SASHALMINÉ KELEMEN ÉVA

A FŐISKOLAI GEOMETRIA ANYAG EGY LEHETSÉGES MEGALAPOZÁSA
I. RÉSZ

ABSTRACT: *(One of the possible establishments of the academic geometrical subject. Part I.) In our college students study geometry according to the book written by Pelle Béla titled "The Geometry". In this setting up we initiate the coincidental transformation with the help of the reflectial axioms.*

In this article we begin to initiate an axiomscheme wich differs from the setting up of the book but also based on symmetry. After the disscussion of certain subjects the book is also avialable to practise the given subject.

The establishment prepared by employment and modicfication of G. Choquet's axiomscheme better relies on the theory of sets and the algebrical knowledge of the students.

Főiskolánkon a hallgatók dr. Pelle Béla: Geometria cimű tankönyve alapján tanulják a geometriát. Ebben a felépítésében az egybevágósági transzformációkat tükrözési axiómák segítségével vezetjük be.

Az 1989-90 -es tanévben egy hallgatói csoportnál az eredetitől eltérő, de ugyancsak a szimmetriát fölhasználó axiómarendszer alapján kezdtük el a geometria anyag fölépítését.

Ez a rendszer viszonylag kevés axiómát tartalmaz, s az egyszerüség kedvéért ezek nem mind függetlenek. (Az I. II. levezethető a többiből, s a VI. egzisztencia része bizonyítható).

A felépítés során az eddigieknél jobban támaszkodunk a hallgatók halmazelméleti, algebrai ismereteire. A rendszerben szereplő axiómák a következők:

İLLESZKEDÉSI AXIÓMÁK:

I. A tér, a sík, az egyenes végtelen ponthalmaz.

II. A tér tartalmaz legalább két különböző síkot, és minden sík tartalmaz legalább két különböző egyenest.

III. Az E tér bármely két különböző pontjára egy és csak egy egyenes illeszkedik.

IV. Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik a síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.

V. Az E tér tetszőleges, de nem kollineáris ponthármasára egy és csak egy sík illeszkedik.

VI. Tetszőleges α síkot, rá illeszkedő a egyenest és tetszőleges $P \in \alpha$, de $P \notin$ a pontot tekintve, a P pontra az α síknak egy és csak egy olyan egyenese illeszkedik, amely az a egyenessel párhuzamos.

RENDEZÉSI AXIÓMÁK:

VII. Minden egyenesen létezik két, egymással ellentétes rendezés.

VIII. Minden a,b párhuzamos egyenespár és tetszőleges, a-ra illeszkedő A,A' és b-re illeszkedő B,B' pontnégyes esetén, minden olyan, az a,b egyenespárral párhuzamos egyenes, mely metszi az A,B szakaszt, metszi az A',B' szakaszt is.

IX. Tetszőleges α sík esetén létezik az $E \setminus \alpha$ halmaznak két olyan E_1, E_2 végtelen részhalmazra történő felbontása úgy, hogy tetszőleges két térbeli pont akkor és csak akkor tartozik a két különböző részhalmazhoz, ha az általuk meghatározott szakasz metszi az α -t, s ez a metszéspont a szakasznak belső pontja.

A MÉRÉS AXIÓMÁJA:

X. Az E térhez hozzárendeljük a tér pontpárjai halmazának a nemnegativ valós számok halmazára történő d leképezését, melyet távolságfüggvénynek nevezünk, s melyre teljesülnek a következők:

1. $d(P,Q) = d(Q,P)$ minden $P,Q \in E$ -re.
2. Tetszőleges irányított e egyenes, rá illeszkedő P pont és tetszőleges $c \geq 0$ valós szám esetén az e egyenesen egyetlen olyan Q pont létezik, amelyre $P \leq Q$ (P megelőzi Q-t) és $d(P,Q)=c$.
3. Ha P az A,B szakasznak pontja, akkor $d(A,P)+d(P,B) = d(A,B)$.
4. Legyen A,P,B tetszőleges, nem kollineáris ponthármas, ezekre a pontokra teljesül: $d(A,B) < d(A,P) + d(P,B)$. (Szigorú háromszögegyenlőtlenség)

A SZIMMETRIA AXIÓMÁJA:

XI. Tetszőleges γ sík esetén egy és csak egy olyan egybevágóság létezik, amely a γ által meghatározott zárt féltereket egymásnak felelteti meg, s melynél teljesül, hogy a γ sík pontjai fixpontok.

Ez az axiómarendszer G. Choquet axiómarendszerének felhasználásával, módositásával készült, de a megfogalmazásoknál, jelöléseknél figyelembe vettük a tankönyv jelölésrendszerét, hogy bizonyos témakörök után ismét használni lehessen.

