OROSZ GYULÁNÉ

KÖZÖS ELEMEK LINEÁRIS REKURZIV SOROZATOKBAN

ABSTRACT: *(Common terms in linear recurrences).*

A second order linear reccursive sequence $G=G\left[A,B,G_0,G_1\right]=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ *is defined by the integers* A,B,G_0 *and* G_1 *and by the recursion* $G_n=A\cdot G_{n-1}+B\cdot G_{n-2}$ $(n>1)$. *We prove two-theorems.*

<u>*Theorem 1*</u>. *Let* D *and* p *be a fixed positive integer and a prime, respectively, such that neither* D *nor* D+p *is perfect square. Further let* a,b,c,d *be non-zero integers satisfying the equations* $a^2-Db^2=1$ *and* $c^2-(D+p)\cdot d^2=1$. *Then the sequences* $M(2a,-1,0,b)$ *and* $N(2c,-1,0,d)$, *apart from the zero initial terms, have at most two common terms if* p=2 *and at most four common terms if* p>2.

<u>*Theorem 2*</u>. *Shows a similar result if* D *is divisible by 8 and* p=16.

Legyen $G=G\left[A,B,G_0,G_1\right]=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ egy másodrendü lineáris rekurziv sorozat, amelyet az A,B,G_0,G_1 egész számokkal és a

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \qquad (n>1)$$

rekurziv formulával definiálunk. Legyenek α és β a sorozat

$$f(x) = x^2-Ax-B$$

karakterisztikus polinomjának gyökei.

A továbbiakban feltesszük, hogy $|\alpha|\geq|\beta|$ és a sorozat nem degenerált, vagyis $AB\neq0$, $G_0^2+G_1^2\neq0$ és α/β nem egységgyök. Ekkor $d = A^2+4B \neq 0$ is következik, hiszen $d=0$ esetén $\alpha/\beta=1$ adódna.

Jól ismert, hogy a sorozat tagjainak explicit előállitása

(1) $$G_n = \frac{q\,\alpha^n - e\,\beta^n}{\alpha-\beta} ,$$

ahol $q = G_1-G_0\beta$ és $e = G_1-G_0\alpha$

Továbbá igazolható, hogy

(2) $$\left|G_n\right| > c_1 \frac{|\alpha|^n}{n^{-c_0}}$$

ha $n>n_0$ ahol c_0 és n_0 a sorozat paramétereitől függő konstansok. Ha $d>0$ akkor α és β valós különböző abszolutértékü számok, $|\alpha| > |\beta|$, és igy (1)-ből $\lim_{n\to\infty}(\beta/\alpha)^n=0$ miatt (2), illetve (2)-nél erősebb becslés is következik. Ha pedig $d<0$, vagyis ha α és β komplex számok, (2) következik C.L. Stewart eredményeiből (lásd például [13], Lemma 6.) (2)-ből következik, hogy minden nem degenerált G sorozatban tetszőleges xvalós szám esetén $|G_n|>x$, ha n elég nagy, igy a sorozatokban minden elem csak véges sok más elemmel lehet egyenlő. Ennél több is igaz. K.K.Kubota [7,8] bebizonyitotta, hogy egy sorozatban minden egész szám legfeljebb négyszer fordulhat elő elemként. Ezt az eredményt F.Beukers [1] javitotta, megmutatva, hogy néhány sorozattól eltekintve minden elem legfeljebb háromszor ismétlődhet a sorozatokban.

Hasonló probléma a különböző sorozatok közös elemeinek vizsgálata. Többen foglalkoztak olyan másodrendü lineáris rekurziv sorozatok közös elemeivel, amelyeket ugyanazok az A,B konstansok definiálnak, de nem ekvivalensek, vagyis az egyik nem csak az indexek egy lineáris transzformációjával különbözik a másiktól. G.Revuz [12] egy általános tételéből következik, hogy ha a G és H a fenti tulajdonságu különböző rekurziv sorozatok közös elemeik száma, vagyis a $G_x=H_y$ egyenlet (x;y) megoldásainak száma véges, vagyis található egy m_0 konstans ugy, hogy $G_x \neq H_y$, ha $x>m_0$. Az m_0 konstans explicit értékére Fibonacci tipusu sorozatok esetén (vagyis az A = B = 1 esetben) M.D. Hirsch [3], tetszőleges, de d>0 feltételt kielégitő sorozatok esetén pedig P.Kiss [5] adott becslést.

