SZÁMOK n-EDIK GYÖKÉNEK FOGALMÁRÓL

JÁROSI ANDRÁS

(Közlésre érkezett: 1973. január 15.)

Bevezetés

Hazánkban a középiskolai oktatási reform során *módosult a valós szám* négyzetgyökének és általában *n-edik gyökének történetileg kialakult* és azóta változatlan, sőt megváltozhatatlannak, elévülhetetlennek vélt *fogalma.* A módosítás lényege — mint ismeretes — az, hogy megszüntette a szám n-edik gyökének többértelműségét, s ezzel egyértelművé tette a gyökvonás műveletét a valós számok halmazában. Az új gyökfogalom bevezetésekor a komplex számokat figyelmen kívül hagyták. Értesülésünk van hasonló külföldi próbálkozásokról is.

A fogalomváltozás a matematika oktatásában nem ment végbe zökkenőmentesen, s ez várható is volt. Az új fogalom azonban a reméltnél nehezebben honosodik meg iskoláinkban. „A matematika tanítása" c. folyóirat „még mindig a négyzetgyökvonásról" c. cikkének megállapítása szerint az 1970—71. tanévben „még mindig sok a zavaró körülmény, amely szükségessé teszi a címben jelzett téma felelevenítését". Felrója, hogy „még mindig sok az elavult, helytelen fogalomhasználat. A hallgatóknak több mint a fele nem ismeri a négyzetgyök definícióját. Többen... hangsúlyozták a négyzetgyök kétértékűségét". Majd később leszögezi: „A négyzetgyök definiálásának tisztázása helyes és fontos volt, azonban kevésnek bizonyult ez az első radikális lépés. Mindaddig felszínen kell tartanunk a témát, míg fel nem számoltunk minden téves nézetet..."[1]

A módosítás ténye önmagában is arra utal, hogy *a korábbi gyökfogalom nem volt kielégítő.* Vajon a módosítás után a szám n-edik gyökének fogalma tekintetében minden rendben van-e a matematika tudományában, s csupán a tanulók fejében kell rendet teremtenünk? Ha megszüntetjük a tanárok részéről az újtól való esetleges idegenkedést, jobb, hatásosabb módszereket alkalmazunk az oktatásban, s a témát felszínen tartjuk, problémamentes lesz-e a szám n-edik gyökének fogalma? Ha a kérdést mélyebben elemezzük, azt kell mondanunk, hogy *a matematika tudománya a módosítás után is adós maradt az n-edik gyök ellentmondásmentes definíciójával.*

A dolgozatban rámutatok a régi gyökfogalomban rejlő, illetve a módosításból származó ellentmondásokra, majd megkísérlem a meglevő gyökfogalmakat egy általam definiált, általánosabb gyökfogalomnak alárendelve megközelíteni a probléma megoldását, az ellentmondásmentes gyökfogalom kialakítását.

A gyökvonás és az n-edik gyök történetileg kialakult fogalma

A gyökvonás a hatványozás inverz műveleteként alakult ki a matematikában. Az

$$x^n = a \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{1}$$

egyenlet megoldását, több megoldás létezése esetén megoldásait tekintették az a szám n-edik gyökének, illetve gyökeinek az elmúlt évtizedig nemzetközileg is egységesen és általánosan. A legtöbb országban tudomásom szerint jelenleg is így értelmezik egy szám n-edik gyökét, s értesülésem szerint hazánk felsőfokú oktatási intézményeiben is többnyire ez a helyzet.

A definíciók megfogalmazása miatt idézek néhány értelmezést: „Valamely a szám n-edik gyöke alatt azt a b számot értjük, amelyre $b^n = a$"[2]. „Valamely $z = r(\cos\varphi + i.\ \sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökén olyan w komplex számot értünk, amelyre $w^n = z$ teljesül. Más szóval az $x^n = z$ egyenlet megoldásait nevezzük a z szám n-edik gyökeinek. Jele $w = \sqrt[n]{z}$. Ez a jel, mint látni fogjuk, többértékű."[3] „Feladatunk, hogy az $a = r\ (\cos\varphi + i.\ \sin\varphi)$ alakú számból n-edik gyököt vonjunk. Tegyük fel, hogy ez lehetséges, és hogy a gyökvonás eredménye $\varrho\,(\cos\vartheta + i.\ \sin\vartheta)$, azaz

$$[\varrho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)."$$

Majd megállapítja, hogy *„k bármely pozitív vagy negatív egész értéke mellett"*

$$\sqrt[n]{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\,k\pi}{n} + i.\ \sin\frac{\varphi + 2\,k\pi}{n}\right) \tag{4}$$

