyre aktívabb lesz, mígnem egyes kiemelkedő személyiségek (kollektívák) eljutnak a produktív ismeretszerzéshez. De hiba lenne ezt a folyamatot csak a matematikai ismeretek mennyiségi halmozódásának tekinteni. Itt is érvényes a dialektika törvénye, bekövetkezik a minőségi ugrás. Ezt a minőségi ugrást a *problémák felmerülése* jelenti. Tehát a probléma felmerülése nem az abszolút kezdetét jelenti a megismerésnek, inkább egy magasabb szintű ciklusának a kezdete.

A problémák felmerülése mérföldkövet jelent a magas szintű megismerési folyamatban. A matematikai megismerés tehát nem tárgyalható a matematikai problémák ismeretelméleti tárgyalása nélkül, hiszen ez a tárgyalás teszi lehetővé a matematikai megismerésre jellemző aktív, konstruktív mozzanatok megértését. A magyar nyelven megjelent tudományelméleti munkák elvétve foglalkoznak a problémák lényeges ismérveinek tárgyalásával, így indokolt, hogy ezzel kapcsolatban néhány vonatkozást előrebocsássunk ⟨6⟩.

Problémákról általában

A probléma a megismerésnek egy sajátos állomása, eredménye, amely éppúgy ideális objektumnak minősül, mint a megismerés egyéb eredményei (fogalmak, normák), de ugyanakkor nem tekinthetők elemi gondolati képződményeknek. Fontos ennek hangsúlyozása, mert a valóságban nincsenek problémák, csupán problémahelyzetek. A *probléma* ennek a problémahelyzetnek a gondolati vetülete. A probléma akkor merül fel, ha a megszerzett tudásunk elégtelennek bizonyul, és ez a helyzet tudatosul is. Bizonyos értelemben a nem tudás tudatosulása.

A folyamat ciklikusságát sematikusan így ábrázolhatjuk: ⟨7⟩

Régi tudás / Probléma → Megoldások keresése → Lehetséges megold. ért. → Új tudás új probl.

Itt kell kiemelni a problémák dialektikus ellentmondásos jellegét, ugyanis a problémát a tudásnak és a nem tudásnak az egymásmellettisége alkotja. Dialektikusan ellentmondásos, mert nem egyszerűen a puszta nem tudást állítjuk szembe a tudással, hanem a tudás történetileg elért szintjét ítéljük elégtelennek. Vagyis a probléma esetén viszonylagos tudás és nem tudás egységéről van szó, amit az előbb úgy jellemeztünk, hogy a *nem tudás tudatosulása,* a régi tudás elégtelenségének a tudása.

Ha a probléma elemeit keressük, mindenképpen a meglevő tudásból (régi tudás) kell kiindulni, ugyanis a már megszerzett ismeretek és a probléma megfogalmazásához szükséges ismeretek alkotják a *problémaadatokat* (ismeretháttér). A probléma az ismeretháttéren kívül bizonyos *feltételeket* is rögzít, amelyeknek a megvalósítandó célnak eleget kell tenniök. A problémában található *ismeretlent* a kérdés fejezi ki.

A problémaelemzést tehát a következők képezik: *problémaadatok* (ezek kijelentések), *feltételek* (normatív jellegűek), az *ismeretlen* (kérdés). Problémát megfogalmazni csak ezen elemekkel lehet, ezek az elemek többé-kevésbé bonyolult rendszert alkotnak. Ezeken belül a kérdés kulcsszerepet tölt be, enélkül problémát nem lehet megfogalmazni, megformulázni, ugyanis az ismeretlen kérdés alakjában fejezhető ki.

A kérdéseken belül a probléma szempontjából különbséget teszünk: *ellenőrző kérdés; tudakoló kérdés; feladat; alkotó-kérdésfeltevés* között. Az osztályozás alapja, hogy a kérdést feltevő, illetve a válaszadó ismeri-e a választ vagy sem. Témánk szempontjából az utóbbi két típus a figyelemreméltó.

Feladat: A kérdező ismeri a választ, de a válaszadó nem. Ilyenek a matematikai feladatok. Pl. egy egyismeretlenes másodfokú egyenlet, feladat. A feladatok megoldása bizonyos *algoritmus* alkalmazásával elvégezhető, példánk esetén $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ megadja az egyenlet gyökét.