Különböző konstansokkal definiált $G\left(A_1,B_1,G_0,G_1\right)$, $H\left(A_2,B_2,H_0,H_1\right)$ sorozatok közös elemeivel, vagyis a $G_x=H_y$ egyenlet megoldásaival is többen foglalkoztak. M. Mignotte [10] és P. Kiss [4] magasabbrendü lineáris rekurziv sorozatokra nyert eredményeiből következik, hogy $A_i^2+4B_i>0$ (i=1,2) esetén a G és H sorozatoknak csak véges sok közös elemük lehet. Ezen közös elemek számára F. Mátyás [9] adott explicit felső becslést.

Az előző eredményekben a közös elemek számára adott korlátok általában igen nagyok, számitógépekkel sem elérhető számok. Ezért érdekesek azok a speciális esetek, melyekben a közös elemek száma elérhetően kicsi.

J. Binz [2] a G(6, -1, 1, 6) és H(10, -1, 1, 10) konkrét sorozatok esetében bebizonyitotta, hogy a G és H sorozatoknak csak egy közös elemük van.

A következőkben J. Binz eredményét általánositjuk. Sorozatpárok egy osztályára mutatjuk meg, hogy az egyes pároknak legfeljebb kettő, illetve négy közös elemük lehet.

Két tételt bizonyitunk.

1. TÉTEL. Legyen D egy rögzitett pozitiv egész és p tetszőleges primszám, amelyekre sem D, sem D+p nem teljes négyzet. Legyenek továbbá a,b,c,d olyan nullától különböző egész számok, melyekre:

$$a^2 - Db^2 = 1 \qquad \text{és}$$

$$c^2 - (D+p)d^2 = 1$$

Ekkor az M = M(2a, −1, 0, b) és N=N(2c, −1, 0 d) sorozatoknak a 0 kezdőtagoktól eltekintve p=2 esetén legfeljebb kettő, p>2 esetén pedig legfeljebb négy közös elemük lehet.

2. TÉTEL. Legyen L egy rögzitett 8-cal osztható pozitiv egész szám, amelyre sem L, sem L+16 nem négyzetszám. Legyenek továbbá r,s,k,t olyan nullától különböző egész számok, melyekre

$$r^2 - Ls^2 = 1 \qquad \text{és}$$

$$k^2 - (L+16)t^2 = 1$$

Ekkor a H=H(2r, −1, 0, s) és K=K(2k, −1, 0, t) sorozatoknak a 0 kezdőtagtól eltekintve legfeljebb két közös elemük lehet.

Megjegyzések:

1. Megjegyezzük, hogy végtelen sok a,b,c,d illetve r,s,k,t egész szám található, melyek a feltételeket kielégitik, hiszen az $x^2-dy^2=1$ Pell egyenletnek, ha d>0 és nem négyzetszám, végtelen sok egész (x;y) megoldása van.
2. A 2. Tételből az L=8 speciális esetben következik J. Binz emlitett eredménye. Ugyanis erre az értékre pontosan a G(6, −1, 1, 6) és H(10, −1, 1, 10) sorozatok közös elemeit határozzuk meg.

3. A bizonyitásokból kitünik, hogy lehetne a tételeinkhez hasonlókat konstruálni, a közös elemek számára azonban általában nagyobb felső korlát adódna.

<u>1. TÉTEL BIZONYITÁSA</u>. Először megmutatjuk, hogy az M sorozat minden M_n eleméhez található egy x egész szám ugy, hogy $(x;y)=(x;M_n)$ egy megoldása a

(3) $$x^2 - Dy^2 = 1$$

egyenletnek. Mivel $(x;y)=(a;b)$ a feltételek miatt megoldása (3)-nek, ezért az

(4) $$x_n+y_n\sqrt{D} = \left(a+b\sqrt{D}\right)^n \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

egyenlőséggel definiált $\left(x_n;y_n\right)$ párok is megoldások, hiszen ezekre

$$x_n^2-Dy_n^2 = \left(x_n+y_n\sqrt{D}\right)\left(x_n-y_n\sqrt{D}\right) =$$

$$= \left(a+b\sqrt{D}\right)^n\left(a-b\sqrt{D}\right)^n = \left(a^2-Db^2\right)^n = 1$$

