MÁTYÁS FERENC

PITAGORASZI SZÁMHÁRMASOK ÉS A LUCAS SOROZAT

ABSTRACT *(Pythagorean triples and the Lucas sequence)* *We define the sequence* $L=\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ *by the integers* $L_0=2$, $L_1=1$ *and the recurrence* $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$, $n>1$. *This sequence is called Lucas sequence and the terms of it are the Lucas numbers.* x_0,y_0,z_0 *positive integers are called Pythagorean triple if* $x_0^2+y_0^2=z_0^2$. *If for this* x_0,y_0,z_0 *triple* $(x_0,y_0,z_0)=1$ *is also true then* x_0,y_0,z_0 *triple will be called primitive Pythagorean triple.*

In this paper we deal with the connection between the Lucas numbers and the Pythagorean triples. Let A,B,C $(A\neq 0)$ *be arbitrary, but fixed integers. We prove the following two theorems:*

THEOREM 1. $(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C)$ *triples are Pythagorean triples for every even* $n(\geq 0)$ *if and only if*

$$A\equiv 0 \pmod 2,\quad B=-\left(\frac{A}{2}\right)^2+2 \quad\text{and}\quad C=\left(\frac{A}{2}\right)^2+2\ ,$$

while for every odd $n(\geq 1)$ *if and only if*

$$A\equiv 0 \pmod 2,\quad B=-\left(\frac{A}{2}\right)^2-2 \quad\text{and}\quad C=\left(\frac{A}{2}\right)^2-2\ .$$

THEOREM 2. Under the conditions of Theorem 1. the $(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C)$ *triples are primitive Pythagorean*

triples if and only if $\left(L_n, \frac{A}{2}\right)=1$, $L_n > \frac{A}{2}$ *and:*

if $A\equiv 0 \pmod 4$, then $n\equiv\pm 2 \pmod 6$ or $n\equiv\pm 1 \pmod 6$
if $A\equiv 2 \pmod 4$, then $n\equiv 0 \pmod 6$ or $n\equiv 3 \pmod 6$

I.

Az $L_0=2$, $L_1=1$ kezdőtagokkal és az $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ $(n>1)$ rekurziós formulával definiált sorozatot Lucas sorozatnak, tagjait Lucas számoknak nevezzük. E rekurzív definíció mellett jól ismert a sorozat tagjainak explicit alakja is:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad n \geq 0 . \tag{1}$$

(lásd pl. [4]).

Ugyancsak jól ismert a pitagoraszi számhármas fogalma, mellyel az $x^2+y^2=z^2$ diofantikus egyenlet pozitív egész megoldásait szokás nevezni. Tudjuk, hogy az összes (zérust nem tartalmazó) megoldások előállításához elegendő meghatározni az ugynevezett alapmegoldásokat, azaz $x_0^2+y_0^2=z_0^2$ mellett az $(x_0, y_0, z_0)=1$ feltételt is kielégítő számhármasokat. Jól ismert, hogy az összes alapmegoldás:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\, m\cdot t \\ y_0 &= m^2-t^2 \\ z_0 &= m^2+t^2 \end{aligned} \tag{2}$$

alakú, ahol $(m,t)=1$, $m>t$ és $m+t\equiv 1 \pmod 2$.

M.Bicknell-Johnson [2] a Fibonacci sorozat $\left(F_0=0,\ F_1=1\right.$ és $\left.F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n>1\right)$ és a pitagoraszi számhármasok kapcsolatát vizsgálva megoldotta az $F_n^2 \pm F_m^2 = K^2$ (K rögzített egész) egyenletet. L.Bernstein [1]-ben szintén a Fibonacci sorozat és az $x^2+y^2=z^2$ diofantoszi egyenlet alapmegoldásait vizsgálva jutott el az ikerprim-probléma egy átfogalmazásához. A Lucas sorozat és a pitagoraszi számhármasok kapcsolatára vonatkozó problémát vet fel H.T.Freitag [3]-ben: Mely n-re lesz a $\left(2L_n, L_{2n}-3, L_{2n}-1\right)$ számhármas pitagorászi számhármas? Ezen dolgozat tárgya e felvetett probléma egy lehetséges általánositása s annak – az alapmegoldások meghatározását is tartalmazó – megoldása.