A komplex számokra megadott gyökfogalmat idéztük, mivel ez a számfogalom valamennyi korábbi számfogalom általánosítása, s a komplex szám n-edik gyökének fogalma a korábbi számfogalmakra kialakult gyökfogalom általánosításaként jött létre. A definíciók megfogalmazásában érezhető, hogy a többértelmű gyök az egyértelmű gyöknek az általánosítása. Több (páronként különböző) gyök létezése esetén is „gyököt" és nem „gyököket" vonunk. A különböző gyököket ugyanazzal az $\sqrt[n]{z}$ szimbólummal jelölték, s ez a jelölésmód mindmáig megmaradt. A problémát éppen a jelölés okozza, emiatt ellentmondás lép fel a fogalomban. Tekintsük pl. az a valós szám n-edik gyökét páros n esetén. Ennek jelölésére általánosan elfogadott volt az $\sqrt[n]{a} = \pm b$ forma. Nyilvánvaló, hogy ha $\sqrt[n]{a} = b$ és $\sqrt[n]{a} = -b$, akkor $b = -b = 0$. Következésképpen az $x^n = a$ egyenlet megoldása tetszőleges pozitív a esetén 0, így $0^n = 0 = a$ és $a \neq 0$ egyidejűleg fennállna. Ugyanezzel az okoskodással kaphatjuk, hogy egy zérustól különböző komplex szám valamennyi, egymástól páronként különböző gyöke zérussal egyenlő. A későbbiek miatt megjegyezzük, hogy a fogalomban jelentkező ellentmondás nem a fogalom tartalmából, hanem a jelölésből, tehát a formájából adódik, azonban a tartalom és a forma dialektikus egysége folytán a fogalom egészére kihat.

Az iskolai oktatásban sok problémát okozott a gyök ellentmondásos jelölése, mindenekelőtt a gyököket tartalmazó kifejezések azonos átalakításainál[5]. Ismeretes, hogy a nem negatív valós számok halmazában, valamint ennek részhalmazaiban, ahol a gyök egyértelmű, érvényesek a következő azonosságok:

$$\text{(a)} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\text{(2)} \qquad \text{(b)} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (b \neq 0)$$

$$\text{(c)} \qquad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ezeknek a bizonyítása a definíció alapján egyszerűen úgy történik, hogy a jobb oldali kifejezéseket n-edik hatványra emeljük, és eredményül rendre a bal oldalon levő gyökök alatti számokat kapjuk. Többértelmű gyök esetén ez a bizonyítás hamis lenne, mert az $a^n = b^n$ egyenlőségből nem következik az $a = b$ egyenlőség. Pl. $(-5)^2 = 5^2$, de $-5 \neq 5$.

A gyökök ellentmondásos jelölése egyéb problémákat is okoz[6]. Emiatt nem tekinthető függvénynek az $y = \sqrt[n]{x}$ leképezés páros gyökkitevőre. A trigonometrikus függvények értékeinek kifejezésében nem engedhető meg a négyzetgyök jelének alkalmazása, ha az kétértékű. Például: $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ nem igaz, ha $\sqrt{3}$ kétértékű.

Az ismertetett ellentmondás tehát önmagában és következményeiben is sürgeti a jelölés többértékűségének a megszüntetését. Csodálkoznunk kell azon, hogy a többértékű gyököknek ez a jelölésmódja ily hosszú ideig fennmaradhatott. Talán azzal lehet magyarázni, hogy a gyökvonás új számfogalomhoz, az irracionális számhoz vezetett, amelynek a tartalmát matematikailag szabatosan megadni a matematikusok számára sokkal fontosabb és izgalmasabb feladatot jelentett, mint a szám n-edik gyökének a fogalmát tisztázni, amelynek tartalma egyébként is világos, és csupán a jelölése okoz problémát. Csak a közelmúltban jelentkezett az igény a gyök fogalmával kapcsolatos ellentmondás megszüntetésére, mégpedig elsősorban oktatási nehézségekből kifolyólag.

A valós szám egyértelmű n-edik gyökének definíciói

Kétféle próbálkozásról van tudomásom. Az egyiket (I. definíció) hazai tankönyv[7] alapján ismertetem, de megtalálható a svédeknél is[10], a másikat (II. definíció) egy német nyelvű tankönyvből idézem[8].

I. definíció

„Négyzetgyök a-nak nevezzük és $\sqrt{a}$-val jelöljük azt a nem negatív számot, amelynek négyzete a.” „Tehát $\sqrt{a} \geqq 0$ és $(\sqrt{a})^2 = a$.” (17. old.).

