MARGA SCHMIDT

ZUM LÖSEN VON SACH- UND ANWENDUNGSAUFGABEN IM UNTERRICHT
(Forschungsbericht)

ABSTRACT: *Die Forschung betrachtet als eine der wichtigsten Zielsehungen, daß die Schüler für die Lösung der Aufgaben aktivisiert werden. In dieser Zusammenhang zeigt die Arbeit konkrete Beispiele.*

Sie gibt eine Zusammenfassung solchen allgemeingültigen Prinzipien, die bei der Lösung der Aufgaben anwenden werden können, wie zuß:

- *Darstellung und Analisierung der Aufgabe*
- *Plan für Aufgabe, Zusammenstellung der Pläne*
- *Durchführung der Lösung*
- *Kontrolle*

In verschiedenen Schulen in Erfurt wurden diese Verfahren bei Methodologie eingeführt, nachdem sie von den Fachlehrern abgestimmt wurden.

Die Zusammenfassung der Erfahrungen wird die Aufgabe des nächstes Jahres sein.

Im Heft XVIII/11 dieser Zeitschrift konnten wir bereits über unsere Forschungsarbeit berichten. Dort stellten wir ausführlich die Ergebnisse unserer Praxisanalyse zum Forschungsgegenstand "Aktivierung von geistigen Schülertätigkeiten" dar. Diese Ergebnisse charakterisierten zum einen den derzeitigen Stand und machten gleichzeitig

Reserven zur Erhöhung der geistigen Aktivität sichtbar. Diese Reserven auszuschöpfen, den konkreten Mathematikunterricht unter Beachtung aufgezeigter Schwerpunkte bewußt zu gestalten, entsprechende Hinweise für Lehrer auszuarbeiten, darin bestanden und bestehen die zu lösenden Forschungsaufgaben.

Im nachfolgenden möchte ich für einen Schwerpunkt - "Das Arbeiten mit Aufgaben" - unsere weiteren Überlegungen darlegen. Wie im letzten Bericht ausgeführt, interessierten uns bzgl. dieses Schwerpunktes insbesondere folgende Fragen:

1. Welches methodische Vorgehen bewährt sich beim Aufgabenlösen, welcher Zusammenhang besteht zur Aktivität?
2. Welchen Einfluß übt die Aufgabenstellung (als objektiv Vorgegebenes und als durch den Lehrer methodisch gebrochene Vorgabe) auf die Aktivität der Schüler aus?
3. Wie muß die Analysephase gestaltet werden, um die Schülertätigkeit bestmöglichst zu aktivieren?
4. Wie ist unter dem Aspekt der Aktivierungsreserve die Phase der Rückschau zu gestalten?

Wir können feststellen:

Aufgaben haben in der math. Unterweisung schon immer eine große Rolle gespielt. Gehört doch eine weitgehende Befähigung des Schülers zum <u>Lösen</u> bestimmter <u>Aufgaben</u> zum <u>Zielbereich des Mathematikunterrichts</u> und leistet doch das <u>Aufgabenlösen</u> als <u>Mittel</u> für die Herausbildung von Kenntnissen, Fähingkeiten und Fertigkeiten hervorragende Dienste.

Im Zentrum der methodischen Grundkonzeption des Mathematikunterrichts, die in den letzten Jahren in den neuen Lehrplänen, Lehrbüchern umgesetzt wird, stehen deshalb Fragen der Aufgabenauswahl und -anordnung, des Ingangsetzen und -haltens der Aufgabenbearbeitung durch möglichst jeden Schüler, des zweckmäßigen Anleitens und Kontrollierens der

dabei vom Schüler vollzogenen Tätigkeiten und des Auswertens und Gewinnens allgemeiner Erfahrungen.
Alle Schüler zu aktiver geistiger Tätigkeit, zu Selbständigkeit und zu elementaren Schöpfertum zu befähigen, stezt sowohl eine gute Aufgabenauswahl und -anordnung ebenso wie eine zweckmäßige Gestaltung des Aufgabenlösens voraus. Wenn also das Lösen einer Aufgabe vorgeführt wird (vom Lehrer oder von einzelnen Schülern) oder in einem kurzschrittigen Unterrichtsgespräch (bei dem trotz richtiger Teilantworten der Schüler der gesamte Lösungsweg nicht mehr überschaubar bleibt) oder in direkter Analogie zu einem vorliegenden Muster (reines Nachmachen) geschieht, gehen wichtige Potenzen von Selbständigkeit und geistiger Aktivität verloren.
Das aber gerade das im Mathematikunterricht noch zu häufig anzutreffen ist, belegten unsere Praxisanalysen. Wollen wir also Fortschritte auf dem Gebiet der Erhöhung der geistigen Aktivität im Mathematikunterricht erzielen, so geht es um bewußtes Verhindern dieser festgestellten Mängel!

