SZEPESSY BÁLINT

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ V.
(A VÉGES RENDŰ CIKLUSOKRÓL)

ABSTRACT: *(Remarks on iteration of real functions V.) A real valued function* f(x), *defined on the closed interval* [a,b], *is called iterational basic function if*

(i) f(x) *is a continuous function at every inside points of the interval* [a,b]; *furthermore* f(x) *is continuous on the right and on the left at point a and b respectively;*

(ii) f(x) *maps the interval* [a,b] *onto itself;*

(iii) *there is no subinterval of the interval* [a,b] *where* f(x) *is a constant function;*

For $i=0,1,2,\dots$ *the function* $f_i(x)$, *defined by* $f_0(x)=x$ *and* $f_i(x)=f\left[f_{i-1}(x)\right]$ *for* $i>0$; *is called* i^{th} *iterated function of* f(x). *We say a real number c is a fix point of* f(x) *of order one if* $f(c)=c$, *furthermore c is a fix point of order r if* $f_r(c)=c$ *but* $f_n(c)\neq c$ *for* $n=1,2,\dots,r-1$. *If c is a fix point of* f(x) *of order r, then the numbers* $f(c)=c_1$, $f\left[c_1\right]=c_2,\dots,f\left[c_{r-1}\right]=c$ *are also fix points of order r and the fix points* $c_1,c_2,\dots,c$ *give a cycle of order r.*

In some earlier papers we gave conditions for f(x) *if it has no fix point of order greater than two or*

four, furthermore we have studied iterational basic functions for which the orders of the cycles are unbounded (see SZEPESSY [9],[10],[11], and [12]).

In this paper we investigate iterational basic functions for which we have cycles of finitel order.

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ $(a<b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékü valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x)=$ constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon.

Az $f_0(x)=x$; $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f(f(x))$, ..., $f_n(x)=f\left[f_{n-1}(x)\right]$... függvényeket az $f(x)$ függvény nulladik, első, második, ..., n-edik (n-edrendü),... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az $f_n(x)$ $(n=2,3,...)$ függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal. (Ezt az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval könnyen bizonyithatjuk.)

Teljesülnek az $f_{n+m}(x)=f_n\left[f_m(x)\right]=f_m\left[f_n(x)\right]$ azonosságok is. Ha $[c,d]$ $(c<d)$ az $[a,b]$ szakasz egy részszakasza, akkor

pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele $[c,d]_1$. A $[c,d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c,d]_n=\left[[c,d]_{n-1}\right]_1$ intervallumot értjük.

Ha $f(c)=c$, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c)\neq c$ $n=1,2,3,\dots,r-1$ esetén, de $f_r(c)=c$; akkor a c pont az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja.

Ekkor, mint ismeretes az $f(c)=c_1$, $f\left[c_1\right]=c_2,\dots,f\left[c_{r-1}\right]=c$ pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok, s egy r-edrendű ciklust alkotnak.

Az első iterációelméleti rendszerező dolgozatok BARNA BÉLÁ-tól jelentek meg (lásd [1], [2], [3] és [4]). Azóta - dolgozatai kapcsán is - megnövekedett azok száma, akik iterációelméleti kutatásokat folytatnak, s egyre több eddig még nyitott kérdést tisztáznak.

Előbbi dolgozatokban ([9],[11]) azt a kérdést vizsgáltuk, hogy milyen iterációs alapfüggvény esetén nem lehet a fixpontok (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni. Bebizonyitottuk, hogy

1. Ha az $[a,b]$ szakaszban $f(x)$ az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus. Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek a tetszőleges magasrendű ciklus létezéséhez. Kiderült ugyanis, hogy

2. Ha $a\leq c<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(c)=c$, $f(d)=b$, továbbá van a $[d,b]$ szakasznak olyan részszakasza, amelyet $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n-edrendű fixpontja.

Ezeknek a tételeknek az elégséges volta miatt kezdtük vizsgálni, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehet a ciklusok rendszámára felső korlátot adni ([10],[12]). Az említett dolgozatokban az alapfüggvényre olyan további feltételeket adtunk meg, amelyek mellett csupán első, másod, vagy negyedrendü fixpontok lehetnek.

Bebizonyitottuk egyebek mellett, hogy

3. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(a)=a$, $f(d)=b$, $f(b)\geq d$ és $x\in[a,d]$ esetén $x<f(x)<b$ valamint $f(x)$ a $[d,b]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a;b]$ szakaszban csak első és másodrendü fixpontok lehetnek.

