A taszító fixpontokról

SZEPESSY BÁLINT

Abstract. (On the repelling fixpoints) If the iterative pointsequence $x_0, x_1, x_2, \ldots$ has the limit value c then c, is said to be a fixpoint of first order and the points $x_0, x_1, x_2, \ldots$ belong to the point c. A fixpoint c is called to be a repelling point if it has no belonging point except c and its inverse iterated points.

In this paper we prove that repelling fixpoints of first (or higher) order can make a segment in a given closed interval.

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ $(a < b)$ zárt intervallumon értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos; a kezdő és végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x) =$ $=$konstans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x)), \ldots$, $f_n(x) =$ $= f(f_{n-1}(x))$, $\ldots$ függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, $\ldots$, n-edik (n-edrendű), $\ldots$ iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük.

Az $f_n(x)$ $(n = 2, 3 \ldots)$ függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3 tulajdonságokkal. (Ezt a közvetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval könnyen bizonyíthatjuk.) Teljesülnek az $f_{n+m}(x) =$ $= f_n(f_m(x)) = f_m(f_n(x))$ azonosságok is. Ezért bármely $x_0 (\in [a, b])$ pontnak létezik az $x_{n+1} = f(x_n)$ képlettel alkotott $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ iterációs pontsorozata és minden n-re $x_n \in [a, b]$-nek. Az x_n pontot az x_0 pont n-edrendű (n-edik) iteráltjának vagy rákövetkezőjének mondjuk.

Ha $f(c) = c$, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c) \neq c$, $n = 1, 2, 3 \ldots, r-1$ esetén, de $f_r(c) = c$, akkor c az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor a $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, c_r$ pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok [2].

Ha az x_0 pont iterációs pontsorozatának c a határértéke, akkor c elsőrendű fixpont és azt mondjuk, hogy x_0 pont a c ponthoz tartozik.

A c elsőrendű fixpont vonzó, ha létezik olyan pozitív ε valós szám, hogy bármely $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ esetén x a c ponthoz tartozik. A c elsőrendű fixpont balról-vonzó, ha nem vonzó, de létezik olyan pozitív ε valós szám, hogy minden $x \in (c-\varepsilon, c)$ esetén x a c ponthoz tartozik. Hasonlóképpen értelmezzük a jobbról-vonzó elsőrendű fixpontokat. Ezeket közös néven félig-vonzó fixpontoknak nevezzük.

Taszító egy elsőrendű fixpont, ha saját magán és megelőzőin (inverz-iteráltjain) kívül nincs más hozzátartozó pont. Az olyan elsőrendű fixpontokat, amelyek nem sorolhatók az előbbi csoportok egyikébe sem, vegyes fixpontoknak nevezzük [3].

A magasabb rendű fixpontok értelmezéséből következik, hogy az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja az $f_r(x)$ függvénynek az elsőrendű fixpontja. Így $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja vonzó, félig vonzó, taszító vagy vegyes aszerint, hogy az $f(x)$ függvény c elsőrendű fixpontja mely típusba tartozik. Ekkor a $c_1, c_2, \ldots, c_r = c$ páronként különböző r-edrendű fixpontok mind azonos típusúak.

2. A taszító fixpontokról

A [8] azt a kérdést vizsgálta, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén vannak tetszőleges magasrendű fixpontok. Bebizonyítottuk a következő állítást:

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett iterációs alapfüggvény, legyen továbbá $[c,d]$ részszakasza az $[a,b]$ szakasznak. Ha van a $[c,d]$ szakaszban két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész $[c,d]$ szakaszra képezi le, akkor az $f(x)$ függvénynek van tetszőleges magasrendű fixpontja.

A tétel feltételei mellett a $[c,d]$ szakaszban vannak bármilyen (első, másod, ...) rendű fixpontok.

Ugyanilyen tulajdonsággal rendelkező szakaszok lépnek fel $[a,b]$-ben a [7]-ben bizonyított tétel szerint is.

Felmerült a kérdés, hogy lehetnek-e — és milyen feltételek mellett — csupa azonos rendszámú fixpontokból álló szakaszok.

Azt fogjuk vizsgálni, hogy az első és magasabb rendű taszító fixpontok alkothatnak-e szakaszt az $[a,b]$ intervallumon.

Először bebizonyítjuk a következő állítást.

Tétel. Ha a $[c,d]$ $(c<d, c,d \in [a,b])$ szakaszt a benne monoton növekvő iterációs alapfüggvény önmagára vagy önmagába képezi le, akkor a $[c,d]$ szakaszban csak elsőrendű fixpontok vannak.

Bizonyítás. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy van a $[c,d]$ szakaszban n-edrendű fixpont $(n \geq 2)$; legyen ez c. Ekkor $c, c_1, c_2,\ c_3, \ldots c_{n-1}$

pontok is páronként különböző n-edrendű fixpontok; ahol $f(c_{n-1}) = c_n = c$.