<u>Zum Aufgabenlösungsprozeß</u>:

Der Aufgabenlösungsprozeß stellt einen speziellen Problemlösungsprozeß dar und orientiert sich an folgendem allgemeinen Modell:

1. Analyse der Aufgabe
2. Analyse der Mittel
3. Durchführung der Lösung
4. Rückschau

Speziell bei Sach- und Anwendungsaufgaben ergeben sich nach weitere Hinweise für die einzelnen Phasen:

Modell	Spezielle Teilschritte
1. Analyse der Aufgabe	- Inhaltliches Verstehen der Aufgabenstellung, des Aufgabentextes - Wiedergeben des Aufgabeninhaltes mit eigenen Worten, eventuelles Klären des Sachverhaltes - Analysieren des Textes, vorkommende Größen (Zahlen u. Variable) werden erkannt und benannt, Zusammenhänge zwischen den Größen werden erkannt und vorteilhaft aufgeschrieben (Skizze, Tabelle, Stichworte ...) - Trennen von Gegebenem und Gesuchtem
2. Analyse der Mittel	- Suchen nach weiteren Zusammenhängen, Orientierung an Signalwörtern, speziell nach Äquivalenzen suchen - Suchen nach Formeln, in denen die gegebenen bzw. gesuchten Größen vorkommen - Eventuelles Ableiten von Teilaufgaben, wenn noch weitere Unbekannte auftreten - Eventuelles Umwandeln der Maßeinheiten - Verarbeiten zum mathematischen Ansatz (Methoden des Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeitens anwenden) - Abschätzen des Ergebnisses

3. <u>Durchführung der Lösung</u>	- Realisieren der Lösungsidee, Auswählen geeigneter mathematischer Verfahren, Lösung ermitteln - Deuten des mathematischen Resultats für den Sachverhalt - Vergleichen mit der Schätzung, mit den Erfahrungen der Schüler
4. <u>Rückschau</u>	- Probe am Text - Formulieren des Antwortsatzes - Rückbesinnen auf beschrittenen Lösungsweg, Bewußtmachen der mit Erfolg angewendeten Vorgehensweise zum Finden des Ansatzes - Versuchen, die Mittel, die zum Ziel führten, zu verallgemeinern - Diskutieren von Möglichkeiten der Übertragung der Vorgehensweisen, Formulieren von Aufgaben, auf die der Lösungsweg auch anwendbar wäre - Werten des Ergebnisses in erzieherischer Weise

Für unser Anliegen bieten insbesondere die ersten beiden und die vierte Phase Potenzen zur Aktivierung der Schülertätigkeiten. Dazu seien nachfolgend einige Ausführungen gemacht.

<u>1. Zu den Phasen 1 und 2</u>

<u>A) Aktivierung durch strategiebewußtes Arbeiten</u>

Wir haben bereits festgestellt, daß Vorführen von Lösungen kaum einen Beitrag zur Befähigung aller Schüler zum selbständigen Problemlösen leistet. Auch das Problemlösen kann nur im Prozeß der Tätigkeit erlernt werden. Ein erfolgversprechender Weg besteht darin, die Schüler zum selbständigen Lösen von Problemen über den Weg "Versuch - Irrtum" anzuregen. Doch auch dieser Weg ist zu uneffektiv! Ein effektiverer Weg ist darin zu sehen, die Schüler im Prozeß des Problemlösens mit Lösungsstrategien bekannt zu machen, diese Strategien zu vermitteln und durch die Schüler mehrfach anwenden zu lassen!

Jedes Problem enthält gewisse Informationen über "Startgrößen" und "Zielgrößen", manchmal auch über auszuführende Operationen!

Beim Vorwärtsarbeiten legt man sich folgende Frage vor:

Welche Teilziele kann man von den Startgrößen ausgehend erreichen, und auf welche Weise ist dies möglich?

Beim Rückwärtsarbeiten lautet die Frage:

Von welchen Teilzielen ließe sich die Zielgröße erreichen, und auf welche Weise wäre dies möglich?