Alkotó-kérdésfeltevés: Sem a kérdező, sem a válaszadó nem ismeri a választ, sőt, nincs olyan ember, aki ismerné, és nem adható meg olyan algoritmus, amelynek segítségével elő lehetne állítani a megoldást.

A tudományos problémák formulázásánál ennek az utóbbinak, az alkotó kérdésfeltevésnek van nagy jelentősége. A tudományos problémák főbb típusait részletes elemzés nélkül csak felsoroljuk ⟨8⟩.

Közvetlenül a valóságra irányuló problémákat nevezzük *tárgyproblémáknak,* és a közvetve kapcsolódó problémákat *metaproblémáknak.* További megkülönböztetések a tárgyproblémán belül: *empirikus problémák, teoretikus problémák, alkalmazási problémák.* Metaproblémán belül: *formális problémák:* (logikai, matematikai problémák), *félig formális, félig tartalmi problémák; filozófiai problémák.*

A matematikai problémák sajátosságai

A matematikai problémák a metaproblémák sajátos válfaját képezik. Nem közvetlenül a valósághoz kapcsolódnak, hanem elsősorban a tárgyproblémákra vonatkoznak. A matematikai problémák csak a megismerés viszonylag korai szakaszában (empirikus, regisztratív matematika) kezelhetők úgy, mint a gyakorlatban felmerült problémahelyzetek leképeződései. Bár általánosságban igaz, hogy a matematikai problémák a formális problémák csoportjába tartoznak, mégis különbséget kell tenni először a *„gyakorlati jellegű" matematikai problémák,* másodszor a *„szaktudományos jellegű" matematikai problémák,* és harmadszor *„tisztán" matematikai problémák* között ⟨9⟩.

Egyik oldalról tehát világosan kell látni a matematikai problémáknak, mint formális problémáknak a problémamegoldásban betöltött szerepét, másik oldalról pedig az egyes szinteken jelentkező matematikai problémákat.

Nézzük meg először a *„gyakorlati jellegű" matematikai problémákat. A problémaadatok,* amelyre a probléma épül, gyakorlati jellegű ismeretek és zömmel a megfogalmazáshoz szükséges ismeretek is. A *feltételek* is gyakorlati normatívák, amelyek teljesítése a cél megvalósításának elengedhetetlen feltétele. De bizonyos vonatkozásban már matematikai ismereteket is feltételez. A *probléma* megfogalmazása, *megformulázása* pedig erősen támaszkodik a matematikára. További sajátossága, hogy erősen empirikus jellege van. A matematika legtöbbször ismeri a probléma megoldását, tehát csak egyszerűen feladat-jellegű, *feladvány-jellegű problémát* jelent. Itt a matematikai problémák, mint az empirikus problémák kisérőproblémái funkcionálnak, persze, itt is felvetődnek teoretikus problémák. (Nincsenek tisztán empirikus problémák.) Ezért hangsúlyozzuk, hogy legtöbbször ezek a matematikai problémák (feladatok) is felvethetnek a matematikán belüli *alkotó kérdésfeltevéseket.*

A „gyakorlati jellegű" matematikai problémák az empirikus matematikára jellemzők, ahol is a probléma a gyakorlatban kialakult problémahelyzetnek a vetülete. De már az empirikus matematika is felvet olyan matematikai problémákat, amelyek elsődlegesen a matematika fejlődési igényeiből fakadtak, és ezeknek a problémáknak a megoldása csak közvetve szolgálta a gyakorlatot, vagy csak perspektivikus vonatkozásban. A matematikai megismerés fejlettebb fokain felvetődő problémák már a matematika belső fejlődéséből adódtak, itt már a lehetséges problémahelyzetek gondolati szerkesztéséről van szó. Így a deduktív matematika kialakulásával a gyakorlati jellegű problémahelyzetek gondolati vetületeként megjelenő matematikai problémák mellett egyre nő a belső fejlődésből származó, gondolatilag szerkesztett matematikai problémák száma.