A két megalapozás közti lényeges eltérések a következők:

1. A legjelentősebb az, hogy a párhuzamossági axiómát (a VI. axióma - egzisztencia résszel kiegészítve) jóval korábban bevezetjük, mint ahogy a tankönyvben található. Igy bizonyos állítások igazolása egyszerűsödik, viszont lemondunk annak bemutatásáról, hogy ezen axióma használata nélkül a geometria mely fejezetei építhetők föl.
2. A rendezés lényegesen eltér az eredeti felépítésétől, a rendezett halmaz fogalmán alapszik.
3. A mérés axiómájának bevezetése után definiáljuk az egybevágósági leképezést, (eredeti és képpontok távolsága egyenlő) s vizsgáljuk, igazoljuk néhány tulajdonságát. A XI. axióma alapján a síkszimmetria értelmezhető, s mivel egybevágóság, tulajdonságainak egy része már ebből következik. A távolságtartást és a X. axiómát fölhasználva a tankönyvben szereplő tükrözési axiómáknak megfelelő állítások levezethetők, ill. van ami fölöslegessé válik (XII. axióma).
4. A tengelyes tükrözés bevezetése után a síkbeli egybevágósági transzformációkat (a tankönyvben mozgásokat) tengelyes szimmetriák szorzataként értelmezzük.

A centrális tükrözést, eltolást, forgást két tengelyes tükrözés szorzataként definiáljuk, s bizonyítjuk, hogy bármely síkbeli egybevágóság legfeljebb három tengelyes szimmetria szorzataként előállítható. Ezen leképezések jellemzése után kapcsolódunk a tankönyv anyagához. (Sokszögek, Háromszög, egyenlő szárú háromszög, ... Speciális négyszögek stb.) Eltérés a térgeometria tárgyalásánál lesz, a tér egybevágósági transzformációinak kiépítésénél.

Ebben a dolgozatban a felépítés első három fejezete szerepel. A további fejezeteket és a tapasztalatok összegzését a második ill. a harmadik részben mutatjuk be.

1. Térelemek, illeszkedési axiómák

Legyen E nem üres halmaz, amelyet *térnek* nevezünk. Az E elemeit *pont*oknak, az E részhalmazainak egy rendszerét *egyenesek*nek, az E részhalmazainak egy másik rendszerét *sík*oknak tekintjük.

A térelemeket vagy alapelemeket nem értelmezzük, tulajdonságaik a rájuk kimondott axiómákban lesznek, ill. azokból következnek.

A pontokat nagy-, az egyeneseket kisbetűvel, a síkokat görög betűvel jelöljük. A térelemek jelei között az = jel (pl. a=b) a megfelelő két halmaz egyenlőségét jelenti.

1.1 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A tér pontjainak, egyeneseinek, síkjainak valamilyen meghatározott összességét *geometriai alakzatnak* nevezzük.

A térelemek között különböző relációk vannak, ezek egyike az *illeszkedési reláció*, erre vonatkozik az első axiómacsoport. (A továbbiakban a halmazelméleti jelöléseket használjuk $P \in \alpha$, $e \subset \beta$ stb.)

I. <u>Axióma</u>: A tér, a sík, az egyenes végtelen ponthalmaz.

II. <u>Axióma</u>: A tér tartalmaz legalább két különböző síkot, és minden sík tartalmaz legalább két különböző egyenst.

Ezen axiómák (pl. létezik két egyenes egy síkban) és a halmazelméleti ismeretek felhasználásával megfogalmazhatók a következő értelmezések. Azt, hogy egy pont illeszkedik egy egyenesre vagy síkra, ugy értjük, hogy a pont eleme a tekintett halmaznak; egyenes illeszkedése síkra pedig azt jelenti, hogy $e \subset \beta$.

1.2 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A tér két, a,b egyenese *párhuzamos* (jele: $a \parallel b$), ha a és b egy síkra illeszkednek és $a \cap b = \emptyset$.

1.3 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A tér két, a,b egyenese *egyállású*, ha vagy $a=b$, vagy $a \parallel b$.

1.4 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az a és b egyenesek *metszők*, ha $a \neq b$ és $a \cap b \neq \emptyset$. (Itt még nem tudjuk, hogy a közös pontok száma mennyi).

1.5 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az $E' \subset E$ pontjai *kollineárisak*, ha létezik olyan egyenes, amely tartalmazza E'-t.

1.6 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az $E' \subset E$ pontjai *komplanárisak*, ha létezik olyan sík, amely tartalmazza E'-t.

1.7 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az a egyenes és α sík *metszők*, ha $a \not\subset \alpha$ és $a \cap \alpha \neq \emptyset$.

III. <u>Axióma</u>: Az E tér bármely két különböző pontjára egy és csak egy egyenes illeszkedik.

IV. <u>Axióma</u>: Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik a síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.

V. <u>Axióma</u>: Az E tér tetszőleges, de nem kollineáris ponthármasára egy és csak egy sík illeszkedik.

VI. <u>Axióma</u>: Tetszőleges α síkot, rá illeszkedő a egyenest és tetszőleges $P \in \alpha$, de $P \notin a$ pontot tekintve, a P pontra az α síknak egy és csak egy olyan egyenese illeszkedik, amely az a egyenessel párhuzamos.