Fragen nach Polya:

Vorwärtsarbeiten	Rückwärtsarbeiten
Was haben wir?	Was wollen wir?
Was sind die Daten?	Was ist die Unbekannte?
Wozu dienen solche Größen?	Wie bestimmt man eine Größe dieser Art?
Wie kann man solche Daten benutzen?	Wie ermittelt man eine solche Unbekannte?
Was kann man von solchen Daten ableiten?	Von was für Daten kann man eine solche Unbekannte ableiten?

Als weitere Möglichkeiten wären aufzuführen:

das kombinierte Vorgehen

das Modellieren (Übergang von der Ausgangsebene, auf der das Problem gestellt wurde, zu einer Modellebene)

das Verwenden heuristischer Hilfsmittel (wie z. B. Graphen, informative Figuren, umstrukt. Wissensspeicher u.a.)

B) Weitere Hilfen zur Ansatzfindung seien in Stichpunkten genannt:

1. Voraussicht (Aufstellen von Vermutungen)
2. Material sammeln und in zweckmäßige Verbindung zu der Aufg. bringen - Mobilisieren und Organisieren
3. Ergänzen und Umgruppieren
4. Isolieren und Kombinieren
5. Erkennen und Sich-Erinnern
6. Verwenden von verschiedenen Veranschaulichungsformen (Tabelle, Skizze, Modellversuch)
7. Umformulieren in vorteilhafte Texte

Auch diese Hilfen sollten den Schülern bewußt gemacht werden und im Verlaufe der Schulzeit an verschiedenen Aufgaben angewendet werden.

C) Weitere Aktivierungsmöglichkeiten

1. Man lasse den Schüler aktiv zur Formulierung der Aufg. beitragen!

Ausgehend von dem Grundsatz, die Schüler selbst so viel wie möglich entdecken zu lassen, sollte der Lehrer versuchen, bereits in der Formulierung der Aufgabenstellung die Schüler einzubeziehen. Sie werden sich dann der Aufgabe stärker annehmen und aktiver auch bei ihrer Lösung mithelfen.

2. Man variiere die Anforderungsstruktur der Aufgaben!

Die Variation der Anforderungsstruktur von Aufgaben ist auf verschiedene Weise möglich. Bereits durch die Wahl der Darstellungsform (rein verbal, mit Skizze, als Graph ...) lassen sich Varianten bilden, die insbesondere entsprechend geartete Denktypen ansprechen werden. Innerhalb jeder Darstellungsform sind Variationen denkbar, die sich durch die Veränderung des Verhältnisses von für die Aufgabenlösung wesentlichen und unwesentlichen Angaben ergeben.

Bei Textaufgaben entscheidet oftmals auch die Textgestaltung (z. B. Wo steht die Frage? Wie wird die Frage gestellt? Werden "Signalwörter" verwendet? Wie sind die Angaben im Text verteilt?), der Bekanntheitsgrad des Sachverhaltes, die Interessenlage der Schüler der entsprechenden Altersstufe u.a.m. über Erfolg oder Mißerfolg im Lösungsvollzug.

Als weitere Möglichkeiten die Anforderungsstruktur zu variieren seien genannt:

. die mathematische Struktur des zu bearbeitenden Problems (Formel, Gleichung ...),
. die Anzahl und die Verknüpfung der notwendigen mathematischen Operationen,
. die Anzahl und Stufung von erforderlichen Zwischenergebnissen,
. die Art der geistigen Anforderungen (auszuführende geistige Operationen, Kenntnisse ...)

2. Zur Phase 4

Die Unterrichtserfahrungen zeigen, daß oftmals der Phase der Rückbesinnung auf eine Aufgabe zu wenig Bedeutung beigemessen wird. Die Formulierung eines Antwortsatzes und die Durchführung der Probe am Text sind noch im Unterricht anzutreffen, doch die Möglichkeiten des Abhebens von Verfahrenskenntnissen, die bei der Lösung anderer Aufgaben

zum Tragen kommen könnten, werden verschenkt. Fragen nach dem Weg, der bei der gelösten Aufgabe zum Ziel führte, nach der Übertragbarkeit des Weges auf ähnliche Aufgaben, nach der Art der Aufgaben, auf die der Weg übertragen werden könnte, traten in hospitierten Stunden nicht auf. Ebenfalls zu kurz kommt eine Auswertung der Aufgabe oder des Ergebnisses der Aufgabe in erzieherischer Hinsicht (Erziehung im engeren Sinne). Wenngleich es natürlich nicht bei jeder Aufgabe sinnvoll ist, besteht jedoch eine berechtigte Forderung danach. Gerade eine vernünftige erzieherische Auswertung könnte die Schüler bei Aufgaben mit ähnlichen Sachverhaltsvorgaben motivieren und somit aktivieren.
Die nachfolgenden Beispiele sollen das Gesagte illustrieren:

<u>1. Beispiel: LB Kl. 7, S. 91/8</u>

<u>Aufgabentext</u>: Wasser soll aus einer Baugrube ausgepumpt werden. Es stehen 5 Pumpen (gleiche) zur Verfügung. Der Bauleiter meint: "Mit 5 Pumpen schaffen wir die Arbeit in 4 $\frac{1}{2}$ Stunden."
Wieviel Sunden dauert das Auspumpen länger, wenn nur 4 Pumpen eingesetzt werden können?

<u>Analyse der Aufgabe</u>: + <u>Analyse der Mittel:</u> Solche Typen von Aufgaben treten dem Schüler in Klasse 7 nicht erstmalig gegenüber. Ähnliche Aufgaben wurden bereits in Klasse 6 betrachtet. Der Schüler sollte also schon über entsprechende Verfahrenskenntnisse für solche Aufgabentypen verfügen und könnte die Analyse der Aufgabe selbständig ausführen. Im Ergebnis dieser Phase könnte etwa stehen:

1. Skizze: (Schluß auf 1)

5 Pumpen	1 Pumpe	4 Pumpen
$4\frac{1}{2}$ Stunden →	$5 \cdot 4\frac{1}{2}$ Stunden →	x Stunden

Ansatz: $x = \dfrac{5 \cdot 4\frac{1}{2} \text{ Stunden}}{4}$

2. Tabelle:

Anzahl der Pumpen	Zeit in h
5	4,5
4	x

Überlegung - es liegt umgekehrte Proport. vor.

Ansatz: $\frac{5}{4} = \frac{x}{4,5}$

3. Anwendung physikalischer Kenntnisse:

Die Arbeit ist gleich dem Produkt aus Leistung und Zeit. Die Arbeit, die zu verrichten ist, bleibt gleich, ebenso die Leistung einer Pumpe, diese sei P.

Ansatz:
$$W_1 = W_2$$
$$5 \cdot P \cdot 4,5 \text{ h} = 4 \cdot P \cdot x \text{ h}$$
$$x = \frac{5 \cdot 4,5}{4}$$

Bei allen diesen Ansätzen wird zunächst auf die gesamte Zeit, die die 4 Pumpen benötigen, orientiert. Erst anschließend wird die "Mehr" - zeit berechnet. Dieses Vorgehen wäre beim Durchdringen der Aufgabe als erste Teilaufgabe auszugliedern.

2. Beispiel: LB Kl. 8, S. 83/7

Aufgabentext: Jürgen läßt einen Drachen steigen, so hoch es der 87 m lange Bindfaden zuläßt. Michael sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe hat der Drachen erreicht, wenn Michael von

Jürgen 60 Schritte von je 80 cm Länge entfernt steht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

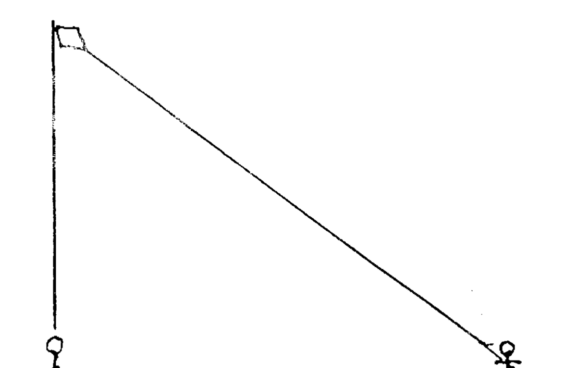
Vorüberlegungen:

Diese Aufgabe sollte den Schülern nicht als fertige Lehrbuchaufgabe "vorgesetzt" werden. Eine kleine den Sachverhalt erläuternde Erzählung - "Zwei Jungen lassen einen Drachen steigen; der jüngere fragt nach der erreichten Höhe des Drachen, als die Schnur völlig abgerollt ist; kann der ältere Junge (8. Kl.) das ermitteln? Wie? Was brauchte er dazu? Was könnte er leicht ermitteln? ..." - weckt das Interesse der Schüler stärker, außerdem würden die Ausgangsdaten, die bestimmbar sind, explizit abfallen.

Analyse der Aufgabe + Analyse der Mittel

Bei dieser Aufgabe bietet sich eine Skizze an, um den Sachverhalt zu veranschaulichen.
Die Diskussion der zu bestimmenden Größen unpliziert gleichzeitig die Lösungsidee (Mittel zur Berechnung - Satz des Pythagoras)!