Ebben természetesen, jelentős szerepet játszanak a *„szaktudományos jellegű" matematikai problémák,* amelyek sok hasonlóságot mutatnak a „gyakorlati jellegű" problémákhoz, de itt már a teoretikus problémák válnak dominálóvá. Megmutatkozik ez abban, hogy az ismereththáttér teoretikus ismeretekből álló szaktudományi (pl. fizikai) ismeret, és a probléma megfogalmazása is ezen szaktudományos ismeretek segítségével történik. A *cél* eléréséhez természetesen, bizonyos normatívákat kell elsajátítani. Ezekre épülve a *kérdésben* a probléma szaktudományos vonatkozású megfogalmazást nyer, elsősorban teoretikus probléma formájában, ahol nagy szerepe van az idealizációnak, gondolati konstrukciónak. Ezek a problémák, mint láthattuk, elsősorban *tárgyproblémák.* A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a *matematikai problémák* hogyan kapcsolódnak a tárgyproblémákhoz, ezen belül is a *teoretikus problémákhoz.*

A szaktudomány számára a nehézség ott kezdődik, amikor hiányzik a megfelelő matematikai apparátus a kitűzött cél eléréséhez. De a nehézség felmerülhet olyan formában is, mint a tárgyproblémának formális, matematikai problémává való átfogalmazása. Vagyis a tárgyproblémára vonatkozóan fel kell állítani egy metaproblémát.

A probléma megoldásában a matematika egyik esetben egyszerű matematikai feladatot old meg, tehát megadja a szaktudomány számára a megfelelő apparátust, amely csak a szaktudomány számára ismeretlen, a matematika számára nem. Az ilyen jellegű matematikai problémák megoldása lényegében a matematika szaktudományban való alkalmazását jelenti. Ha csak ez a hatás volna, akkor a matematika ebből a problémamegoldásból igen keveset „tanulna".

Más esetben még a matematika sem rendelkezik a megoldáshoz szükséges matematikai apparátussal. Így tehát a szaktudományok által megfogalmazott és a matematika nyelvére átfogalmazott tárgyprobléma átnőhet *„tisztán matematikai problémává"*, mint a tárgyprobléma kísérőproblémája. De a matematikán belül már bizonyos önállósággal rendelkező problémaként fog szerepelni.

A metaprobléma megoldása, vagyis a formális probléma részét képező „tisztán" matematikai probléma a tárgyprobléma megoldását is jelenti, de egyben a megoldás általánosabb érvényű is. Világosan kell látni, hogy a matematika számára a probléma megoldása során nem ugyanaz a központi kérdés, a cél, mint a szaktudomány számára, a matematika bizonyos mértékig mindig a „saját érdekéből" kiindulva is vizsgálja a problémákat. Ezt tükrözi már a problémának a formalizáció segítségével történő átfogalmazása is. A matematikai probléma bizonyos mértékig függetlenedik a tárgyproblémától, és önállóan lép fel. Ekkor már *„tisztán" matematikai jellegű problémáról* beszélünk, ami továbbgyűrűzhet olyan formán, hogy az így megformulázott matematikai probléma a matematikán belül vet fel bizonyos kísérő problémákat. Így aztán a problémáknak egész bonyolult hálózata alakulhat ki, amelyben minden elért eredmény magában hordozza a lehetőséget, hogy az egész problémakomplexum megoldásában döntő láncszem legyen. Erre a matematika fejlődése a garancia. Ezért lehetséges, hogy egy-egy matematikai probléma megoldása szinte forradalmi változásokat idéz elő a matematika területén (lásd nem-euklideszi geometria), de közvetve a szaktudományok területén is.

Eddigiekben azt az esetet vizsgáltuk, amikor a *tárgyproblémák matematikai problémává való átfogalmazásáról* van szó. A „szaktudományi jellegű" matematikai problémák egy része azonban mint a tárgyprobléma részproblémája is jelentkezhet. Itt a matematikai probléma megoldása lerövidítheti a tárgyprobléma megoldását.

A harmadik és igen gyakran alkalmazott módszer, amikor a tárgyprobléma közvetlenül matematikai formában nyer megfogalmazást, elsősorban matematikai formulák segítségével. Ezért is indokolt volt a fentiek részletesebb elemzése, mert csak ezek alapján világos, hogy *egyrészről* a matematikai problémák szorosan kapcsolódnak a tárgyproblémákhoz, *másrészt*, hogy a matematikai problémák a tárgyproblémákhoz képest *viszonylagos önállósággal rendelkeznek.*

Amellett, hogy kimutattuk a tárgyproblémák szerepét a „tisztán" matematikai problémák kialakulásában, nem szabad figyelmen kívül hagyni azt az általános megállapítást, miszerint ahhoz, hogy a tárgyproblémákat fel tudjuk vetni és meg tudjuk oldani, elképzelésekkel kell bírnunk arra vonatkozóan, hogyan kell formulázni a problémákat, és a megoldásokat hogyan kell kutatni. Tehát így a *matematikai problémák általában a problémák megfogalmazásában, megformulázásában, megoldásában játszanak* *szerepet, de viszonylagos önállósággal is rendelkeznek, mint önálló problémakomplexumok.* Ebben a minőségben a matematikai probléma a matematika belső igényeiből táplálkozó „tisztán” matematikai probléma. Ezen keresztül mutatható ki a matematikai megismerésre jellemző aktív, konstruktív mozzanat.