(Később a létezés bizonyítható.)

A továbbiakban az A,B ($A \neq B$) pontokra illeszkedő egyenest $\overline{A,B}$ szimbólummal jelöljük.

1.1 KÖVETKEZMÉNY: Két metsző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

Ha kettő lenne, a III ax. miatt $a=b$ teljesülne, de az értelmezés alapján $a \neq b$. A közös pont a *metszéspont*.

1.2 KÖVETKEZMÉNY: Ha egy egyenes és sík metsző, akkor pontosan egy közös pontjuk van.

Ha kettő lenne, a IV. ax. miatt az egyenes illeszkedne a síkra. $a \cap \alpha = M$ – M a *metszéspont*.

1.1 TÉTEL: Ha e és f két metsző, vagy párhuzamos egyenes, akkor pontosan egy olyan sík létezik, amely e-t és f-t tartalmazza.

BIZONYÍTÁS: Legyen $e \cap f = M$.
Az I. ax. miatt létezik $A \in e$ és $B \in f$, de $A \neq M$ és $B \neq M$. Az V. ax. szerint egyetlen α sík létezik, melyre A,M,B illeszkedik, s a IV. ax. alapján e és f illeszkedik α -ra. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\alpha' \neq \alpha$, mely szintén tartalmazza e és f -t.

$$e \subset \alpha', \text{ így } A \in \alpha' \text{ és } M \in \alpha' .$$

$$f \subset \alpha', \text{ így } B \in \alpha'.$$

Ezek alapján $\{A,B,M\} \subset \alpha'$, ami az V. ax. szerint azt jelenti, hogy $\alpha = \alpha'$.

Ha $e \parallel f$, akkor a létezés az 1.2 értelmezéséből adódik, az egyértelműség az előzőhöz hasonlóan belátható.

1.2 TÉTEL: Egy egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén pontosan egy olyan sík létezik, amely az egyenest és a pontot tartalmazza.

Bizonyítása hasonló a két metsző egyenesre vonatkozó állítás (1.1 tétel) bizonyításához.

1.3 KÖVETKEZMÉNY: Legyen a a tér tetszőleges egyenese, P pedig egy rá nem illeszkedő pont. Egy és csak egy olyan egyenes létezik, amely P-re illeszkedik és a-val párhuzamos.

Az 1.2 tétel alapján P és a egyetlen síkot határoznak meg, abban pedig igaz a VI. axióma.

1.3 TÉTEL: Minden síknak végtelen sok egyenese, a térnek végtelen sok síkja van.

BIZONYÍTÁS: 1. A II. ax. alapján egy tetszőleges α síknak van két különböző egyenese, a és b. Az I. ax. szerint felvehető a-n egy A pont, s ez a b egyenes végtelen sok pontjával végtelen sok α -beli (IV. ax.) egyenest határoz meg.

Igy a sík egy pontjára végtelen sok síkbeli egyenes illeszkedik.

2. A térnek van két különböző síkja β , γ (II. ax.) és felvehető $A \in \beta$ (I. ax.). A tétel első része alapján a γ -nak végtelen sok egyenese van, az 1.2 tétel miatt az A-val együtt mindegyik meghatároz egy síkot, igy a tér A pontjára végtelen sok sík illeszkedik.

1.4 TÉTEL: Bármely sík egyeneseinek a halmazán az egyenesek egyállásúsága ekvivalenciareláció.

BIZONYÍTÁS: Az 1.3 értelmezés alapján ez a reláció reflexiv – a=a; szimmetrikus – ha $a \parallel b \longrightarrow b \parallel a$, vagy ha $a = b$, akkor $b = a$.

Igazolni kell, hogy ez a reláció tranzitiv.

Legyen $a \parallel b$ vagy $a = b$ és $b \parallel c$ vagy $b = c$. Ekkor, ha az a,b,c egyenesek közül mindhárom, vagy bármely kettő egyenlő, az állítás nyilvánvaló. Ha az egyenesek páronként különbözőek, akkor $a \cap c = \emptyset$. Ha ugyanis a és c metszenék egymást, akkor az $a \cap c = A$ ponton keresztül b-vel két párhuzamos egyenes létezne, ami ellentmond a VI. ax.-nak.

1.4 KÖVETKEZMÉNY: Két párhuzamos egyenes egyikét metsző egyenes metszi a másikat is.

Ha létezik $a \cap c = A$, akkor létezik $b \cap c = B$ is, ellenkező esetben az A ponton át b-vel párhuzamos lenne az a (feltétel volt), és a b is.

1.8 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A sík egyeneseinek halmazán az egyállásúság relációja által létrehozott ekvivalenciaosztályokat irányoknak nevezzük. Az e egyenest tartalmazó ekvivalenciaosztályt az *e egyenes irányának* mondjuk.

Jele: δ_e

2. Geometriai leképezések és transzformációk

Ebben a fejezetben a továbblépéshez szükséges fogalmak szerepelnek.