Ehhez a tételhez analóg a következő állitás

4. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(b)=b$, $f(d)=a$, $f(a)\leq d$ relációk teljesülnek és $x\in[d,b]$ esetén $x>f(x)>a$, továbbá $f(x)$ az $[a,d]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban csak első és másodrendü fixpontok lehetnek.

5. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(a)=a$, $f(d)=b$, $f(b)=b_1<d$; $f_2(b)\geq d_{-1}$ $\left(d<d_{-1}<b\right)$ relációk teljesülnek és $a<x<d$ esetén $x<f(x)<b$, valamint $f(x)$ a $[b_1,d]$ szakaszban monoton növekvő, a $[d,b]$ -ben pedig monton csökkenő akkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendü fixpontok lehetnek.

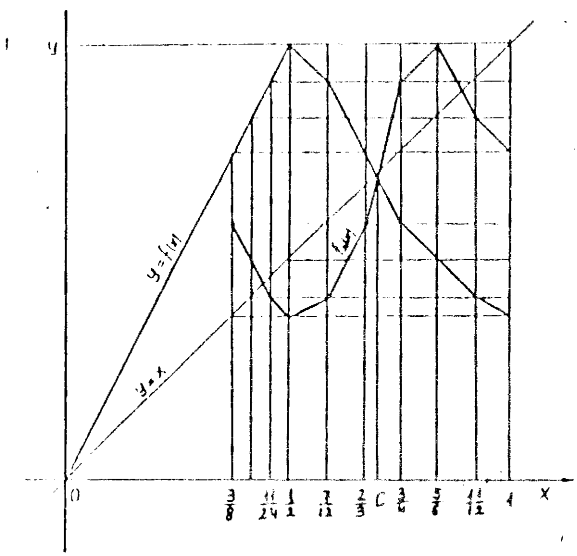
6. Legyen $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(d)=a$; $f(b)=b$; $f(a)>d$; $f_2(a)\leq d_{-1}$ $\left(a<d_{-1}<d\right)$ és $d<x<b$ esetén $a<f(x)<x$ valamint $f(x)$ az $[a,d]$ szakaszban monoton csökkenő, a $[d;a_1]$ szakaszban monoton növekvő. Ekkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendü fixpontok lehetnek.

Ebben a dolgozatban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek további véges ciklusok.

2. A véges rendü ciklusokról

Legyen a [0,1] szakaszban értelmezett iterációs alapfüggvény az

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ; \quad \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -x+\frac{3}{2} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{12} \\ -2x+\frac{25}{12} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{7}{12} \le x \le \frac{3}{4} \\ -x+\frac{4}{3} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{11}{12} \\ -\frac{x}{2}+\frac{7}{8} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{11}{12} \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{(1. ábra)}$$



1. ábra

Itt a $c'=0$ és $c=\frac{25}{36}$ pontok elsőrendü fixpontok. A $\left[0,\frac{3}{8}\right]$ szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számu pontja van e szakaszban annak megfelelően, hogy az x_0 kezdőpontja a $\left[d_{-(i+1)};\ d_{-i}\right]$ $(i=1,2,\dots)$ szakaszok melyikébe esik. Ezek a szakaszok ugyanis egyszeresen és teljesen lefedik a $\left[0;\frac{3}{8}\right]$ szakaszt; tehát van olyan x_j $(j>i)$ iterált pont, amely a $\left[\frac{3}{8};1\right]$ szakaszban esik. Ezt a szakaszt $f(x)$ önmagára képezi le; vagyis x_j minden iterált pontja ebben a szakaszban marad. Magasabbrendü fixpontok csak ebben a szakaszban léphetnek fel.

Az 1. ábrán megrajzoltuk az $f_2(x)$ iterált függvény képét is a $\left[\frac{3}{8};\ 1\right]$ szakaszban.