A következőkben az utóbbi értelemben vizsgáljuk a matematikai problémákat, és ilyen vonatkozásban használjuk a „tisztán” jelzőt, semmiképp sem a valóságtól való abszolút függetlenségét értve rajta.

Ezek a problémák már a matematikában felmerült problémahelyzetek gondolati vetületei, tehát itt már maga a problémahelyzet is ideális objektumok kölcsönhatásán alapszik. A *problémahelyzet* feltárja a meglevő matematikai ismereteket, egyben tudatosul az ezzel kapcsolatos elégtelen tudás is. Nem jelenti azonban ez a sajátos helyzet, hogy ezek a problémák önkényesek, sőt, nagyon is szigorú matematikai szabályok által meghatározott megfogalmazásai, megformulázásai a kialakult problémahelyzetnek.

Ha a matematikai ismereteket viszonylagosan önálló oldalukról vizsgáljuk, tehát mint tisztán matematikai ismereteket, akkor itt is megfigyelhetők a különböző szintű problémák:

1. *Matematikai tárgyproblémák*
   - 1.1. empirikus matematikai problémák (empirikus regisztratív matematika)
   - 1.2. teoretikus matematikai problémák (deduktív matematika)
   - 1.3. alkalmazási matematikai problémák (alkalmazott matematika)

2. *Matematikai metaproblémák. Metamatematika.*
   - 2.1. Formális matematikai problémák
     - 2.1.1. matematikai logikai problémák (matematikai logika)
     - 2.1.2. halmazelméleti problémák
     - 2.1.3. bizonyításelméleti problémák
   - 2.2. Félig formális — félig tartalmi matematikai problémák
     - 2.2.1. A matematika metodológiai problémái (szakmódszertani problémák)
   - 2.3. A matematika filozófiai problémái.

Ha a fenti osztályozást elemezzük, akkor világossá válik, hogy a matematikai *tárgyproblémák* közvetlenül kapcsolódnak ahhoz a „valósághoz”, amelyet a matematika vizsgál. Nem szabad azonban figyelmen kívül hagyni, hogy a matematika objektumainak nagy része ideális objektum, de emellett az empirikus matematika révén, pontosabban az *empirikus problémákon* keresztül a valóságos objektumokhoz is kapcsolódik. A matematika tárgyproblémái is azonban, általában „a” problémák megfogalmazásában, megformulázásában a metaproblémák szerepét töltik be, itt különösen a *teoretikus matematikai problémák* szerepe a döntő.

A metamatematikai problémák a matematika elméletére vonatkozó problémák, a megismerésnek igen magas szintjét alkotják. Ezen belül is a logikai problémák, valamint a halmazelméleti problémák, bizonyításelméleti problémák, metodológiai és filozófiai problémák játsszák a középponti szerepet.

A valóságban a matematikai problémák fentiekben tárgyalt osztályozása nem válik ilyen élesen külön, nagyon szorosan áthatják egymást, de a matematikai problémák dialektikus ellentmondásos jellegét ilyen vonatkozásban is ki kell mutatni. Természetesen ez az osztályozás még tovább finomítható, itt most csupán a matematikai problémáknak a kettős státuszára próbáltunk rámutatni: a matematikai problémák sajátosan metaproblémák is és egyben tárgyproblémák is („meta-tárgy-problémák"). E sajátos státuszuk teszi lehetővé, hogy egyrészről kölcsönös összefüggésben állnak a gyakorlati jellegű — a szaktudományi jellegű matematikai problémákkal, és általában a problémákkal, de ugyanakkor önálló problematikával is rendelkeznek.