Látható, hogy a tankönyv a 0 négyzetgyökét a definíció értelmében tekinti 0-nak.

Az n-edik gyök fogalmát így adja meg: *„$a > 0$ esetben $\sqrt[n]{a}$ azt a pozitív számot jelenti, amelynek n-edik hatványa a,* azaz $(\sqrt[n]{a})^n = a$.” (250. oldal.)

Páratlan n gyökkitevőre a tankönyv a következő kiegészítő megjegyzést teszi: „Páratlan gyökkitevő esetében a gyök definíciójából elhagyható az a kikötés, hogy a gyök alatti szám pozitív legyen. Páratlan gyökkitevő esetében, ha a gyök alatti szám negatív, a gyök értéke is negatív.” Példaként hozza, hogy az $x^5 = -32$ egyenlet megoldása -2, ezért $\sqrt[5]{-32} = -2$. A 0 n-edik gyökét pedig külön adja meg: „Megállapodás szerint a 0 tetszőleges pozitív egész kitevőjű gyöke 0.” (251, 252. oldal.)

II. definíció

„Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl a ist die positive Zahl b, deren Quadrat gleich a ist.” (176. oldal.)

„Bei positiven Zahlen ist das Radizieren die Umkehrung des Quadrierens.” (177. oldal.)

„Die Kubikwurzel (dritte Wurzel) aus einer positiven Zahl a ist die positive Zahl, deren dritte Potenz gleich a ist. Man schreibt dafür: $\sqrt[3]{a}$ (lies: 3. Wurzel aus a). Ist $a = 0$, so schreibt man $\sqrt[3]{0} = 0$. **Für negative** a **ist** $\sqrt[3]{a}$ **nicht definiert.**” (253. oldal.) „Das Zeichen $\sqrt[3]{-8}$ verwenden wir nicht.” (255. oldal.)

„Die n-te Wurzel aus einer positiven Zahl a ist die positive Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist. Man schreibt dafür $\sqrt[n]{a}$. Dabei ist n = = 2, 3, 4, ... Für $a = 0$ ist $\sqrt[n]{0} = 0$. F ü r n e g a t i v e a i s t $\sqrt[n]{a}$ n i c h t d e f i n i e r t." (256. oldal.)

Elnézést kérek az olvasótól a sok idézetért, de legyen szabad még az utolsó definícióhoz fűzött megjegyzést is szó szerint hoznom, hogy világosan láthassuk a törekvést és a módszert a gyök fogalmának megalkotásakor, illetve módosításakor: „Ist in $y = x^n$ die Hochzahl n und der Potenzwert $y > 0$ gegeben und ist $x > 0$, so erhält man die Grundzahl x durch Radizieren: $x = \sqrt[n]{y}$. Wie auf S. 177 sagen wir: »*Das Radizieren ist die Umkehrung des Potenzierens, also eine Rechenart 3. Stufe*«." (258. oldal.)

Elemezve a definíciókat, mindenekelőtt el kell ismernünk, hogy elérték a kitűzött célt: a valós számok halmazában egyértelművé tették a szám n-edik gyökét és a gyökvonás műveletét.

A két definíció között azonban jelentős eltérés mutatkozik a negatív számok gyökeinek az értelmezésében. Az I. definíció a valós számok halmazában a régi értelemben vett gyökök közül páros n gyökkitevőre kizárta, páratlanra pedig lényegében meghagyta a negatív gyököket. A formális definíció ugyan nem tartalmazza a negatív számok páratlan kitevőjű gyökeit, de a definíciót követő magyarázó szövegből félreérthetetlenül következik, hogy páratlan n esetén a negatív számok n-edik gyökét a régi módon értelmezi. A II. definíció ezzel szemben negatív valós számokra semmilyen n esetében nem értelmezi az n-edik gyököt. Külön hangsúlyozza, hogy negatív a-ra $\sqrt[n]{a}$ nincs definiálva, s nem alkalmazza a $\sqrt[3]{-8}$ típusú jelet, vagyis az $\sqrt[n]{-a}$ jelet pozitív a esetében. Az $x^n = -a$ ($a > 0$) egyenlet megoldását sem $\sqrt[n]{-a}$-val, hanem $-\sqrt[n]{a}$-val jelöli.