2.1 <u>ÉRTELMEZÉSEK</u>:

1. Egy A *ponthalmaznak* egy B *ponthalmazba történő* F *leképezésén* olyan előírást értünk, amely az A minden P pontjához hozzárendeli a B halmaz valamelyik P' pontját. P-t *eredeti pontnak*, P'-t *képpontnak* nevezzük. A P kezdőpontú, P' végpontú nyilat *leképezési nyilnak* nevezzük.

A leképezés jelölése: P'=F(P), P[F]P'

2. Az A halmazt az F leképezés *értelmezési tartományának* mondjuk. Az A halmaz F-képe – *képhalmaz;* ez a B-nek részhalmaza. Ha a képhalmaz egybeesik B-vel, akkor *A-t B-re képeztük le.*

Ha a képhalmaz az A részhalmaza, akkor A-t *önmagába*, ha A egybeesik a képhalmazzal, akkor *önmagára képeztük le.*

3. Ha egy A halmaz önmagába vagy önmagára való leképezésénél egy pont egybeesik a képével; akkor azt a pontot *fixpontnak* nevezzük.

Ha az A halmaz e egyenese pontjainak képei az e egyenesre illeszkednek, akkor az e-t *invariáns egyenesnek* nevezzük. Ha az invariáns egyenes minden pontja fixpont, az egyenes *pontonként fixegyenes*.

Ha egy leképezés az α sík pontjait az α síkra képezi le, α -t *invariáns síknak* nevezzük. Ez is lehet pontonként fix.

2.1 <u>TÉTEL</u>: Két metsző invariáns egyenes közös pontja fixpont.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen az F leképezésnél a és b invariáns és $a \cap b = M$.

$F(M)=M'$ $\quad M \in a$, így $M' \in a$

$M = M'$ mert két különböző

$M \in b$, így $M' \in b$

egyenesnek csak egy közös pontja lehet.

2.2 <u>TÉTEL</u>: Invariáns sík és azt metsző invariáns egyenes közös pontja fixpont.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen $F(\alpha)=\alpha$ és $F(a)=a$ és $\alpha \cap a = M$.

$M \in \alpha$, így $M' \in \alpha$

$M \in a$, így $M' \in a$, $\quad M = M'$,

ellenkező esetben a illeszkedne az α -ra.

2.2 <u>ÉRTELMEZÉSEK</u>:

1. Ha az F leképezés az A-beli kollineáris ill. komplanáris ponthalmazokhoz B-nek egy-egy kollineáris ill. komplanáris ponthalmazát rendeli, akkor az F leképezést *egyenestartónak*, ill. *síktartónak* nevezzük.

2. Az A ponthalmaznak a B ponthalmazra való *egyértelmű leképezésén* olyan leképezést értünk, amely az A minden pontjához B-nek egy pontját rendeli, és B minden egyes pontja valamelyik A-beli pontnak a képe. (szürjektív leképezés)

3. Az A ponthalmaznak a B ponthalmazra való *kölcsönösen egyértelmű leképezésén* olyan egyértelmű T leképezést

értünk, amelynél különböző A-beli pontoknak különböző B-beli pontok felelnek meg. Azaz ha $P \neq Q$, akkor $T(P) \neq T(Q)$. A kölcsönösen egyértelmű leképezést másképpen *transzformációnak* nevezzük. (Bijektiv leképezés; algebrában a transzformáció mást jelent - A önmagába való leképezése; A önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését permutációnak nevezik).

4. A transzformációnál B minden egyes pontjának egyetlen eredeti pontja van, így ha a képpontokhoz az eredeti pontokat rendeljük, akkor B-nek A-ra való transzformációját definiáltuk, és ezt a T *inverz transzformációjának* nevezzük, jele: T^{-1}.

5. Legyen A,B,C három ponthalmaz. Az F_1 leképezés vigye A-t B-be, F_2 pedig B-t a C-be. Legyen $P \in A$, s ennek képe legyen: $F_1(P)=P'$, $F_2(P')=P''$. Az F_1, F_2 egymás utáni alkalmazásával P a P''-be került. A leképezések egymás utáni alkalmazását a *leképezések szorzásának* nevezzük.

<u>Jelölése</u>: $P''=F_2(F_1(P))$ vagy $P''=F_2F_1(P)$, ill.

$$P[F_1]P'[F_2]P'' \quad = \quad P[F_1F_2]P''$$

Az F_2F_1 leképezést az F_1 és F_2 leképezések szorzatának mondjuk. (használjuk az $F_2 o F_1$ jelölést is).

6. *Két leképezést egyenlőnek* mondunk, ha az értelmezési tartományuk megegyezik, és annak minden egyes pontjához a képhalmazban ugyanazokat a pontokat rendelik. Jelölése: $F_1=F_2$.

7. Az olyan leképezést, amely az értelmezési tartomány minden pontját fixen hagyja, *identikus leképezésnek* vagy *azonosságnak* nevezzük. Jele: I.