Feltehető, hogy c a legkisebb abszcisszájú fixpont ebben a sorozatban, azaz $c < c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ ($c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ fixpontok sorrendje nem feltétlenül nagyság szerinti).

A $c < c_{n-1}$ egyenlőtlenségből $f(x)$ monoton növekedése miatt $f(c) < < f(c_{n-1})$ következik. De $f(c) = c_1$ és $f(c_{n-1}) = c$, ezért $c_1 < c$ azzal ellentétben, hogy c a legkisebb abszcisszájú fixpont a sorozatban.

Nem lehet tehát $n \geq 2$.

A $[c, d]$ szakaszban mindig van legalább egy elsőrendű fixpont. Az egész szakaszon ugyanis $f(x) - x > 0$ ($f(x) - x < 0$) nem teljesülhet, mert $f(x) - -x > 0$ ($f(x) - x < 0$) esetén $f(x)$ nem képezi le a $[c, d]$ szakaszt önmagára vagy önmagába.

A $[c, d]$ szakaszban akár végtelen sok elsőrendű fixpont is lehet. Ebben az esetben ezek torlódási pontjai is elsőrendű fixpontok.

Ha ugyanis $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ elsőrendű fixpontok $[c, d]$-ben és torlódási pontjuk A, akkor

$$A = \lim_{n\to\infty} A_{n_i} \quad \text{és} \quad f(A_{n_i}) = A_{n_i}, \quad \text{így} \quad A = \lim_{n\to\infty} A_{n_i} = $$
$$= \lim_{n\to\infty} f(A_{n_i}) = f(\lim_{n\to\infty} A_{n_i}) = f(A),$$

ezért A is elsőrendű fixpont. Az is előfordulhat, hogy a $[c, d]$ szakasz csupa elsőrendű taszító fixpontból áll. Ilyenkor $f(x) = x$ az egész $[c, d]$ intervallumon.

Tehát az $[a, b]$ intervallumon az elsőrendű taszító fixpontok szakaszt alkothatnak.

Tétel. Ha valamely $[c, d]$, ($c < d, c, d \in [a, b]$) szakaszt a benne monoton csökkenő iterációs alapfüggvény önmagára vagy önmagába képezi le, akkor ebben a szakaszban csak első és másodrendű fixpontok vannak.

Bizonyítás. Mivel a $[c, d]$ szakaszban monoton csökkenő függvényre $f(c) \geq f(x) \geq f(d)$ egyenlőtlenségek teljesülnek és így $f(x) - x$ és c helyen pozitív a d helyen negatív értékű, s így $f(x)$ folytonossága által van egy megoldása az $f(x) - x = 0$ egyenletnek a $[c, d]$ szakaszban, ezért a tétel bizonyítása visszavezethető az előbbi tétel bizonyítására.

Monoton csökkenő függvény monoton csökkenő függvénye (iteráltja) ugyanis monoton növekvő, ezért $f_2(x)$ függvény a $[c, d]$ szakaszt önmagára, vagy önmagába leképező monoton növekvő függvény. Erre mint alapfüggvényre alkalmazva az előbbi tételt adódik, hogy az $f_2(x)$ függvénynek csak elsőrendű fixpontjai vannak a $[c, d]$ szakaszban, s ezek az egyetlen elsőrendű fixpont kivételével mind másodrendű fixpontjai az $f(x)$ függvénynek.

Például az $f(x) = -(x-1)^3 + 1$ iterációs alapfüggvényre a $[0, 2]$ szakaszban a tétel feltételei teljesülnek. Az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ pontok másodrendű fixpontok, ennél magasabb rendű fixpontok ebben a szakaszban nem lépnek fel.

Csupa másodrendű taszító fixpontból álló szakaszok is felléphetnek. Például az $f(x) = 1 - x$ alapfüggvény esetén a $[0, 1]$ intervallumban. Itt $e = \frac{1}{2}$ pont kivételével a szakasz minden pontja másodrendű taszító fixpont.

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény az $\left[a, \frac{1}{a}\right]$ $(0 < a < 1)$ szakaszban szintén kielégíti a tétel feltételeit; a szakasz minden pontja az $e = 1$ elsőrendű fixpont kivételével másodrendű taszító fixpontok.

Általánosabban; ha az $y = f(x)$ görbe az $y = x$ egyenesre vonatkozóan tükörképíveket tartalmaz, akkor ezek mindig másodrendű taszító fixpontból álló szakaszok.

Könnyen belátható a következő:

Tétel. Az $[a, b]$ intervallum tetszőleges n számú páronként diszjunkt zárt szakaszához megadható (akár végtelen sok) olyan iterációs alapfüggvény, amelyre az adott zárt szakaszok pontjai mind n-edrendű taszító fixpontok.