Az előbbi eltérés ellenére a két definíciónak van egy igen lényeges közös vonása, hogy tudniillik a gyökvonás a nem negatív valós számok halmazán művelet, éspedig unér művelet, amely a hatványozás inverz műveletének tekinthető. De semmiképpen sem tekinthető az így definiált gyökvonás az összes valós számok halmazában értelmezett műveletnek — hiszen ebben a halmazban csak parciális művelet volna —, s így még kevésbé beszélhetünk annak inverz voltáról. Igaz, hogy a II. definíció a pozitív számok négyzetgyökének, majd n-edik gyökének az értelmezésekor egyaránt hangsúlyozza: a gyökvonás a pozitív valós számok halmazában a hatványozás megfordítása. A valós számok teljes halmazára azonban nem terjeszthető ki ez a megállapítás, hiszen negatív valós számokra az n-edik gyököt a definíció nem értelmezte. Végeredményben tehát mindkét definícióval megadott gyökvonás a valós számok teljes halmazában elveszti a nem negatív valós számok halmazában meglevő inverz művelet jellegét.

Az I. és II. definíció által végrehajtott gyökfogalom-módosítást a fogalom tartalmának és formájának vonatkozásában a következőképpen értékelhetjük:

A formában (jelölésben) meglevő ellentmondást mindkét definíció olyan módon szüntette meg, hogy az ellentmondásos forma (jelölés) hibájának kiküszöbölése helyett a fogalom tartalmát módosította. A helyes tartalmat vetette el az ellentmondásos jelölés helyett. Az történt ugyanis, hogy a valós számok halmazában mindkét definíció tartalmilag új fogalmat vezetett be, a régi fogalom alakjában, a régi fogalom nevével és jelével ellátva. Ezzel a valós számok halmazában megszűnt a régi gyökfogalom. Azonban a komplex számok halmazában változatlan maradt az n-edik gyök fogalma tartalmában és formájában is, hiszen a módosítások a komplex számok halmazát figyelmen kívül hagyták. Ennélfogva a valós számok régi n-edik gyökfogalma mégsem szűnt meg, következésképpen létezik is meg nem is. Az új definíciók tehát megszüntettek egy ellentmondást a valós számok halmazában, s ugyanakkor létrehoztak egy újabb ellentmondást a komplex számok halmazában, s most már nem formai, hanem tartalmi ellentmondást. Lássuk ezt két egyszerű példán:

1. A 25 nyilvánvalóan valós szám is és komplex szám is. Ha csak valós számnak tekintjük, akkor egyetlen négyzetgyöke van: +5. Ha komplex számnak tekintjük, akkor két négyzetgyöke van, +5 és —5, és mindkettő valós. Kérdés: mit tekintsünk a 25 valós komplex szám négyzetgyökének?

2. A —8-nak mint valós számnak nincs valós köbgyöke a II. deníció szerint. A —8-nak mint komplex számnak van valós köbgyöke. A —8-nak mint valós komplex számnak van-e valós köbgyöke?

Az ellentmondás nyilvánvaló. Az okát röviden úgy fejezhetjük ki, hogy a fogalomalkotásban nem érvényesül a Hankel-féle permanenciaelv, amelyet első megfogalmazásában így találunk az irodalomban[9]: „Die rein formale Mathematik ... besteht ... nicht in einer Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik; sie ist eine durchaus neue Wissenschaft, deren Regeln durch letzere nicht bewiesen, sondern exemplifizirt werden, indem *die formalen Operationen, auf actuelle Zahlen angewandt, dieselben Resultate geben, als die anschaulichen Operationen der gemeinen Arithmetik.*" (12. o.) Az azonosságokra vonatkozóan pedig ezt mondja: „...das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze... besteht darin: Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der Arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen." (11. o.)

Az elmondottakból nyilvánvalóan következik, hogy a valós számok halmazában bevezetett új egyértelmű gyökfogalom egyik változata sem fogadható el mindaddig, amíg a kimutatott ellentmondásokhoz vezetnek. Szükség van tehát a gyökfogalom további kimunkálásra.

A teljes n-edik gyök fogalma

Abból indulunk ki, hogy a történetileg kialakult eredeti gyökfogalom tartalmilag helyes és félreérthetetlen volt, tehát a tartalmát nem szabad elvetni, hanem bele kell építeni az új gyökfogalomba. Módosítani kell viszont ellentmondásos formáját. A megváltozott formához természetesen új módon kapcsolódik a régi tartalom, s így a fogalom is megváltozik a forma módosításakor.