2.1 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Bármely transzformációt az ineverzével megszorozva identikus leképezést kapunk.

<u>MEGJEGYZÉS</u>: 1. A leképezések szorzása asszociativ, azaz

$$F_3 o(F_2 oF_1) = (F_3 oF_2) oF_1.$$

2. $T^{-1}oI = IoT^{-1} = T^{-1}$ és $ToI=IoT = T$

3. Nem kommutativ, F_2oF_1 általában nem egyenlő F_1oF_2-vel.

2.3 <u>TÉTEL</u>: Ha egy T transzformáció négyzete azonosság, akkor a transzformáció egyenlő az inverzével.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: $(ToT=T^2=I) \longrightarrow (T=T^{-1})$

$T^{-1}|ToT=I$ – balról szorozva

$T^{-1}o(ToT)=T^{-1}oI$ – a megjegyzések alapján

$(T^{-1}oT)oT=T^{-1}$ – 2.1 következmény alapján

$IoT = T^{-1}$

$T = T^{-1}$

2.3 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Azt a leképezést, amelyik megegyezik az inverzével, *involutórikus leképezés*nek nevezzük.

2.2 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Az A ponthalmaz önmagára történő transzformációinak összessége csoportot alkot.

Érvényesek a csoporttulajdonságok:

1. Ha T_i és T_j két tetszőleges transzformáció, akkor a szorzatuk is az összességhez tartozik.
2. A szorzás művelete asszociativ, azaz $T_ko(T_joT_i) = (T_koT_j)oT_i$
3. A transzformációk összessége a transzformációk inverzeit is tartalmazza.
4. Az összességnek az identikus transzformáció is eleme. (egységelem). A csoporttulajdonságok figyelembevétele az algebra eszközeinek felhasználását teszi lehetővé.

A továbbiakban bevezetünk egy leképezést, amelynek tulajdonságait a későbbiek során jól tudjuk alkalmazni.

2.4 <u>TÉTEL</u>: Legyen a tetszőleges α síkbeli egyenes, és δ , α -beli, a-tól különböző irány. Minden egyes $P \in \alpha$ ponthoz létezik olyan δ irányú egyenes, amely metszi a-t valamilyen

$\varphi(P)$ pontban.

BIZONYÍTÁS: 1. $P \in a$ – a VI. ax. miatt igaz az állítás.

2. $P \notin a$ – VI. ax. – létezik e egyenes, és létezik $a \cap e = \varphi(P)$ pont is; ellenkező esetben $a \parallel e$, de feltétel volt, hogy $\delta \neq \delta a$.

2.4 ÉRTELMEZÉS: Az α halmaznak az a halmazra való, a 2.4 tételben leirt φ leképezését az α -nak a-ra történő δ iránnyal *párhuzamos vetítésének* (röviden δ irányú vetítésnek) nevezzük.

2.3 KÖVETKEZMÉNY: Tulajdonságok:

1. $\varphi(\alpha)=a$, azaz síknak egyenesre történő leképezése; nem kölcsönösen egyértelmű leképezés.
2. $\varphi(a)=a$ – A leképezés fixpontjai, azaz amelyekre $\varphi(X)=X$, az a egyenes pontjai és csak azok.

A párhuzamos vetítésnél az értelmezési tartomány lehet az α sík valamely részhalmaza is, s igy beszélhetünk például egyenesnek egyenesre történő párhuzamos vetítéséről.

2.5 TÉTEL: Legyen a,b két tetszőleges, α -beli egyenes és $\delta \subset \alpha$ ezen egyenesek irányától különböző irány. Az a egyenesnek a b egyenesre történő δ irányú vetítése az a-nak – b-re történő kölcsönösen egyértelmű leképezése.

BIZONYÍTÁS: Legyen φ a feltételeknek eleget tevő párhuzamos vetítés. $\varphi(a)=b$ teljesül, mivel a b minden Y pontján átmenő δ irányú egyenes metszi a-t valamilyen X pontban, és $\varphi(X)=Y$.

Ha X és X' az a egyenes két különböző pontja, akkor az ezekre illeszkedő δ irányú egyenesek is különbözőek, és a b egyenest a különböző $\varphi(X)$, $\varphi(X')$ pontokban metszik.

Mindezekből az is nyilvánvaló, hogy b-nek a-ra történő δ irányú vetítése kölcsönösen egyértelmű.

A síkot kölcsönösen egyértelműen képezzük le, ha két metsző egyenesre vetítjük, a következőképpen:

2.5 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Legyen e_1, e_2 az α sík két metsző egyenese. Jelöljük φ_1-el α-nak e_1-re történő, e_2-vel párhuzamos vetítését; φ_2-vel α-nak e_2-re történő, e_1-vel párhuzamos vetítését. Az e_1 és e_2 egyeneseket ezen leképezéseknél *tengelyeknek* nevezzük. Tetszőleges $P \in \alpha$ pont esetén a $\varphi_1(P)$ és $\varphi_2(P)$ pontokat a P pontnak az e_1 és e_2 tengelyek rendszerére vonatkozó *meghatározóinak* (összetevőinek) nevezzük. Az $e_1 \cap e_2 = O$ a rendszer *kezdőpontja*.