Skizze:



Ansatz:

$$l^2 = h^2 + s^2$$
$$h = l^2 - s^2$$

Methodisch sollte auch bei dieser Aufgabe die selbständige Schülertätigkeit dominieren.
Bereits nach der Erläuterung des Sachverhalts (Problems) sollten die Schüler Zeit zum Nachdenken erhalten, um die Skizze und die bestimmbaren Größen zu überlegen.
Nach einer kurzen Zwischenkontrolle wird auch die numerische Lösung von den Schülern selbständig ausgeführt.

3. Beispiel: LB Kl. 9, S. 103/15

Aufgabentext: Bei einem Manöver wird ein gegnerischer Aufklärer um 7.40 Uhr über dem Ort T gesichtet, er bewegt sich mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 1000 km h^{-1} in Richtung Z.
7.42 Uhr starten in Z zwei Jagdflugzeuge und fliegen mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 2400 km h^{-1} dem Aufklärer entgegen.
Wieviel Minuten nach dem Start treffen die Jagdflugzeuge den Aufklärer, wenn die Entfernung von T nach Z 420 km beträgt?

Analyse der Aufgabe: Der Grad der Selbständigkeit der Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe sollte möglichst hoch sein, entsprechende Verfahrenskenntnisse sind vorhanden. Die Schüler lesen den Text durch, geben den Sachverhalt mit eigenen Worten wieder, entnehmen dem Aufgabentext die Ausgangsdaten und das zu erreichende Ziel.
Sie wählen eine zweckmäßige Veranschaulichung und diskutieren den physikalischen Sachverhalt.

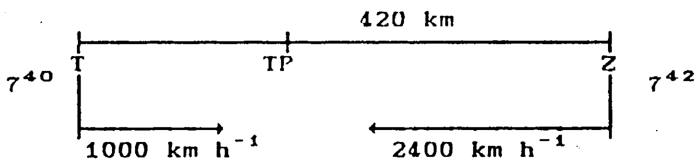
Mögliche Veranschaulichungen:

1. Text: geg.:

1. T und Z sind 420 km entfernt. ——— $s = 420$ km
2. Auflärer wird über T 7.40 gesichtet.
3. Jagdflugzeuge fliegen 7.42 in Z ab. ——— $t_A = t_y + 2\text{min}$
4. Geschwindigkeit des Aufklärers 1000 km h^{-1} ——— $v_A = 1000 \frac{km}{h}$
5. Geschwindigkeit der Jagdflugzeuge 2400 km h^{-1} ——— $v_y = 2400 \frac{km}{h}$

ges.: Wann treffen sie sich?

2. Skizze:



3. Tabelle:

	Weg in km	Zeit in h	v in $\frac{km}{h}$
Aufkl.	x	y	1000
Jagdfl.	420-x	$y - \frac{2}{60}$	2400

Die Analyse endet mit der Feststellung, daß es sich um eine gleichförmige Bewegung handelt, also die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ Anwendung findet.

Analyse der Mittel

Schüler stellen ausgehend von der Überlegung, daß es sich um zwei sich bewegende Objekte handelt, für die jeweiligen Objekte die Gleichungen auf.

$$v_A = \frac{s_A}{t_A} \qquad\qquad v_y = \frac{s_y}{t_y}$$

$$1000 = \frac{x}{y} \qquad\qquad 2400 = \frac{420-x}{y-\frac{1}{30}}$$

Es entsteht ein Gleichungssystem, das von den Schülern nach bekannten Lösungsverfahren gelöst werden kann.

Diese Beispiele mögen genügen, um deutlich zu machen, wie der Aufgabenlösungsprozeß gestaltet werden sollte, um die Schüler möglichst stark geistig aktiv tätig werden zu lassen.
Entscheidend für den Erfolg, d. h. für positive Veränderungen in der Schülerpraxis ist, die Lehrer zu veranlassen, in diesem Sinne zu arbeiten. Wir haben deshalb seit einem Jahr eine Zusammenarbeit mit interessierten Mathematiklehrern des Territoriums (Stadt Erfurt) ins Leben gerufen. Neben theoretischen Diskussionen haben wir konkrete Unterrichtssituationen durchgesprochen. Für das kommende Schuljahr ist nun die Umsetzung im Mathematikunterricht geplant. Über entsprechende Erfahrungen wird danach zu berichten sein.