Az új, ellentmondásmentes gyökfogalom kialakításához és definiálásához az alapgondolatot az adta, hogy a gyökvonás (2) azonosságainak többértelmű gyök esetében is van értelmük, ha az azonosságokat a lehetséges gyökök halmazaira vonatkoztatjuk. Ugyanis azt találjuk, s később be is bizonyítjuk, hogy adott a és b számokra a (2) azonosságok mindegyikében a bal- és jobboldali kifejezések lehetséges számértékeit kiszámítva a bal oldalon kapott páronként különböző számok halmaza egyenlő a jobb oldalon kapott páronként különböző számok halmazával mind valós, mind komplex számokra. Pl. a $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ azonosságban legyen $a=4$ és $b=25$, akkor a baloldali gyök lehetséges számértékei 10 és —10, és ugyanezek lesznek a jobboldali kifejezés lehetséges, páronként különböző számértékei is. Önként kínálkozik az a gondolat, hogy célszerű lenne a szám n-edik gyökének új fogalmaként az (1) egyenlet lehetséges, páronként különböző megoldásainak a halmazát tekinteni.

Ennek alapján vezetjük be a következő definíciót:

Az

$$x^n = a$$

egyenlet összes (páronként különböző) megoldásainak a halmazát az a szám teljes n-edik gyökének nevezzük és $\sqrt[(n)]{a}$*-val jelöljük.*

Más szavakkal tehát:

Egy a szám teljes n-edik gyökén értjük és $\sqrt[(n)]{a}$*-val jelöljük azoknak a páronként különböző komplex számoknak a halmazát, amelyeknek n-edik hatványa a:*

$$\sqrt[(n)]{a} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x^n = a;\ n \text{ természetes szám}\} \tag{3}$$

Az n természetes számot gyökkitevőnek, az a számot gyök alatti számnak, a halmaz x elemeit pedig az a szám n-edik gyökeinek nevezzük. (Az n-edik gyökök egyenkénti jelölésére nem definiálunk külön jeleket, ezeket esetenként tetszés szerint jelöljük, ha erre szükség van.)

Bevezetjük továbbá a következő fogalmat:

Az a szám teljes n-edik gyökének azt az elemét (tehát az a számnak azt az n-edik gyökét), amely valós és amelynek előjele megegyezik az a szám előjelével, az a szám n-edik főgyökének nevezzük. A jele: $\sqrt[n]{a}$.

Tehát:

(4) $$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} b, \text{ ha } b^n = a \text{ és sgn } b = \text{sgn } a$$

A definíció szerint speciálisan $\sqrt[n]{0} = 0$, mivel a 0 előjele tetszőlegesen választható.

A bevezetett fogalmakkal kapcsolatban megjegyezzük a következőket:

a) A teljes n-edik gyök fogalmához:

1. A teljes n-edik gyök a korábbi (eredeti) gyökfogalom általánosítása. Mint halmaz elemekként tartalmazza a régi értelemben vett és tartalmilag változatlanul meghagyott, de korábbi (ellentmondásos) jelüktől megfosztott n-edik gyököket.

2. Az új $\sqrt[(n)]{a}$ fogalom sohasem egyenlő a régi (eredeti) $\sqrt[n]{a}$ gyökfogalommal, mert az utóbbi mindig számot ill. számokat jelent, az előbbi pedig számoknak egy jói meghatározott halmaza, mégpedig az alapul vett számhalmaztól és abban az (1) egyenlet megoldásainak számától függően az üres halmaz, egyelemű halmaz, ill. többelemű halmaz. Tehát bármely számnak létezik bármely n-re teljes n-edik gyöke.

3. A teljes négyzetgyök jelölésében a félreértések elkerülése végett a 2 gyökkitevőt mindig ki kell írni: $\sqrt[(2)]{a}$.

b) A főgyök fogalmához:

1. A főgyök a korábbi (eredeti) többértelmű gyökfogalom specializálása. Ezért a neve természetes, logikusan alkalmazkodik a történetileg kialakult eredeti gyökfogalomhoz, s a nem negatív valós számok halmazában azonos vele. Nevének kiejtése nem hosszú, s ha most szokatlan is, könnyen meg lehet szokni.

2. A főgyök fogalma tartalmában és jelében megegyezik a középiskoláinkban jelenleg érvényes (az előzőkben az I. definícióval megadott) gyökfogalommal, csak a neve más. A definíciója azonban egyszerűbb, mint a középiskoláinkban jelenleg használatos definíció.

3. A főgyökökre érvényesek a (2) azonosságok, ez következik az előbbi 2. megjegyzésből. Az azonosságok közvetlen belátása most a lehető legegyszerűbb, mivel az előjel a főgyök definíciója folytán bármelyik azonosság mindkét oldalán ugyanaz.

4. Javasoljuk speciálisan $\sqrt{a}$-ra a főnégyzetgyök, $\sqrt[3]{a}$-ra a főköbgyök elnevezés használatát

Műveletek teljes n-edik gyökökkel

Egyenlő gyökkitevőjű teljes n-edik gyökökre definiáljuk a szorzást és az osztást, definiáljuk továbbá a teljes n-edik gyök pozitív egész kitevőjű hatványát.