Bizonyítás. Legyen $[a, b]$ szakasznak $\varrho; \varrho_1; \varrho_2; \ldots, \varrho_{n-1}$ páronként diszjunkt zárt részintervallumai. Az $f(x)$ iterációs alapfüggvényt az $[a, b]$ szakaszon értelmezzük úgy, hogy a ϱ_{i-1} szakaszt a ϱ_i-re $(i = 1, 2, \ldots, n-1; \varrho_0 = \varrho)$ bijektív módon képezze le, továbbá ha d a ϱ zárt szakasz egy tetszőleges pontja, akkor $d_{i-1} \in \varrho_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1; d_i$ a d pont i-edik iteráltja) és $(d_{n-1}, f(d_{n-1}) = d)$ az alapfüggvény pontja (Az $x = d_{n-1}$ és az $y = d$ egyenesek metszéspontja a$(d_{n-1}, f(d_{n-1}) = d)$ pont).

Nyilvánvaló, hogy végtelen sok ilyen iterációs alapfüggvény létezik, s hogy ezekre az adott részintervallumok pontjai mind n-edrendű taszító fixpontok.

Például az $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ szakaszt az $\left[\frac{5}{6}, \frac{8}{9}\right]$ szakaszra, az utóbbit az $\left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$ szakaszra, ezt pedig $\left[\frac{17}{18}, 1\right]$ zárt szakaszra bijektív módon képezi le a $[0, 1]$ szakaszon értelmezett

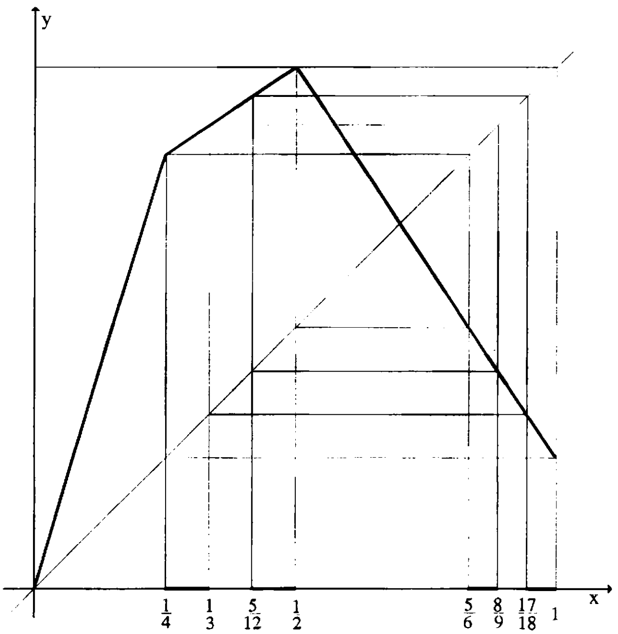
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{3}x, & \text{ha } 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2}{3}(x+1), & \text{ha } \dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}, & \text{ha } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

iterációs alapfüggvény. Továbbá erre az alapfüggvényre bármely $d \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ esetén d_3 iterált pontban a függvényérték d. Ezért az $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{5}{6}, \frac{8}{9}\right]$ $\left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$ és a $\left[\frac{17}{18}, 1\right]$ szakaszok pontjai mind negyedrendű taszító fixpontok (lásd az ábrát).

Tehát az első és a magasabb rendű taszító fixpontok zárt intervallumokat alkothatnak az $[a, b]$ szakaszon.

Végül tekintsük az $f(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 1$ iterációs alapfüggvényt a $[0, 1]$ intervallumon. Az $x_1 = 0$ és az $x_2 = \frac{3}{4}$ pontok elsőrendű taszító fixpontok. Itt megszámlálható sok magasabb rendű taszító fixpont van a $[0, 1]$ szakaszon, (2 másod, 6 harmad, 8 nagyedrendű, ...). Tehát a fixpontok (az n-edrendű fixpontok) halmaza nem alkot szakaszt.

Az $f_n(x) - x = 0$ egyenletnek az $f_n(x)$ iterált függvény két egymásra következő 0-helye által határolt zárt szakaszban két-két gyöke van, ezért a gyökök, vagyis a magasabb rendű taszító fixpontok mindenütt sűrűn helyezkednek el; ezért a $[0, 1]$ szakasz minden pontja taszító fixpontok torlódási pontja.



Irodalom

[1] A. Ralston, A first course in numerical analysis. *Mc Graw-Hill, Inc.*, New York, 1969.

[2] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I., *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 16–47.

[3] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II., *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 16–47.

[4] B. Barna, Berichtigung zur Arbeit, Über die Iterationen reeller Funktionen II., *Publ. Math. Debrecen*, **20** (1973), 281–282.

[5] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III., *Publ. Math. Debrecen*, **22** (1979), 267–278.

[6] L. Berg (Rostock), Über irreguläre Iteratione folgen, *Publ. Math., Debrecen*, **17** (1971), 112–115.

[7] Tien—Yien Li and L. James A. Yorke, Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* (10) **82** (1975), 985–992.

[8] Szepessy Bálint: A magasabb rendű fixpontokról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio mathematicae* XII. (1994), 9–15.