CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAI KÍSÉRLET ÖSSZEFOGLALÁSA. II. RÉSZ.

A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK. A VEKTOROK FELBONTÁSA. A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK.

ABSTRACT: (A geometric experiment made in secondary school, 2nd part. Similarity transformations. Breaking up of vectors. Trigonometrical functions) This article is the second part of a summary written on a secondary school experiment. As no summary was written on the first part it is necessary to say some words about it. We dealt with the axial reflecting and with its constituents the other congruentity transformations. Then with the help of these we examined the features of geometric formations. Finally we explained the vector as the sum total of the derivational arrows of shifting, and the possible operations as well. We examine the material of the second year in this article. We explained the central elongation, the similarity transformation as the product of multiplication of the congruentity and central elongation, and we examined the characteristic features of the formations as well. We generally examinded the circular functions by the help of the coordinates of the vectors.

We thought it was important to give the circular functions of the negative, the $\alpha \pm 180^0$, the $180^0 - \alpha$ and the $90^0 - \alpha$ angles as easily as possible by the help of the congruentity transformations.

A középiskolai geometria II. osztályos tananyagának tárgyalását a címben fel nem tüntetett Pythagoras tétellel kezdtük. Felhívtuk a figyelmet arra, hogy a tanév során a derékszögű háromszögek vizsgálata központi kérdés lesz.

A Pythagoras-tétel bizonyítását két egybevágó négyzet különböző darabolásával bizonyítottuk. A tétel megfordítását is kimondtuk, s a háromszögek egybevágóságát felhasználva bizonyítottuk is. Részben gyakorlás céljából, részben pedig, hogy ne kelljen örökké táblázat után nyúlni a négyzet oldala és átlója, valamint a szabályos háromszög oldala és magassága közötti kapcsolatot rögzítettük. Később ez igen sok haszonnal járt. Nem kötelező tananyagként, inkább csak gyakorlásként meghatároztuk a háromszög oldalaiból a háromszög magasságait és a terüäületét is.

A hasonlósági transzformációk

A sík önmagára történő újabb leképezésének előkészítése céljából az alábbi tételeket igazoltuk:

1. Egy szög szárai t metsző g_1 és g_2 párhuzamos egyenesek és azok eltolással nyertgt g'_1 és g'_2 képei a szög ugyanazon száraiból egyenlő szakaszokat metszenek ki. Az állítás igazolása az eltolás tulajdonságainak felhasználásával történt. Ha pl: a g_1-et a szög csúcsára illesztettük és olyan eltolást alkalmaztunk, amely g_1-et g_2-be vitte -- s ezt véges sokszor alkalmaztuk -- akkor szakasz egyenlő és arányos részekre történő osztására nyertünk eljárást.

2. Ha egy szög szárait párhuzamos egyenespárokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával. (Párhuzams szelők tétele).
   A bizonyításnál leszögeztük, hogy elegendő az állítást két párhuzamos egyenespárra elvégezni. A bizonyítást egyébként a minden szakember által jól ismert módon végeztük. Csak a bizonyítás utolsó gondolatánál kellett elfogadható indoklást találni. Természetesen néhány lépés után elkészítettük két-két szakasz aránya különbségének abszolutértékét, amiről kiderült, hogy $\frac{1}{n}$-nél kisebb. Itt azt mondtuk, hogy n minden határon túl való növelésével akármilyen kicsiny $\frac{1}{n}$ számok jönnek létre, amelyeknél kisebb nem negatív szám csak a nulla lehet.

így adódott a két-két megfelelő szakasz arányának egyenlősége, illetve a tételben kimondott állítás.

A tétel egyszerűbb alakban történő kimondását segítette az, hogy rájöttünk, ha az egyik egyenest a szög csúcsára illesztjük és a két párból egyet-egyet egybeesőnek választunk, akkor a bizonyításban szereplő két párhuzamos egyenespár helyett két párhuzamos egyenest is mondhatunk. Vagyis, ha egy szög szárait két párhuzamos egyenessel metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok aránya a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok arányával egyenlő. Ekkor az így kimondott tétel megfordítását könnyű volt megfogalmazni (3. tétel). A bizonyítást indirekt módszerrel a legegyszerűbb esetben el is végeztük, a többi esetet szorgalmi feladatnak megjelölve beszéltük meg az érdeklődőkkel órán kívül.