Mint láttuk, a matematikai problémahelyzet egy olyan elkezdett folyamat, amelynek folytatását a rendelkezésre álló ismerethalmaz hiányossága gátolja. Mint általában a probléma, a matematikai probléma is a korábban megszerzett tudás talaján merül fel. Így ennek a tudásnak bizonyos hányadát igaz ismeretként feltételezni.

Pl. A matematika történetében felmerül a vegyes másodfokú egyismeretlenes egyenletek általános megoldásának a problémája. A matematika eredményei ismertek, de egyúttal ezek elégtelensége is ismert (pl. csak konkrét esetben tudják a görögök a vegyes másodfokú egyismeretlenes egyenleteket megoldani). Ez a hiány a probléma ismeretlenje. Hiányzott egy meghatározott eljárás.

Ismert: az egyismeretlenes vegyes másodfokú egyenletek + a matematika által eddig elért eredmények.

Ismeretlen: az általános eljárás, amely alapján megkapjuk az egyenlet gyökét.

Feltétel: — a matematika műveleti szabályainak megfeleljen
— általános megoldást adjon.

A probléma megfogalmazásához szükséges ismeretek:
— matematikai jelölések
— műveleti szabályok stb.

Kérdés: Mi az egyenlet gyökét meghatározó eljárás?
(Jelen esetben ez alkotó-kérdésfeltevés.)

A probléma megformulázása:
Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyöke milyen eljárás segítségével adható meg?

Megoldás: Az eljárás eredményeként egy kész megoldási séma:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

További megkülönböztetés a matematikai problémákon belül:
(1) „Meghatározó" problémák
(2) „Bizonyító" problémák

(1) A *„meghatározó" probléma* esetében egy világosan megfogalmazott kikötést kielégítő x ismeretlent kell meglelnünk. Még nem tudjuk, hogy létezik-e olyan objektum, amely a feltételeket kielégíti.

„Meghatározó" probléma pl:

Keressünk egy olyan x-et, amely kielégíti a

$$4x^2 - 54x + 85 = 0 \text{ egyenletet.}$$

Ekkor ismerni kell a megoldóképletet.

(2) *„Bizonyító" probléma.* Ennél a típusnál egy világosan megfogalmazott matematikai tételt kell bebizonyítanunk vagy megcáfolnunk. Még nem tudjuk, hogy igaz-e a tétel vagy hamis; de levezetünk belőle egy másik tételt és ebből egy újabbat, mindaddig, amíg eljutunk egy olyan tételhez, amelyről határozottan tudjuk, hogy igaz-e vagy hamis. Ha igaz, akkor a kiinduló tételünk is igaz, feltéve, hogy az összes következtetéseink megfordíthatók.

A matematikai problémák megfogalmazásának, mint erről már szó volt, meghatározott feltételei vannak. Ahhoz, hogy egy matematikai probléma megfogalmazása jól képzett legyen, a következő feltételek szükségesek:

1. Rendelkezzünk kellő tudományos adattal, eljárásokkal, amely a probléma matematikai tárgyalását lehetővé teszi.
2. A probléma helyesen legyen felállítva a matematika szabályainak és az objektumok közötti összefüggéseknek megfelelően.
3. Valóságos probléma legyen, ne eldöntetlen vagy álprobléma.
4. A matematikában a probléma megoldásánál ügyelni kell arra, hogy ne csak a tőlünk távol eső, viszonylag jól megkülönböztethető kategóriáktól határoljuk el a problémákat, hanem a velük látszólag összemosódó problémáktól is.

A matematikában a problémák megfogalmazása után igen gyakran az első és a legfontosabb lépés a probléma valamely alkalmas módon történő átfogalmazása, átalakítása. Ez megfigyelhető mind a „bizonyító", mind pedig a „meghatározó" problémáknál. A problémák átfogalmazása lehetővé teszi a megoldások gyorsabb, egyszerűbb megtalálását.

Problémamegoldás a matematikában

Az eddigiekben a problémák megoldásának az első fázisát, a probléma felmerülését és formálását tárgyaltuk. A második szakasz a *megoldás keresése.* A lehetséges megoldásokat itt csak felsoroljuk:

1. Kész megoldási sémák keresése
2. Kísérlet és tévedés módszere
3. Induktív megerősítés
4. Absztrakció
5. Gondolati alkotás
6. Heurisztika stb.