2.4 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Az α sík minden (P_1,P_2) pontpárjához, hol $P_1 \in e_1$ és $P_2 \in e_2$, az α síknak egyetlen olyan P pontja tartozik, amelyre teljesül, hogy $P_1=\varphi_1(P)$ és $P_2=\varphi_2(P)$; ez a pont a P_1-re illeszkedő és e_2-vel párhuzamos, valamint a P_2-n átmenő és e_1-el párhuzamos egyenesek metszéspontja. A $P \longrightarrow (\varphi_1(P),\varphi_2(P))$ leképezés tehát az α halmaz bijektív leképezése az $e_1 \times e_2$ szorzathalmazra. (Ha az egyenesek számosságát λ-val jelöljük, a sík számossága λ^2).

3. Rendezési axiómák

<u>VII. axióma</u>: Minden egyenesen létezik két, egymással ellentétes rendezés.

<u>MEGJEGYZÉS</u>: Ebben az axiómában szerepel a "rendezés", amely halmazelméleti fogalom. (Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet főiskolai tankönyv definicióját és jelölését használjuk.)

Szemléletesen: ha az egyenes pontjait "befutjuk" az egyik irányban, meghatározunk rajta egy rendezést.
A bevezetett axióma segítségével a következő lényeges fogalmak definiálhatók:

3.1 ÉRTELMEZÉSEK:

1. Azokat az egyeneseket; amelyeken a két rendezés valamelyike adott, *irányított egyeneseknek* nevezzük.

2. Két, különböző A,B pont esetén az $\overline{A,B}$ *irányított egyenes* kifejezés azt az $\overline{A,B}$ egyenest jelenti, melynek az irányítása olyan, hogy A<B.

3. Legyen e tetszőleges irányított egyenes és P tetszőleges P ∈ e pont. Az {X;A<X} és az {X;A>X} halmazokat az e irányított egyenes *A kezdőpontú nyilt félegyeneseinek*, az {X,A≤X} és {X;A≥X} halmazokat *A kezdőpontú zárt félegyeneseinek* nevezzük.

Az $\overline{A,B}$ félegyenes a továbbiakban az $\overline{A,B}$ irányított egyenes azon A kezdőpontú zárt vagy nyilt félegyenesét jelenti, amely tartalmazza a B-t. B-belső pont.

4. Az A,B pontok által meghatározott egyenesen, mindkét rendezésnél, az $\overline{A,B}$ és a $\overline{B,A}$ zárt félegyenesek közös pontjainak a halmaza ugyanazon pontokból áll, ezt a ponthalmazt nevezzük *szakasznak*. Jele: [A,B] A és B - a szakasz végpontjai, az ezektől különböző, a szakaszhoz tartozó pontok - belső pontok.

Az [A,B] -t szokás zárt intervallumnak is nevezni, míg a nyilt félegyenesek, ill. nyilt és zárt félegyenesek metszeteként adódó ponthalmazok neve *nyilt* ill. *félig zárt intervallum*. (]A,B[ill. [A,B[)

Bármely pontra teljesül:

$$[A,A] = \{A\} \quad \text{és} \quad]A,A[= \emptyset.$$

5. Ha A,B,C pontok az e egyenes pontjai, és A<B<C, vagy A>B>C teljesül, akkor azt mondjuk, hogy B *elválasztja* A és C-t, B az A és C között van.

MEGJEGYZÉS: Az 5. esetben B az [A,C] belső pontja, s fordítva, ha B∈]A,C[, akkor A<B<C, vagy A>B>C teljesül.

6. Az E halmaz E' részhalmaza *konvex*, ha tetszőleges $Y,Z \in E'$ esetén $[Y,Z] \subset E'$.

3.1 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Minden sík, egyenes, félegyenes, szakasz konvex halmaz.

3.2 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Az E tér tetszőleges konvex részhalmazainak metszete is konvex halmaz.

3.2 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Egyenes, félegyenes, szakasz közül bármely kettőt (lehet pl. szakasz-szakasz) metszőnek nevezünk, ha az általuk meghatározott egyenesek metszők, és a metszéspontot mindkét alakzat tartalmazza.

<u>VIII. axióma</u>: Minden a,b párhuzamos egyenespár és tetszőleges $A,A' \in a$ és $B,B' \in b$ pontnégyes esetén az $[A,B]$-t metsző és az a,b egyenespárral párhuzamos egyenesek mindegyike metszi az $[A',B']$ -t is.

<u>MEGJEGYZÉS</u>: Ez az axióma a különböző egyenesek rendezései között teremt kapcsolatot. (Ennek lesz a következménye az, hogy a párhuzamos vetítés rendezéstartó.)