Tekintsük a $\left[\frac{3}{8},\ c=\frac{25}{36}\right]$, illetve a $[c,1]$ szakaszban az

$$f_2(x)=\begin{cases} -2x+\frac{4}{3} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{3}{8}\le x\le\frac{11}{24} \\ -x+\frac{7}{8} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{11}{24}\le x\le\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{8} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{12} \\ 2x-\frac{3}{4} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{7}{12}\le x\le\frac{2}{3} \\ 4x-\frac{25}{12} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{2}{3}\le x\le C \end{cases} \quad ;$$

illetve

$$f_2(x)=\begin{cases} 4x-\frac{25}{12} & ;\quad \text{ha} \quad c\le x\le\frac{3}{4} \\ x+\frac{1}{6} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{3}{4}\le x\le\frac{5}{6} \\ -2x+\frac{8}{3} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{5}{6}\le x\le\frac{11}{12} \\ -x+\frac{7}{4} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{11}{12}\le x\le 1 \end{cases}$$

függvényt iterációs alapfüggvénynek. Mivel $f_2(x)$ ezeket a szakaszokat önmagára képezi le és ezekben $f(x)>c$ illetve $f(x)<c$ $(x \neq c)$, ezért elsőrendűnél magasabb rendü páratlan rendszámu fixpontok a szóbanforgó szakaszokban, s igy a $\left[\frac{3}{8};\ 1\right]$ szakaszban nem léphetnek fel.

Mivel a $f_2(x)$-re a $\left[\frac{3}{8};\ c\right]$ szakaszban a bevezetőben is emlitett 6. tétel feltételei teljesülnek, ezért $f_2(x)$-nek ebben a szakaszban legfeljebb negyedrendü fixpontjai lehetnek. A $[c,1]$ szakaszban $f_2(x)$-nek az 5. értelmében szintén legfeljebb negyedrendü fixpontjai lehetnek. A $\left[\frac{3}{8};\ c\right]$ szakaszban pl. az $x_1=\frac{1}{2}$; a $[c,1]$ szakaszban az $x_2=1$ pont $f_2(x)$-nek negyedrendü, s igy $f(x)$-nek nyolcadrendü fixpontjai.

Tehát $f(x)$ iterációs alapfüggvénynek a $[0,1]$ szakaszban csak első, másod, negyed és nyolcadrendü fixpontjai lehetnek.

Ez a példa is arra enged következtetni, hogy teljesül ([10] ill. [12] harmadik illetve első tételeinek), a bevezetőben is emlitett 3. és 5. tételek következő általánositása.

<u>TÉTEL</u>. æ $a<d<b$ és $f(x)$ olyan iterációs alapfüggvény az $[a,b]$ szakaszban, amelyre $f(a)=a$, $f(d)=b$ és létezik olyan n (természetes) szám, amelyre $f_{2^n}(b) \geq d_{-(2^n-1)}$, de $f_{2^i}(b) < d_{-(2^i-1)}$; $(0 \leq i < n)$ teljesül, valamint $a<x<d$ esetén $x<f(x)<b$ és $f(x)$ az $[f(b),d]$ szakaszban monoton növekvő, a $[d,b]$-ben pedig monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb 2^{n+1}-rendü fixpontok lehetnek.

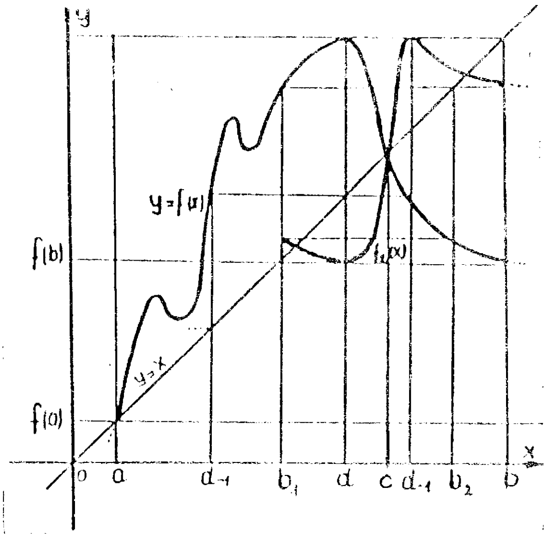
Megjegyzés: amint az már ismeretes $d_{-(2^n-1)} = \max_{x\in[d,b]} \{x\}$; $f_{2^{n-1}}(x) = d_{-(2^{n+1}-1)}$, azaz $d_{-(2^n-1)}$ a legnagyobb abszcisszaérték a $[d,b]$ szakaszban, amelyre $f_{2^{n-1}}(x)$ függvény $d_{-(2^{n-1}-1)}$ értékü.

BIZONYITÁS. Teljes indukcióval: n=0 esetén ([10] 3. tétele); n=1 esetén is (SZEPESSY, 1987 1. tétele); igaz a tétel állitása. Az n=2 esetre egy speciális példát az előzőekben elemeztünk.

Tegyük fel, hogy n=k-1 esetén igaz (indukciós feltevés), bebizonyitjuk, hogy n=k esetén is igaz a tétel állitása.