A matematikai kutatás a problémák megtalálásából, felállításából, a velük való megbirkózásból áll. A matematikai problémák felmerülését gyakran azonban csak hosszú idő múltán követi a megoldás megtalálása, mert a kutatás közben számos eredménytelen kísérlet születik. Az akadályokat azonban az ember szellemi aktivitása leküzdi.

Az ellenőrző és informatív kérdések, valamint feladatok formájában megfogalmazott problémák megoldásai már *ismertek*. Ezek a megoldások tanulással elsajátíthatók. (Természetesen a tanulásnak ez a formája feltételezi a gondolati produktivitásnak bizonyos fokát.) A megoldás — tisztán matematikai jelentését tekintve — olyan tárgyat jelöl, amely a „meghatározó" probléma kikötésnek tesz eleget.

Pl. $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenlet megoldásai, az egyenlet gyökei: 1 és -3 számok.

A megoldásnak azonban van nem tisztán matematikai jelentése is, amely jelenti még a probléma megoldásának folyamatát is. A megoldás továbbá jelentheti a probléma megoldása során végzett munka eredményét is. Így az említett típusú matematikai problémák megoldásához nemcsak fel kell idézni az ismereteknek azt a halmazát, amely a megoldáshoz szükséges, hanem alkalmazni is kell ezeket az ismereteket. (Adott esetben a megoldóképletet.) Így van ez akkor is, ha a szaktudománynak olyan bonyolult matematikai problémát kell megoldani, amely az adott tudomány erejét meghaladja, de mint matematikai probléma megoldottnak tekinthető és a szakirodalom tartalmazza.

Ezeknél a problémáknál nemcsak a mások által megszerzett matematikai ismeretek termelődnek újra, de a megismerők elsajátítják az ismeret megszerzésének a módját is, a szerzett ismeretek ugyanis számukra újak. Az ilyen problémák megoldásában szerzett gyakorlat elvezet bennünket oda, hogy az egész matematika számára új ismeretet szerezzünk. Ugyanis valamely bonyolult matematikai probléma megoldása komoly gondolati erőfeszítést igényel, amely lehetővé teszi, hogy megfelelő ismerethalmaz birtokában szűkebb értelemben vett matematikai problémákat is megoldjunk.

A matematikai problémák megoldásának részletes elemzését találjuk Pólya Györgynél ⟨10⟩. A leglényegesebb elemek a következők:

1. *A feladat megértése:*
   - 1.1. Mit keresünk?
   - 1.2. Milyen adatokat ismerünk?
   - 1.3. Milyen feltételek adottak?
2. *Tervkészítés:*
   - 2.1. Keressünk összefüggést az adatok és az ismeretlen között!
   - 2.2. Vizsgáljunk meg segédfeladatot!
   - 2.3. Készítsük el a megoldás tervét!
3. *A terv végrehajtása:*
   - 3.1. Ellenőrizzünk minden lépést, amikor végrehajtjuk a feladatot!
   - 3.2. Ha szükséges, bizonyítsuk be a lépések helyességét!
4. *A megoldás vizsgálata:*
   - 4.1. Ellenőrizzük az eredményt!
   - 4.2. Van-e más megoldás is?

A megoldások keresésénél nagyon lényeges, hogy először a problémát elemezzük. Ugyanis a praktikus kérdések logikusan felépíthetők egy meghatározott matematikai probléma megoldása érdekében, és jól megfogalmazva célravezető feladattervet eredményeznek. Előbb tehát a probléma, azután a módszer. Tehát a problémához először módszert kell keresnünk, nem pedig a módszernek megfelelő problémákat.

A matematikai problémamegoldásban nagy szerepe van a *bizonyításnak*. A matematika csak azt fogadja el igaznak, ami bizonyított. A bizonyítás *legáltalánosabb értelemben* valamely állítás helyességének a kimutatása, vagyis annak, hogy az állítás a tényeknek megfelel.

Szűkebb értelemben, valamely tétel, hipotézis, elmélet igazságának a kimutatása olyan tételek segítségével, amelyek igazsága már kimutatott, bebizonyított. A bizonyítás tehát a következtetések egy olyan speciális formája, amely nem arra irányul, hogy új problémát állítson fel, hanem, hogy a meglevőkről kimutassa, hogy valódiak, és megoldásukat segíti elő.