Másrészt (4)-ből

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\left(a+b\sqrt{D}\right)^n - \left(a-b\sqrt{D}\right)^n\right]$$

következik. Az M sorozat esetében a karakterisztikus polinom $x^2-2ax+1$, gyökei pedig a feltételek miatt

$$\alpha = a + \sqrt{a^2-1} = a + b\sqrt{D}$$

illetve $$\beta = a - b\sqrt{D},$$

és igy $M_0=0$, $M_1=b$ és $\alpha-\beta=2b\sqrt{D}$ miatt (1) alapján $y_n=M_n$ következik, hiszen esetünkben $A^2+4B=4a^2-4\neq 0$. Ebből már következik az állitásunk.

Hasonlóan látható be, hogy az N sorozat minden N_k

tagjához található egy z egész szám, ugy hogy $(z;y)=\left(z;N_k\right)$ egy megoldása a

$$z^2-(D+p)y^2=1$$

egyenletnek.

Tehát ha vannak az M és N sorozatoknak közös elemeik, akkor az

$$(5)\qquad \begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= 1 \\ z^2 - (D+p)y^2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek legalább annyi $(x;y;z)$ egész számhármas megoldása van, amennyi a különböző közös elemek száma. Elég tehát azt bizonyitani, hogy az (5) egyenletrendszernek legfeljebb két megoldása van $y\neq 0$ feltétellel.

Tegyük fel, hogy (x,y,z) egy megoldása (5)-nek. Ekkor

$$x^2-Dy^2=z^2-(D+p)y^2$$

és igy

$$(6)\qquad x^2+py^2=z^2 ,$$

továbbá nyilván $(x,y)=(z,y)=1$ ezért $(x;y;z)$ a (6) egyenlet páronként relativ prim, primitiv megoldása. $(x,z)>1$ esetén $p|(x^2,z^2)$ és $p|y$ következne, ami ellentmond az előzőeknek.

Először azt az esetet vizsgáljuk, ha $p=2$, ekkor (4)

$$(7)\qquad x^2+2y^2=z^2$$

alaku belátható, hogy (7) primitiv megoldásai

$$x = |u^2-2v^2| , \qquad y=2uv, \qquad z=u^2+2v^2$$

alakuak, ahol u,v relativ prim egészek és u páratlan. Ezeket az értékeket (5) első egyenletébe irva

$$\left(u^2-2v^2\right)^2 - 4Du^2v^2 = 1$$

adódik, ami

$$(8)\qquad \left(u^2-(2+2D)v^2\right)^2- \left(8D+4D^2\right)v^4 = 1$$

alakra hozható. De ismert, hogy az $x^2-Dy^4=1$ alaku diofantikus egyenletnek, ha $D>0$ és D nem teljes négyzet, legfeljebb két megoldása van (lásd Mordell [11], 270. oldal), ezért legfeljebb két $(u;v)$ párra teljesülhet (8) ugyanis $8D+4D^2=(2D+2)^2-4$ nem teljes négyzet. Ebből azonban az következik, hogy az (5) egyenletrendszernek is $p=2$ esetén legfeljebb két megoldása van, amiből az előzőek miatt következik a tétel állitása a $p=2$ esetben.

A következőkben azzal az esettel foglalkozunk, amikor $p>2$ primszám. Az előzőek alapján tudjuk, hogyha $(x;y;z)$ egy megoldása az (5) egyenletrendszernek akkor (6) is fennáll és $(x;y;z)$ egy primitiv megoldása (6)-nak. Itt is bizonyitható az ismert Pitagoraszi egyenlet megoldásához hasonlóan, hogy a (6) primitiv megoldásai, $p>2$ esetén