Mivel az $[a,f(b)]$; $(f(b)<d)$ szakasz bármely x_0 pontjának iteráltjai nagyobbak mint x_0, ezért a szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számu pontja marad ebben a szakaszban, s ez legfeljebb i, ha a kezdőpont a $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ szakaszba esik. A $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ $(i=0,1,2,\ldots)$ szakaszok egyszeresen és teljesen lefedik az $(a,f(b)]$ szakaszt; van tehát olyan x_j $(j>i)$ iterált pont, amelyik az $\left[f(b)=b_1, b\right]$ szakaszba esik. (A lefedés teljessége már (SZEPESSY; 1987) bizonyitást nyert.) A $[b_1,b]$ szakaszt $f(x)$ önmagára képezi le, vagyis x_j minden iterált pontja ebben a szakaszban marad. Tehát magasabbrendü fixpontok is csak ebben a szakaszban lehetnek.

Tekintsük $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek a $[b_1;b]$ szakaszon. (2. ábra)



2. ábra

A $f_2(x)$ függvény a $[b_1, d]$ és a $[d_{-1}, b]$ $(d_{-1} \in [d, b])$ szakaszban monoton csökkenő és egy-egy pontban metszi az átlót, a $[d, d_{-1}]$ szakaszban monoton növekvő, ezért abban lehetnek másodrendü fixpontok.

Ha a $[d, d_{-1}]$ intervallumban vannak másodrendü fixpontok, akkor legyen $e = \sup\limits_{d<x<d_{-1}} x$, $f_2(x)=x$. Az $[f(e)=e_1, e]$ szakaszban az $f_2(x)$-nek ([10] 1. tétel) csak elsőrendü fixpontjai lehetnek, amelyek $f(x)$-nek legfeljebb másodrendü fixpontjai. Az $[e, b]$ szakaszban $f_2(x)$-nek mint iterációs alapfüggvénynek (az indukciós feltevés következtében) legfeljebb 2^k-rendü fixpontjai léphetnek fel, ami azt jelenti, hogy $f(x)$-nek az $[e, b]$ szakaszban legfeljebb 2^{k+1}-rendü fixpontjai lehetnek.

Ezzel bebizonyitottuk, hogy az $[e,b]$ szakaszban igaz a tétel állitása.

A $\left[b_1, e_1\right]$ szakaszban sem lehet 2^{k+1}-rendünél magasabbrendü fixpont; mert ha $\hat{c}$ r-edrendü $r>2^{k+1}$ fixpont - állitásunkkal ellentétben -, akkor $f(\hat{c})=\hat{c}_1$ ($\in [e;b]$) is az, ami az előzőek szerint lehetetlen.

Ha a $\left[d,\ d_{-1}\right]$ szakaszban nincs másodrendü fixpont, akkor a $\left[b_1;\ c\right]$ és a $[c,b]$ szakaszokban (c a $[d,b]$ szakaszban található egyetlen elsőrendü fixpont), a bizonyitás az előzőekhez hasonlóan végezhető el.

Ezzel a bizonyitást befejeztük.

Az eddigi eredmények alapján konstruálhatóak olyan iterációs alapfüggvények, amelyekre a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos, valamint olyanok is, amelyekre a ciklusok rendszáma véges szám.

IRODALOM

[1] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I, Publ. Math. (Debrecen), 7, (1960), 16-40.

[2] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II, Publ. Math. (Debrecen), 13, (1966), 169-172.

[3] B. Barna, Berichtigung zur Arbeit "Über die Iteration reeller Funktionen II." Publ. Math. (Debrecen), 20, (1973), 281-282.

[4] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III, Publ. Math. (Debrecen), 22, (1975), 269-278.

[5] L. Berg, (Rostock) über irregulare Iterations - folgen. Publ. Math. (Debrecen), 17, (1970), 112-115.

[6] A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Grax - Hill Inc.) New York, 1965.

[7] A. Björek - G. Dahlqist, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) München - Wien, 1972.

[8] J. Stoer, Einfürhrung in die numerische Mathematik I. (Springer), Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

[9] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához I. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV. (Eger, 1979), 395-405.

[10] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához II. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVI. (Eger, 1982.), 557-566.

[11] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához III. (A tetszőleges magasrendü ciklusokról) Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVII. (Eger, 1984.), 835-843.

[12] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához IV. (A negyedrendü ciklusokról) Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVIII/11. (Eger, 1987.), 41-53.