II.

Legyenek A,B,C ($A\neq 0$) tetszőleges, de rögzitett egész számok.

<u>1. TÉTEL</u> Az $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ számhármas pitagoraszi számhármast alkot minden páros $n\geq 0$ -ra akkor és csak akkor, ha $A\equiv 0 \pmod 2$, $B=-\left(\frac{A}{2}\right)^2+2$ és $C=\left(\frac{A}{2}\right)^2+2$, mig minden páratlan $n\geq 1$ -re akkor és csak akkor, ha $A\equiv 0 \pmod 2$, $B=-\left(\frac{A}{2}\right)^2-2$ és $C=\left(\frac{A}{2}\right)^2-2$.

<u>2. TÉTEL</u> Az 1. Tétel feltételeinek megfelelő $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ számhármas akkor és csak akkor alapmegoldás, ha $\left(L_n, \frac{A}{2}\right)=1$, $L_n > \frac{A}{2}$ és

ha $A\equiv 0 \pmod 4$, akkor $n\equiv \pm 2 \pmod 6$ vagy $n\equiv \pm 1 \pmod 6$

ha $A\equiv 2 \pmod 4$, akkor $n\equiv 0 \pmod 6$ vagy $n\equiv 3 \pmod 6$.

A tételek bizonyitásához szükségünk van a következő lemmára.

<u>LEMMA</u>: $L_{2n}=L_n^2+2$, ha $n\geq 1$ páratlan és

$L_{2n}=L_n^2-2$, ha $n\geq 0$ páros egész szám.

<u>BIZONYITÁS</u>: A Lucas számok (1)-beli explicit alakját használva

$$L_n^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} = L_{2n}+2(-1)^n ,$$

melyből a Lemma állitása nyilvánvaló.

1. TÉTEL BIZONYITÁSA. Tételezzük fel, hogy $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ minden $n\geq 0$ páros egészre megoldása az $x^2+y^2=z^2$ egyenletnek, vagyis $\left(AL_n\right)^2+\left(L_{2n}+B\right)^2 = \left(L_{2n}+C\right)^2$. Lemmánk alapján $L_{2n}+B = L_n^2+B-2$ és $L_{2n}+C = L_n^2+C-2$, igy az

$$\left(AL_n\right)^2+\left(L_n^2+B-2\right)^2 = \left(L_n^2+C-2\right)^2$$

egyenlethez jutunk, melyet

$$L_n^2\left(A^2+2B-2C\right) = \left(C+B-4\right)\left(C-B\right) \tag{3}$$

alakra hozhatunk. Mivel (3) minden $n\geq 0$ páros egészre fennáll és $L_n\neq 0$, ezért az $A^2+2B-2C=0$ és $(C+B-4)(C-B)=0$ egyenlőségeknek kell teljesülni. Nyilván $C>B$, igy ez csak $B = -\left(\frac{A}{2}\right)^2+2$ és $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2+2$ esetén lehetséges, továbbá A,B,C egész volta miatt szükséges, hogy A páros szám legyen.

Ha $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ minden páratlan $n\geq 1$ egészre pitagoraszi számhármas, akkor lemmánk segitségével a következőket irhatjuk:

$$\left(AL_n\right)^2+\left(L_n^2+B+2\right)^2 = \left(L_n^2+C+2\right)^2,$$

melyből az

$$L_n^2\left(A^2+2B-2C\right) = \left(C+B+4\right)\left(C-B\right) \tag{4}$$

adódik. Mivel (4) minden páratlan $n\geq 1$ -re igaz, és $L_n\neq 0$, igy az $A^2+2B-2C=0$ és $(C+B+4)(C-B)=0$ egyenletrendszernek kell teljesülni, melyet megoldva – $C>B$ miatt – $B = -\left(\frac{A}{2}\right)^2-2$ és $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2-2$ adódik, ahol A-nak szintén páros egésznek kell lennie.