A témakör 4. állítása a következő volt. Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a párhuzamosokból a szárak közé eső szakaszok aránya egyenlő a párhuzamos egyeneseknek a szög száraiból kimetszett megfelelő szakaszainak arányával.

Gyakorlásul és összefoglalásul egy szög szárait két párhuzamos egyenessel metszettünk és tanulmányoztuk a felírható arányokat. Itt foglalkoztunk azzal a tétellel, hogy a háromszög belső szögfelelője a szemközti oldalt a szöget bezáró két oldalának arányában osztja ketté.

Az itt felvázolt anyag után értelmeztük a centrális nyújtást, mint a síknak azt az önmagára történő leképezését, amelynél egy 0 pont fixpont, és a sík tetszőleges 0-tól különböző P pontjához azt a P' pontját rendeli az OP félegyenesen, amelyre $OP' = m \cdot OP$, ahol $m > 0$ valós szám. Szóltunk itt a kicsinyítésről, a nagyításról, és alkalom nyílt a transzformáció, az azonos leképezés, valamint az invariáns egyenes fogalmának mélyítésére. Beláttuk, hogy egyenestartó és hogy ha egy egyenes nem illeszkedik az 0 pontra, akkor a képével párhuzamos az egyenes.

Megmutattuk, hogy a centrális nyújtást a centruma és egy megfelelő pontjára egyértelműen meghatározta. (Abban az esetben is, amelyben a tetszőleges pont illeszkedik a centrum és a megfelelő pontpár egyenesére.) Kimutattuk a centrális nyújtás szögtartó és aránytartó tulajdonságát s megmutattuk azt is, hogy ha az AB szakasz párhuzamos és egyirányú az A'B' szakasszal, akkor létezik olyan centrális nyújtás, amely egyik szakaszt a másikba viszi, továbbá ha AB = A'B' is fennáll, akkor eltolás viszi át egyik szakaszt a másikba.

Foglalkoztunk kör centrális nyújtással nyert képével (kör), s centrális nyújtások szorzatával is (centrális nyújtás vagy eltolás).

Az elmondott állításokat a centrális nyújtást megelőző tételek segítségével mind bizonyítottuk.

A következő fejezetben értelmeztük a hasonlósági transzformációt. A sík minden olyan önmagára történő leképezését, amely egybevágóságuk és centrális nyújtások összetételéből áll hasonlósági leképezésnek vagy hasonlóságnak neveztük.

Ez az értelmezés azért is bizonyult szerencsésnek, mert a tanulók az egybevágóság és a centrális nyújtás közös tulajdonságait felidézték és előálltak a hasonlóság tulajdonságai.

Ezek: 1. A hasonlóság transzformáció, van inverze és az is hasonlóság.

2. Egyenes képe egyenes, félegyenes képe félegyenes, szakasz képe szakasz.
3. Aránytartó.
4. Szögtartó.
5. Párhuzamos egyenesek képei párhuzamosak.
6. Hasonlóságok összetétele is hasonlóság.

Nem volt nehéz belátni, hogy az egybevágóságok, a centrális nyújtások mind hasonlóságok, s a hasonlóságok halmaza tartalmazza az azonos leképezést (ha az egybevágóság és a centrális nyújtás is azonosság). Ha az egybevágóság centrális tükrözés, s a centrális nyújtás szorzatát negatív tényezőjű fixponttal rendelkező (fixpont a centrum) hasonlósági leképezésnek nevezzük.

Gondot fordítottunk a hasonlóság és az alakzatok hasonlósága (reláció) feltünő megkülönböztetésére. Két geometriai alakzatot akkor neveztünk hasonlónak, ha létezik olyan hasonlósági leképezés, amely egyiket a másikba viszi.

Ezek után hasonló alakzatok tulajdonságaival foglalkoztunk, majd körök, négyzetek, téglalapok, háromszögek hasonlóságát vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy az adott feltételek mellett létezik olyan hasonlósági leképezés, amely egyik alakzatot a másikba átviszi. A háromszögek esetét különös gonddal kezeltük, akár az egybevágóságnál. Úgy érzékeltük, hogy a háromszögek egybevágósága, illetve hasonlósága konkrét tartalmat nyert minden korábbi tárgyalásmóddal szemben. Csak példaként mutatunk be egy bizonyítást a háromszögek hasonlóságának négy alapesetéből egyet.

Tétel: Két háromszög hasonló, ha két-két oldaluk aránya és az ezek által bezárt egy-egy szögük egyenlő.