3.3 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Legyen e az α sík tetszőleges egyenese, $\delta \subset \alpha$, e irányától különböző irány és φ az e-re történő, δ irányú vetítés.

Ekkor minden $X,Y \in \alpha$ esetén

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)].$$

Ha X és Y egy δ irányú egyenesen van, akkor

$$\varphi\,[X,Y] = \{\varphi(X)\} = \{\varphi(Y)\}.$$

Ha $\overline{X,Y}$ nem δ irányú egyenes, akkor a VIII. axióma alapján a φ leképezés az $[A,B]$ kölcsönösen egyértelmű leképezése a $[\varphi(X), \varphi(Y)]$ -ra.

3.4 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Minden $\alpha' \subset \alpha$ konvex halmaz a egyenesre történő, párhuzamos vetítéssel kapott $\varphi(\alpha')$ képe szintén konvex halmaz.

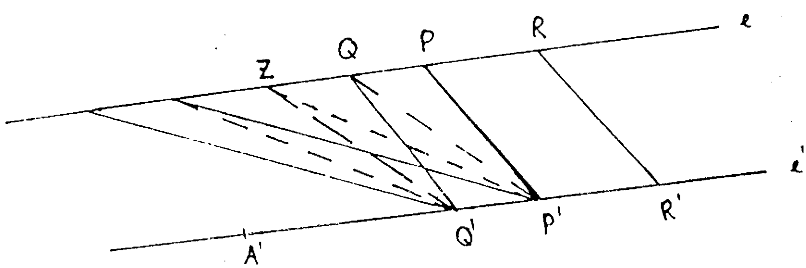
3.5 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Egy egyenesnek egyenesre történő párhuzamos vetítése, hol a vetítés iránya különbözik az egyenesek irányától, rendezéstartó leképezés.

Ha $X,Y,Z \in e$ tetszőleges ponthármas, ugy hogy Y az X és Z között van, akkor a 3.3 köv. alapján a $\varphi(Y)$ is a $\varphi(X)$ és $\varphi(Z)$ között van, hol $\varphi(Y),\varphi(X)$ és $\varphi(Z)$ egy f egyenes pontjai.

(Azaz, a párhuzamos vetítés az e-nek f-re történő monoton csökkenő v. növekvő fv-e. Ha pl. $X<Y<Z$, akkor $\varphi(X)<\varphi(Y)<\varphi(Z)$ vagy $\varphi(X)>\varphi(Y)>\varphi(Z)$ teljesül. Az egyik egyenes két rendezésének bármelyike izomorf a másik egyenes egyik rendezésével. Többszöri vetítéssel belátható, hogy egy egyenes két rendezése is izomorfizmus.)

3.6 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Egy tetszőleges e egyenes P kezdőpontú mindkét félegyenese végtelen halmaz.

Az e egyenes és a tér egy $A' \notin e$ pontja meghatároznak egy síkot. A VI. axióma alapján létezik az $e' \parallel e$. (1.ábra)



1. ábra

Az I. ax. alapján felvehető e'-n P', Q', R' pont (A'-től függetlenül), és legyen $Q'<P'<R'$. A $\overline{P,P'}$ nem párhuzamos e-vel, igy Q',R' $\overline{P,P'}$-vel párhuzamos vetülete e-n Q,R, melyekre a 3.3 és 3.5 következmény miatt $P\in]Q,R[$, s igy a P kezdőpontú egyik félegyenes sem üres halmaz.

Q'-t vetítsük $\overline{P'Q}$ -val párhuzamosan e-re; 1.4 következmény miatt létezik az e-vel való Z metszéspont, s a rendezéstartás miatt $Q \in]Z,P[$. A Q'-t $\overline{P',Z}$ -vel párhuzamosan vetítve ujabb R pont adódik, s a konstrukció végtelen sok pontot eredményez.

3.1 <u>TÉTEL</u>: Tetszőleges, α síkbeli egyenes esetén létezik az $\{\alpha \setminus e\}$ halmaznak két, α_1 és α_2, végtelen, konvex halmazra történő egyértelmű felbontása. Az α sík tetszőleges X_1, X_2 pontjára teljesül, hogy ha $X_1 \in \alpha_1$ és $X_2 \in \alpha_2$ akkor az $[X_1, X_2]$ metszi az e egyenest egy P pontban, és $P \neq X_i$ $(i=1,2)$.

<u>BIZONYÍTÁS</u>:

1. <u>A létezés igazolása</u>: Legyen e-t A pontban metsző α -beli egyenes a. Jelöljük φ -vel α -nak e-vel párhuzamos, a-ra történő vetítését, a_1 és a_2 -vel az e egyenes A kezdőpontú nyilt félegyeneseit.