Az a és b számok teljes n-edik gyökeinek $\sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b}$ *szorzatán, illetve* $\dfrac{\sqrt[(n)]{a}}{\sqrt[(n)]{b}}$ *(b ≠ 0) hányadosán értjük azoknak a páronként különböző xy szorzatoknak, illetve* $\dfrac{x}{y}$ *(y ≠ 0) hányadosoknak a halmazát, amelyekre* $x\in\sqrt[(n)]{a}$ *és* $y\in\sqrt[(n)]{b}$.

Az a szám teljes n-edik gyökének pozitív egész m kitevőjű m-edik hatványán értjük az $\sqrt[(n)]{a}$ *elemeinek m-edik, páronként különböző hatványaiból álló halmazt.*

Matematikai jelekkel:

$$\text{(a)}\quad \sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b}\overset{\text{def}}{=}\{xy \mid x\in\sqrt[(n)]{a} \text{ és } y\in\sqrt[(n)]{b}\}$$

$$\text{(4)}\qquad\text{(b)}\quad \frac{\sqrt[(n)]{a}}{\sqrt[(n)]{b}}\overset{\text{def}}{=}\left\{\frac{x}{y}\,\middle|\, x\in\sqrt[(n)]{a} \text{ és } y\in\sqrt[(n)]{b};\ b\neq 0\right\}$$

$$\text{(c)}\quad (\sqrt[(n)]{a})^{m}\overset{\text{def}}{=}\{x^{m} \mid x\in\sqrt[(n)]{a}\}$$

Érvényesek a következő azonosságok:

$$\text{(a)}\quad \sqrt[(n)]{ab}=\sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b}$$

$$\text{(5)}\qquad\text{(b)}\quad \sqrt[(n)]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[(n)]{a}}{\sqrt[(n)]{b}}\qquad (b\neq 0)$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt[(n)]{a^{m}}=(\sqrt[(n)]{a})^{m}\qquad \text{ha } (m, n)=1$$

Az azonosságok bizonyítására megmutatjuk, hogy minden azonosságban a bal és a jobb oldalon levő halmazok egymásnak kölcsönösen részhalmazai. A bizonyításban felhasználjuk a komplex számok szorzására, osztására, hatványozására és a komplex számok gyökeinek kiszámítására vonatkozó ismert tételeket. A 0-tól különböző $a = r\,(\cos\alpha + \text{i}.\sin\alpha)$ komplex szám n-edik gyökeit most is felírhatjuk

$$\text{(6)}\qquad w_{k}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+\text{i}.\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

alakban, ahol $\sqrt[n]{r}$ az a komplex szám r abszolút értékének n-edik főgyöke, k tetszőleges egész szám, és a $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ értékek mellett előállnak az a szám összes páronként különböző n-edik gyökei.

Legyen az (5) azonosságokban

$$a = r\,(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$$

$$b = s\,(\cos\beta + i.\sin\beta)$$

Az (a) azonosság bizonyítása:

Ha $x \in \sqrt[(n)]{ab}$, akkor a (3) definíció alapján

$$x^n = ab = rs\,[\cos(\alpha+\beta) + i.\sin(\alpha+\beta)].$$

Ezért x a következő alakban írható:

$$x = \sqrt[n]{rs}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+2k\pi}{n} + i.\sin\frac{\alpha+\beta+2k\pi}{n}\right),$$

ahol k valamilyen egész számot jelent. Bevezetve a nyilvánvalóan lehetséges $k = k_1 + k_2$ (k_1 és k_2 egész számok) felbontást, x abszolút értékét, ill. argumentumát a következő alakban írhatjuk:

$$|x| = \sqrt[n]{rs} = \sqrt[n]{r}\cdot\sqrt[n]{s}$$

illetve

$$\arg x = \frac{\alpha+\beta+2k\pi}{n} = \frac{\alpha+2k_1\pi}{n} + \frac{\beta+2k_2\pi}{n}$$

Ezért $x \in \sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b}$, következésképpen

(7) $$\sqrt[(n)]{ab} \subset \sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b}$$

Másrészt, ha $z \in \sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b}$, akkor a (4) definíció jelölését alkalmazva

$$z^n = (xy)^n = x^n y^n = ab$$

folytán $z \in \sqrt[(n)]{ab}$, s ezért

(8) $$\sqrt[(n)]{a}\cdot\sqrt[(n)]{b} \subseteq \sqrt[(n)]{ab}$$

A (7) és (8) relációkból következik az (a) azonosság érvényessége.