A tétel feltételeinek elégséges voltát (3), ill. (4) minden $n\geq 0$ -ra való megoldhatósága, továbbá a lemmánk n paritásától függő állitása szolgáltatja.

<u>Megjegyzés</u>. Tételünk speciális esetként választ ad H. T. Freitag által felvetett problémára, ugyanis ha $A=2$, $B=-3$ és $C=-1$, akkor a $\left(2L_n,\ L_{2n}-3,\ L_{2n}-1\right)$ hármas minden páratlan $n\geq 1$ egészre pitagorászi számhármast ad. Az igy előállitható pithagoraszi számhármasok: (2,0,2) (8,15,17), (22,120,122),..

<u>2. TÉTEL BIZONYITÁSA</u>. Vizsgáljuk meg tételünk állitását páros $n\geq 0$ egészekre. Az 1. tételünk szerint páros n-re $\left(AL_n,\ L_{2n}+B,\ L_{2n}+C\right)$ pontosan akkor pitagoraszi számhármas, ha A páros és

$$\left(AL_n,\ L_n^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2,\ L_n^2+\left(\frac{A}{2}\right)^2\right)$$

alakú. (2) szerint ez pontosan akkor lehet alapmegoldás, ha – A páros voltát is figyelembevéve – létezik olyan pozitiv egész m és t, melyre

$$(6)\qquad AL_n=2mt,\ L_n^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2=m^2-t^2 \text{ és } L_n^2+\left(\frac{A}{2}\right)^2=m^2+t^2,$$

ahol $(m,t)=1$, $m>n$ és $m+n\equiv 1 \pmod 2$. (6)-ból $m=L_n$ és $t=\frac{A}{2}$ adódik, azaz (5) akkor és csak akkor alapmegoldás, ha

$\left(L_n, \frac{A}{2}\right)=1$, $L_n > \frac{A}{2}$ és L_n, ill. $\frac{A}{2}$ paritása különböző. Azaz, ha $A\equiv0 \pmod 4$, akkor L_n páratlan kell hogy legyen, mely – L_n rekurziv definicióját figyelembevéve – páros n-ekre pontosan akkor teljesül, ha $n\equiv\pm2 \pmod 6$. Ha pedig $A\equiv2 \pmod 4$, akkor L_n, páros. Ugyancsak L_n rekurziv definiciójából könnyen nyerhető, hogy páros n-ekre L_n pontosan akkor páros, ha $n\equiv0 \pmod 6$.

Páratlan n-ekre az állitás az előzőhöz hasonlóan bizonyitható.

Megjegyzés. Alkalmazva tételünket a már vizsgált $\left(2L_n, L_{2n}-3, L_{2n}-1\right)$ pitagorászi számhármasokra (n páratlan) azt kapjuk, hogy a $\left(2 L_{6i+3}, L_{12i+6}-3, L_{12i+6}-1\right)$ számhármas minden $i\geq0$ egész esetén egy-egy alapmegoldását szolgáltatja a $x^2+y^2=z^2$ diofantoszi egyenletnek.

IRODALOM:

[1] L.Bernstein: Primitive Pythagorean Triples, The Fibonacci Quarterly 20, No.3 (1982), 227-242.

[2] M.Bicknell-Johnson: Pythagorean Triples Containing Fibonacci Numbers: Solution for $F_n^2 \pm F_m^2 = K^2$, The Fibonacci Quarterly 17, No.1 (1979), 1-12.

[3] Herta T. Freitag: Problem B 598 and B 599. The Fibonacci Quarterly 25, No.3 (1987) 279.

[4] I.Niven - H.S.Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, Müszaki Könyvkiadó, Budapest (1978).