Bizonyítás: Legyen $c_2:c_1 = b_2:b_1$ és $\alpha_1 = \alpha_2$. Az A_1 centrumú $m = c_2:c_1$ ($= b_2:b_1$) tényezőjű centrális nyújtás az $A_1B_1C_1$ háromszöget olyan $A_3B_3C_3$ háromszögekre viszi, amelynek oldalai

$$c_3=(c_2:c_1)\cdot c_1=c_2; \quad b_3=(b_2:b_1)\cdot b_1=b_2; \quad \alpha_3 = \alpha_1 .$$

Az $A_3B_3C_3$ háromszög egybevágó az $A_2B_2C_2$ háromszöggel, tehát van olyan egybevágóság, amely az $A_3B_3C_3$ háromszöget az $A_2B_2C_2$ háromszögbe viszi. A centrális nyújtás és egybevágóság összetételéből álló hasonlósági leképezés az $A_1B_1C_1$ háromszöget az $A_2B_2C_2$ háromszögbe viszi, tehát hasonlók.

Minden további esetben megalkottuk a hasonlósági leképezéseket, amelyeket a tanulók különösebb probléma nélkül magukévá tették.

A transzformációs szemlélet előnye itt is fényesen megmutatkozott. A háromszögek hasonlóságának felhasználásával bizonyítottuk a derékszögű háromszögekre a magasság-; és befogótételt és Pythagoras tételét, majd összehasonlítottuk a számtani és mértani közepet, a magasság-; és befogótétel lehetőséget adott irracionális szám hosszúságú szakasz szerkesztésére.

A hasonlóságot felhasználtuk a háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel bizonyítására, majd hasonló sokszögek kerületének és területének arányát is megvizsgáltuk.

A térszemlélet fejlesztése érdekében a térbeli egybevágósági transzformációk sorát bővítettük a térbeli forgással és pontra vonatkozó tükrözéssel, majd értelmeztük a térbeli centrális nyújtást. A tér minden olyan önmagára történő leképezését, amely térbeli egybevágóságok és térbeli centrális nyújtások összetételéből áll elő, térbeli hasonlósági leképezésnek neveztük.

Értelmeztük a térbeli alakzatok hasonlóságát is (hasonlóan a síkbelihez) és vizsgáltuk a testek felszínének, térfogatának arányát, végül bebizonyítottuk, hogy a gúla alaplapjával párhuzamos síkmetszeteinek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint csúcstól mért távolságaik négyzetei.

Bizonyítottuk, hogy minden kocka, minden gömb hasonló és minden olyan téglatest hasonló, amelyek megfelelő élpárjainak aránya egyenlő.

Vektorok felbontása

A továbbiakban is arra törekedtünk, hogy az új ismeretek közlését tételek formájában végezzük el és lehetőleg bizonyítsunk. Ekkor már jelentkezett is a bizonyítási igény, igaz inkább a jobb tanulók esetében. Ez azonban a továbbtanulni szándékozók szempontjából óriási pozitívum.

Bebizonyítottuk, hogy ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok nem kollineárisak, akkor bármely az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal nem komplanáris $\underline{v}$ vektor egyértelműen állítható elő az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor segítségével $\underline{v} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ alakban, ahol α és β valós számok. Ezt úgy is kifejeztük, hogy $\underline{v}$ előállítható az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként. Beláttuk azt is, hogy ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokra az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = 0$ áll fenn, ahol α, β és γ nem mind nullák, akkor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok komplanárisak.

Igazoltuk még, hogy a tér bármely vektora egyértelműen állítható elő a nem komplanáris $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kominációjaként. Beszéltünk az egymástól lineárisan függő és független vektorokról. A tér két $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorát lineárisan függőnek nevezzük, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$, lineárisan független, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$. Persze ebből az is következik, hogy a tér bármely két kollineáris vektora egymástól lineárisan függő, s két nem kollineáris vektora egymástól lineárisan független.

A tér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármasát lineárisan függőnek nevezzük, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$, lineárisan függetlennek, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$. Ebből következik, hogy a tér bármely komplanáris vektorhármasa egymástól lineárisan függő, nem komplanáris vektorhármasa lineárisan független, s bármely vektornégyese egymástól lineárisan függő.

A vektorok koordinátái

Mivel a komplanáris vektorok egy síkbeli reprezentánsaikkal megadhatók, síkbeli vektoroknak neveztük azokat.