A (b) azonosság bizonyítása az (a) bizonyításához hasonlóan végezhető, csak szorzás helyett osztást, az argumentumok összeadása helyett azok megfelelő sorrendben vett kivonását kell végezni, s a $k = k_1 + k_2$ felbontás helyett most a $k = k_1 - k_2$ felbontást kell alkalmazni, ami nyilvánvalóan lehetséges.

A (c) azonosság bizonyítása:

Ha $x \in \overset{(n)}{\sqrt{a^m}}$, akkor írható:

$$x = \sqrt[n]{r^m}\left(\cos\frac{ma + 2k\pi}{n} + i.\sin\frac{ma + 2k\pi}{n}\right),$$

ahol k az x előállításához szóba jöhető egész számok egyike. Innen

$$|x| = \sqrt[n]{r^m} = (\sqrt[n]{r})^m$$

és

$$\arg x = \frac{ma + 2k\pi}{n} = \frac{m(a + 2k_1\pi)}{n} + 2k_2\pi.$$

Itt a k egész számot $k = m \cdot k_1 + n \cdot k_2$ (k_1 és k_2 alkalmas egész számok) alakban állítottuk elő, ez $(m, n) = 1$ miatt mindig lehetséges. Tehát $x \in (\overset{(n)}{\sqrt{a}})^m$, ennélfogva

(9) $$\overset{(n)}{\sqrt{a^m}} \subset (\overset{(n)}{\sqrt{a}})^m.$$

Ha pedig $z \in (\overset{(n)}{\sqrt{a}})^m$, akkor írható:

$$z = (\sqrt[n]{r})^m\left(\cos\frac{m(a + 2k\pi)}{n} + i.\sin\frac{m(a + 2k\pi)}{n}\right).$$

Ezért

$$|z| = (\sqrt[n]{r})^m = \sqrt[n]{r^m}$$

és

$$\arg z = \frac{m(a + 2k\pi)}{n} = \frac{ma + 2k'\pi}{n},$$

ahol $k' = mk$. Tehát $z \in \overset{(n)}{\sqrt{a^m}}$, s ebből következik, hogy

(10) $$(\overset{(n)}{\sqrt{a}})^m \subseteq \overset{(n)}{\sqrt{a^m}}.$$

A (9) és (10) relációk a (c) azonosság érvényességét bizonyítják.

Összefoglalás

A dolgozat mondanivalóját a következőkben lehet összegezni:

A szám n-edik gyökének történelmileg kialakult fogalma a jelölés többértékűsége miatt egészen a legutóbbi időkig ellentmondásos volt.

Ez a körülmény elsősorban az oktatásban okozott problémát, de a matematika tudománya számára sem tartható fenn ellentmondásos fogalom. Az egyértelmű gyök definiálására eddig végzett próbálkozások megszüntették ugyan a régi ellentmondást, de létrehoztak egy még súlyosabbat. A dolgozat rámutat a régi és az új ellentmondásra, majd a megoldás útját keresendő megad a komplex számok halmazában egy újabb n-edik gyökfogalmat.

A dolgozat definiálja a szám teljes n-edik gyökét, mint az $x^n = a$ egyenlet páronként különböző megoldásainak halmazát, amelyet az $\sqrt[(n)]{a}$ szimbólummal jelöli. Az $\sqrt[(n)]{a}$ elemeit továbbra is az a szám n-edik gyökeinek nevezi, fenntartva ezzel a matematika széles körű irodalmában elterjedt korábbi elnevezést, de elvetve annak ellentmondásos jelölését.

A dolgozat definiálja a szám n-edik főgyökének fogalmát is. Egy szám n-edik főgyökének nevezi a számnak azt a valós n-edik gyökét, amelynek előjele megegyezik a szám (a gyök alatti szám) előjelével. Az a szám n-edik főgyökét a régi $\sqrt[n]{a}$ szimbólummal jelöli. A főgyök fogalma tartalmában és jelölésében megegyezik a középiskoláinkban jelenleg elfogadott n-edik gyökkel, csak a neve más. A nevét azért kellett megváltoztatni, hogy a gyökfogalom körül megszüntessen mindenféle zavart és homályt.

A dolgozat megmutatja, hogy a főgyökökre érvényes ismert azonosságok a teljes n-edik gyökökre is igazak.

A két új gyökfogalom egyidejűleg bevezetve alkalmas arra, hogy megszüntesse a gyökvonás körüli ellentmondásokat, problémákat.

Az elmondottak egyben sürgetik a matematikának halmazelméleti alapon való oktatását is

IRODALOM

[1] *Bognár Stefánia.* Még mindig a négyzetgyökvonásról. A matematika tanítása, 1971. XVIII. évf. 5. szám, 152—153.