I. *A deduktív matematikai bizonyítás* szerkezetét vizsgálva a következő elemeket találjuk:

1. demonstrandum (a bizonyítandó tétel)
2. axiómák (tovább nem bizonyíthatónak tekintett alapelvek)
3. argumentum (a bizonyítás érvei)
4. demonstráció (a bizonyítás művelete)

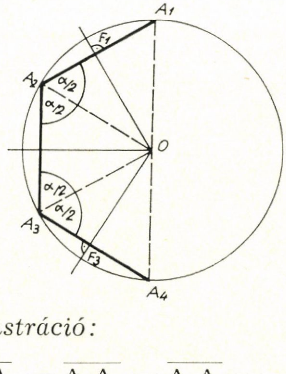
A bizonyítás a következtetések egész sorozatából áll, amelyek zárókövetkeztetésekkel végződnek, ez a zárótétel, amelynek igazságát be kell bizonyítani.

Vizsgáljuk ezt egy példán:

Demonstrandum: Minden szabályos sokszög, húrsokszög és érintősokszög is.

Átfogalmazva: Van olyan kör, amely átmegy a csúcsokon, és van olyan, amely érinti az oldalakat.

Axiómák: Illeszkedési és elválasztási axiómák.



Argomentumok — demonstráció:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \dots\dots\dots$$

$$A_1A_2A_3 \sphericalangle = A_2A_3A_4 \sphericalangle = \dots\dots\dots$$

Felezzük meg az $\overline{A_1A_2}$ szakaszt, és ebbe a pontba állítsunk merőlegest. Felezzük meg az $\overline{A_2A_3}$ szakaszt is.

$$\overline{F_1A_1} = \overline{F_1A_2} \qquad \overline{F_1O} \text{ közös} \Rightarrow OF_1A_1\triangle \approx OF_1A_2\triangle$$

$$\Rightarrow \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$$

$$A_2OF_2\triangle \approx OF_2A_3\triangle \Rightarrow \overline{A_2O} = \overline{A_3O}$$

$$F_1OA_2\triangle \approx F_2OA_2\triangle \text{ mert — } \overline{OA_2} \text{ közös}$$

— Derékszögű háromszög

$$— \ \overline{F_2A_2} = \overline{A_2F_1}$$

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3}$$

q. e. d.

Amikor egy matematikus valamilyen problémát tanulmányoz, át kell gondolni, hogy az adott feltételekből milyen következtetések vonhatók le. Az ötletet az *intuició* sugallja, melynek termékenysége és igazságértéke határozza meg, hogy mennyire jó matematikus valaki. De még be kell bizonyítani, hogy helyes a sejtés. Ez viszonylag hosszú folyamat. A szabatosság kitapogatja minden fogás biztonságát, és ha szilárdnak találta az intuiciót, felhasználja. André Rezuv a következőket írja:

„Amit a matematika költészetének neveznek, az szerintem a szárnyaló képzelet olyan alkotásaiban rejlik, amelyeket az engesztelhetetlen szabatosság irányít és ösztönöz. A legvadabb költői ötletek is bátortalannak tűnnek olykor a látszólag rövid gyeplőszáron tartott matematikai képzelet szüleményeihez képest. A jólnevelt intuició valami módon magában foglalhatja a szabatosságot: *a tapasztalt matematikus egy bizonyítás formába öntése előtt gyakran megérzi egy kijelentés igaz vagy hamis voltát.* (Kiemelés tőlem — S. T.) A matematikus képzésében mindenekelőtt az intuició tisztaságának megóvására kell ügyelni. Ha hagyjuk az intuiciót ellenőrzés nélkül elkóborolni, legyengül. Hosszú ideig hinni egy téves gondolatban, mérgező hatású... Nagy a kockázat: az intuició lázálommá silányulhat." ⟨11⟩.

II. Az *indukció* az a módszer, amellyel megfigyelés és egyes esetek kombinációja útján általános törvényeket fedezhetünk fel. Ez még a matematikában is használatos, de *teljes indukciót* csak a matematika használ bizonyos típusú tételek bizonyításánál. A teljes indukció, mint bizonyítási módszer, két fő lépésből áll:

1. *a bázis:* Be kell bizonyítani, hogy 1-re igaz az az állítás, amely a bizonyítandó tétel szerint minden természetes számra igaz.
2. *indukciós lépés:* Bizonyítani kell, hogy ha a szóban forgó állítás egy természetes számra igaz, akkor az 1-gyel nagyobb számra is igaz.