A továbbiakban tekintettük a sík két nem kollineáris e_1 és e_2, a tér három nem komplanáris $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ és $\underline{e}_3$ vektorát. ezeket alapvektoroknak (bázisvektoroknak) neveztük.

Ekkor a sík $\underline{a}$, illetve a tér $\underline{b}$ vektora egyértelműen állítható elő $\underline{a} = x.\underline{e}_1 + y.\underline{e}_2$, illetve $\underline{b} = x.\underline{e}_1 + y.\underline{e}_2 + z.\underline{e}_3$ alakban, ahol x, y, z valós számok.

Az előállításban szereplő x, y, z számokat a vektor koordinátáinak neveztük az alapvektorokra nézve.

A vektor végtelen sok elemű halmaz, tetszőleges pontból induló represéntánsával megadható.

Ha a koordinátarendszer origóját választjuk a vektorok kezdőpontjának, helyvektorokról beszélünk. Megalkottuk a Descartes-féle koordinátarendszer fogalmát, és felvettünk alapvektoroknak a tengelyek egységpontjaiba mutató helyvektorokat. Ezek után bármely pontba mutató helyvektor előállítható a három alapvektor (síkban két alapvektor) lineáris kombinációjaként, s megállapítottuk, vektor koordinátái a helyvektor végpontjának koordinátáival egyenlők.

Ezek alapján a vektor hossza mint egy téglatest (téglalap) átlójának hosszaként adódott. Ezek után a koordinátákkal adott vektorokkal végzett műveletekre megfogalmazott tételek bizonyítása szinte önálló munkával történt. A bizonyítási igény a tanulók zöménél ekkor már feltámadt.

A két pont távolságára vonatkozó összefüggés, a szakasz adott arányban történő felosztása valamint két vektor egyállásúsága szükséges és elégséges feltételének megfogalmazása és bizonyítása semmilyen nehézséget nem jelentett.

A trigonometriából a szögfüggvények értelmezését végeztük el. Az irányszögű egységhelyvektor koordinátáit, illetve azok megfelelő hányadosait neveztük az φ szög cosinusának, sinusának, tangensének, illetve cotangensének.

Mivel a helyvektor koordinátái a végpont koordinátával egyenlők, először az előjelek meghatározását végeztük el, majd mivel a vektor felbontása egyértelmű, értelmeztük a négy szögfüggvényt, ügyelve arra, hogy pontosan adjuk meg azok értelmezési tartományát. Miután felismerték a tanulók a periodicitást, meghatároztuk a 30^0, 45^0, 60^0-os szögek szögfüggvényértékeit, egy közelítő grafikont készítettünk mind a négy függvényhez.

Azonos léptékeket használunk a négy függvény grafikonjának készítésére, együttes szemlélése segített az alapvető összefüggések rögzítésében.

A negatív szögek, az $\alpha + 180^0$-nek, a $180^0 - \alpha$, illetve a $90^0 - \alpha$ szögek szögfüggvényeinek meghatározásakor a pontok koordinátáinak változását vizsgáltuk a tengelyekre, az origóra, illetve az y = x egyenesre vonatkozó tükrözések esetén.

Nagyon szemléletesen lehetett így megadni a függvények paritásának fogalmát is. A szögfüggvények egyéb tulajdonságainak vizsgálata természetesen időben megtárgyalásra került, itt inkább azt emeltük ki, hogyan lehetett a transzformációkat, illetve a vektorokat a szögfüggvények fogalmának kialakításánál felhasználni.

Ezen tananyag tárgyalása megmutatta, hogy a transzformációs szemléletű geometria, a fogalmak definiálása, az állítások tételszerű kimondása, azok bizonyításának igénye -- legalábbis az igény felkeltése -- kevesebb energiát használt el tanulótól, tanártól egyaránt ahhoz, hogy jó színvonalon sajátítsák el a tanulók a tananyagot.

Irodalom

1. Az érvényben lévő általános iskolai tanterv.
2. Az érvényben lévő középiskolai tanterv.
3. A forgalomban lévő általános iskolai tankönyvek.
4. A forgalomban lévő középiskolai tankönyvek.
5. Dr. Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó 1960.
6. Dr. Pelle Béla: Geometria. Tankönyvkiadó 1974.
7. Dr. Cservenyák János: A geometria középiskolai szintű feldolgozása transzformációkkal és vektorokkal. Egyetemi doktori disszertáció. 1977.