[2] *R. Courant—H. Hobbins:* Mi a matematika? Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1966, 115.

[3] *Dr. Szendrei János:* Algebra és számelmélet. Főiskolai jegyzet. (Kézirat.) 7. változatlan utánnyomás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. 186.

[4] *A. G. Kuros:* Felsőbb algebra. Tankönyvkiadó. Budapest, 1967. 133—134.

[5] *V. M. Bragyisz:* A középiskolai matematikatanítás módszertana. Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951, 111—113.

[6] *Horvay—Pálmay:* Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához. Tankönyvkiadó, Budapest, 10.

[7] *Horvay—Pálmay:* Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztálya számára. Tankönyvkiadó, Budapest.

[8] *Lambacher—Schweizer:* Algebra 2. Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1967.

[9] *Dr. Hermann Hankel:* Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig, Leopold Voss, 1867.

[10] Algebra för gymnasiet del II Försökstext, A 10—12 del II version 2S. Nordiska komittén för modernisering av matematikundervisningen, Stockholm, 1965, 74—78.

ÜBER DEN BEGRIFF DER n-TEN WURZEL VON ZAHLEN

Járosi András

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Begriff der n-ten Wurzel aus einer Zahl a. Es ist bekannt, dass das Symbol $\sqrt[n]{a}$ mehrdeutig ist. Daraus folgt ein Widerspruch im Wurzelbegriff. Für mehrdeutige Wurzeln gelten ferner die Identitäten

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

nicht. Im vorigen Jahrzehnt hat man in Ungarn und auch in anderen Ländern bei der Modernisierung des Mathematikunterrichts in der reellen Zahlenmenge eindeutige Wurzelbegriffe definiert. Zufolge diesen Definitionen lösten sich die vorigen Widersprüche in der Menge der reellen Zahlen auf, aber es enstand ein neuer Widerspruch in der komplexen Zahlenmenge. Die Arbeit zeigt auf die alten und neueren Widersprüche hin. Um alle die bisherigen Widersprüche der Wurzelziehung zu beseitigen, führt der Verfasser nun zwei Begriffe ein. *Unter der vollständigen n-ten Wurzel aus „a" versteht er die Menge aller (paarweise verschiedenen) Zahlen, deren n-te Potenz gleich „a" ist.* Er schreibt dafür $\sqrt[(n)]{a}$. Die Elemente der Menge $\sqrt[(n)]{a}$ werden n-te Wurzeln aus a genannt, für diese definiert man einzeln kein gesondertes Zeichen. *Die n-te Wurzel aus „a", die reell ist, und deren Vorzeichen mit dem der Zahl „a" übereinstimmt, wird* vom Verfasser *als n-te Hauptwurzel aus „a" genannt.* Er schreibt dafür das alte Symbol $\sqrt[n]{a}$. In der Arbeit wird es zuletzt bewiesen, dass die obigen, für die Hauptwurzeln gültigen Identitäten auch für die vollständigen n-ten Wurzeln [in der dritten Identität mit der Bedingung $(m, n) = 1$] gültig sind. Führt man die beiden neuen Wurzelbegriffe gleichzeitig ein, so werden sie geeignet, die Widersprüche der Wurzelziehung aufzulösen.

ON THE CONCEPT OF THE n-TH ROOT OF NUMBERS

by András Járosi

This paper deals with the concept of the n-th root of a number „a" As is well-known, the symbol $\sqrt[n]{a}$ is ambiguous. Consequently there is a contradiction in the concept of root. Furthermore the identities

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

are not valid for ambiguous roots. During recent years unambiguous concepts of root have been defined in the positive mass of numbers while modernizing the teaching of mathematics in Hungary as well as in other countries. In consequence of these definitions the former contradictions have been removed, but a new one has arisen in the mass of integers.

The author points out the older and the newer contradictions. In order to eliminate all these contradictions of the extraction of root the paper introduces two concepts. *By the integral n-th root of „a" he means the mass of all (different by pairs) numbers of which the power is equally „a".* It is indicated by $\sqrt[(n)]{a}$. The elements of the mass $\sqrt[(n)]{a}$ will be referred to as the n-th roots of „a" and no special symbol will be used for this purpose. *The n-th root of „a", which is positive and of which the sign is identical with that of the number „a" will be called the main root of „a" by the author.* For this he uses the symbol $\sqrt[n]{a}$. Finally the paper points out that the above identities valid for the main roots are valid also for the integral n-th roots [on condition that $(m, n) = 1$ in the third identity]. Introducing both new concepts of root concurrently it becomes possible to eliminate the contradictions of the extraction of root.