Az indukciós lépésben lényegében azt bizonyítjuk, hogy az állítás igazsága bármely számról öröklődik eggyel nagyobb számra, tehát egy általános, minden természetes számra érvényes állítást bizonyítottunk be. (Ez semmi esetre sem jelenti az 1-től az általános felé való haladást.) Ezzel a módszerrel bebizonyítható, hogy *az első n pozitív egész szám összege:*

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ azaz}$$

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

III. Röviden szólni kell még a matematikában gyakran alkalmazott *indirekt* bizonyításról. Ennél a bizonyítási módnál a tétel ellenkezőjéből indulunk ki, és kimutatjuk, hogy az nem igaz, vagy ellentmondásban van más, már bizonyított tételekkel. Ebből következik, hogy a tételünk igaz, hiszen nem lehet, hogy egyszerre egy tétel és az ellenkezője is igaz vagy hamis legyen, az adott rendszeren belül. Ennek a módszernek alkalmazását láthatjuk a számelmélet alaptételének bizonyításánál.

Befejezésül még egy megjegyzés: ha a matematikus feladata tételek találása és bizonyítása, akkor a gondolatmenetének a szerkezete a lényeges, amely lehetővé teszi a megoldást, a bizonyítást, és nem azok az objektumok, amelyekre a tétel vonatkozik.

JEGYZETEK

1. *Engels:* Anti-Dühring. MEM. 20. köt. Budapest, 1963, 41. old.
2. U. o.
3. Nyitott kérdés volt egészen a múlt századig a kör négyszögesítésének problémája. Csak ekkor bizonyították be, hogy az euklideszi geometriában ez a szerkesztés nem végezhető el. De ilyen a szögharmadolás problémája is. Csak a XVIII. század végén sikerült tisztázni, hogy ezek a szerkesztések mely esetben végezhetők el.
4. Csak lábjegyzetbe szorítva említjük meg, hogy hasonló problémakör foglalkoztatta az egykori görög filozófusokat is, akik intenzíven kutatták a gondolkodás alapjainak tekinthető legegyszerűbb fogalmakat, következtetéseket. Vagy akár arra gondolunk, hogy keresik a világ „arché"-ját, amelyre mint végső építőkőre, minden visszavezethető. Nem látszik alaptalannak az a feltevés, hogy a matematikában az axiómák bevezetése kapcsolatban állt a filozófiának az „arché"-ra irányuló kutatásával.
5. Általánosan elfogadott megállapítás, hogy Pythagorász és a pythagóreusok voltak a deduktív matematika első kimutatható művelői. Példát mutattak arra, hogy a különben csak tapasztalati úton észlelt tényeket vagy összefüggéseket miképpen lehet levezetni, igaznak nyilvánított alapfeltevésekből, egyszerű logikai következtetések segítségével.
6. Részletesen foglalkozik a problémamegoldással *Hársing László:* Tudományelméleti vázlatok című munkájában. (Filozófia időszerű kérdései, 1973/11. sz.)
7. U. o. 12. old.
8. Részletesen elemzi Hársing László idézett műve.
9. A „tisztán" matematikai problémán itt a szűkebb értelemben vett matematikai problémát értjük.

10. *Pólya György:* — A gondolkodás iskolája. (Gondolat Kiadó, 1971.)
— A problémamegoldás iskolája. Tankönyvkiadó, 1967., 1968.
11. *André Rezuv:* Modern matematika — élő matematika.
Gondolat Kiadó, 1973. 44. old.

IRODALOMJEGYZÉK

1. *André Rezuv:* Modern matematika — élő matematika
Gondolat Kiadó, 1973.
2. *Engels:* Anti-Dühring. A természet dialektikája. MEM. 20. k.
Kossuth Kiadó, 1963.
3. *Földesi:* A „megismerhetőség" modern problémái. Kossuth Kiadó 1971.
4. *Hársing László:* A tudományos megismerés és a plauzibilis következtetések logikája. Akadémiai Kiadó, 1971.
5. *Hársing László:* Tudományelméleti vázlatok. A filozófia időszerű kérdései. 11/1973.
6. *Pólya György:* A gondolkodás iskolája. Gondolat, 1971.
7. *Pólya György:* A problémamegoldás iskolája. Tankönyvkiadó, 1967—1968.
8. *A. Rakitov:* A tudományos ismeret anatómiája. Kossuth Kiadó, 1971.