(9) $$x = \left| pm^2-n^2 \right| \quad ; \quad y=2mn \quad ; \quad z=pm^2+n^2$$

vagy

(10) $$x = \left| \frac{pu^2-v^2}{2} \right| \quad ; \quad y=uv \quad ; \quad z=\frac{pu^2+v^2}{2}$$

alakuak, ahol $(m,n)=1$ és különböző paritásu egész számok és $(u,v)=1$, páratlan egész számok. Beirva ezeket az (5) egyenletrendszer első egyenletébe (9) esetén

$$\left(pm^2-n^2\right)^2 - 4Dm^2n^2 = 1$$

mig a (10) esetében

$$\left(\frac{pu^2-v^2}{2}\right)^2 - Du^2v^2 = 1$$

adódik. Ezek azonban

(11) $$\left[n^2-(p+2D)m^2\right]^2 - \left[4D^2+4pD\right]m^4 = 1$$

és

(12) $$\left[\frac{v^2-(p+2D)u^2}{2}\right]^2 - \left[D^2+pD\right]u^4 = 1$$

alakra hozhatók, ahol belátható, hogy sem $4D^2+4pD$, sem D^2+pD nem teljes négyzet. De (11) és (12) egyenleteknek mint már láttuk, legfeljebb 2-2 megoldásuk lehet, igy az (5) egyenletrendszernek legfeljebb négy egész megoldása lehet. Ebből már következik a tételünk $p>2$ esetre vonatkozó állitása.

<u>2. TÉTEL BIZONYITÁSA</u>. Az előző tétel bizonyitásában követett gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy ha vannak a H és K sorozatoknak közös elemeik, akkor a

(13) $$x^2-Ly^2 = 1$$
$$z^2-(L+16)y^2 = 1$$

egyenletrendszernek legalább annyi $(x;y;z)$ egész megoldása van, amennyi a közös elemek száma. Tegyük fel, hogy $(x;y;z)$ megoldása a (13) egyenletrendszernek. Ekkor ezekre az x,y,z egészekre

(14) $$x^2+16y^2 = z^2$$

is fennáll és L párossága miatt könnyen igazolható, hogy $(x;y;z)$ a (14) páronként relativ prim, primitiv megoldása. Az viszont jól ismert, hogy (14) primitiv megoldásai

$$x = |m^2-n^2| , \quad 4y = 2mn , \quad z = m^2+n^2$$

alakuak, ahol m,n relativ prim egész számok és különböző paritásuak. Beirva ezeket az értékeket a (13) egyenletrendszer első egyenletébe felhasználva, hogy L alakja $L = 8h$ (h pozitiv egész, $h\neq 8$),

$$\left[m^2-n^2\right]^2 - 2\ hm^2n^2 = 1$$

adódik, ami

(15) $$\left[m^2 - (1+h)n^2\right]^2 - \left[h^2+2h\right]n^4 = 1$$

alakura hozható. De h^2+2h nem teljes négyzet, ezért, hasonlóan mint az 1. Tétel bizonyitásában, az állitásunk már következik.

IRODALOM

[1] F.Beukers, The multiplicity of binary recurrences, Comp. Math., 40 (1980), 251-267.

[2] J.Binz, Elemente der Math., 35 (1980), 155.

[3] M.D. Hirch, Additive sequences, Math., Mag, 50 (1977) 262.

[4] P.Kiss, On Common terms of linear recurrences Acta Math. Acad. Sci. Hungar 40 (1-2), (1982), 119-123.

[5] P.Kiss, Közös elemek másodrendü rekurziv sorozatokban. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola füzetei XVI. (1982), 539-546.

[6] P.Kiss, Differences of the terms of linear recurrences, Studia Scientiarum Mathematicarum Humgarica 20 (1985), 285-293.

[7] K.K.Kubota, On a conjecture of Morgan Ward I, Acta Arithm, 33 (1977), 11-28.

[8] K.K.Kubota, On a conjecture of Morgan Ward II, Acta Arithm, 33 (1977), 29-48.

[9] F.Mátyás, On common terms of second order linear recurrences, Mat.Sem. Not. (Kobe Univ. Jappan), 9 (1981), 89-97.

[10] M. Mignotte, Intersection des images de certaines suites recurrentes lineaires, Theoretical Comput. Sci, 7 (1978), 117-122.

[11] L.J.Mordell, Diophantine equations, Acad. Press, London, (1969).

[12] G.Revuz, Equations deiphantines exponentielles, Bull. Soc. Math. France, Mém., 37 (1974), 139-156.

[13] C.L.Stewart, On divisors of terms of linear recurrence sequences, J. reine angew, Math., 333 (1982), 12-31.