Ezek a félegyenesek konvexek, és az $a \setminus \{A\}$ halmaz felbontását adják. $(a_1 \cup a_2 = a \setminus \{A\}$ és $a_1 \cap a_2 = \emptyset)$. Legyen α_1 azon α beli pontok halmaza, melyek képe a_1, α_2 pedig azoké, melyek képe a_2; ezek konvex halmazok. Az α_1, α_2 számossága legalább akkora, mint a_1 ill. a_2 -é.

2. <u>Egyértelműség</u>: Legyen α_1^x, α_2^x, az $\{\alpha \setminus e\}$ egy másik, konvex halmazokra történő felbontása, azaz $\alpha_1^x \cup \alpha_2^x = \{\alpha \setminus e\}$ és $\alpha_1^x \cup \alpha_2^x = \emptyset$. A $\varphi(\alpha_1^x)$ és a $\varphi(\alpha_2^x)$ halmazok is konvexek, tehát az a_1, a_2 félegyenesek valamelyikével egybeesnek. Igy az α_i^x halmazok valamelyikét az α_i $(i=1,2)$ halmazok valamelyike tartalmazza.

Mivel $\alpha_1^x \cup \alpha_2^x = \alpha_1 \cup \alpha_2 = \{\alpha \setminus e\}$ és az α_i-k egyike sem üres, igy vagy $\alpha_1^x = \alpha_1$ és $\alpha_2^x = \alpha_2$ vagy $\alpha_1^x = \alpha_2$ és $\alpha_2^x = \alpha_1$. Tehát az indexek sorrendjétől eltekintve az α_1^x, α_2^x felbontás egybeesik az α_1, α_2 felbontással.

3. Ha $X_1 \in \alpha_1$ és $X_2 \in \alpha_2$, akkor az $[X_1, X_2]$ metszi e-t. A feltételből következik, hogy a $\varphi([X_1, X_2])$ végpontjai az a_1 és a_2 -n vannak, ami azt jelenti, hogy ezen szakasznak az A belső pontja. Igy a VIII. axióma alapján az $[X_1, X_2]$-t az e

egyenes metszi.

3.3 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az előző tételben jellemzett α_1, α_2 halmazokat az α *sík* e egyenese által meghatározott *nyilt félsík*jainak nevezzük. Az $\alpha_1 \cup e$ és $\alpha_2 \cup e$-t az e által meghatározott *zárt félsík*oknak nevezzük.
Az e a félsíkok *határegyenese*, az e pontjaitól különböző pontok, *belső pontok*.

3.4 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Egy *félegyenes* vagy *szakasz metsz* egy *síkot* (nyilt vagy zárt *félsíkot*), ha az általa meghatározott egyenes metszi a síkot (a félsík által meghatározott síkot), és a metszéspont mindkét tekintett alakzatra illeszkedik.

<u>IX. axióma</u>: Tetszőleges α sík esetén létezik az $E \setminus \alpha$ halmaznak két olyan E_1, E_2 végtelen részhalmazra történő felbontása, amelyeknél tetszőleges X_1 és X_2 pontra $X_1 \in E_1$ és $X_2 \in E_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik az $[X_1, X_2] \cap \alpha = \{P\}$ egyelemű halmaz, és $P \neq X_i$ $(i=1,2)$.

3.5 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az axiómában leirt E_1 és E_2 halmazokat az α sík által meghatározott *nyilt félter*eknek nevezzük. Az $\alpha \cup E_1$ és $\alpha \cup E_2$ *zárt félterek*. α – a féltér *határsíkja* – pontjai *határpontok*, E_i pontjai – *belső pontok*. $(i=1,2)$

3.2 <u>TÉTEL</u>: Ha egy α síkot A pontban metsz egy a egyenes, akkor az egyenesnek az α határsíkú nyilt félterekkel közös pontjainak halmaza az e egyenes két, A kezdőpontú nyilt félegyenese.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen $B \in a$ és $B \neq A$, valamint $B \in E_1$.
Tekintsük az E_2 tetszőleges C pontját. Ha $C \in a$, az állítás igaz. Ha $C \notin a$, akkor tekintsük a C, a által meghatározott α' síkot.
IX. ax.: $[BC] \cap \alpha = Q$ és $Q \neq A$. $[BC] \subset \alpha'$, ezért

$$\left.\begin{array}{lll} Q \in \alpha' & \text{és} & A \in \alpha' \\ Q \in \alpha & \text{és} & A \in \alpha \end{array}\right\} \text{így } \alpha \cap \alpha' = \overline{A,Q} = b.$$

Legyen D az α' sík b által meghatározott azon félsíkjában, mint a C, és $D \in a$ teljesüljön. [CD] nem metszi a b-t, így α-t sem, ezért $D \in E_2$. Az α' b által meghatározott, C-t tartalmazó félsíkjában az a-nak A kezdőpontú egyik félegyenese van, s ennek bármely pontjáról belátható, hogy E_2-ben van. (A másik félegyenese E_1-ben).

3.3 <u>TÉTEL</u>: Ha α és β két különböző sík, akkor vagy $\alpha \cap \beta = \emptyset$, vagy az $\alpha \cap \beta$ pontjai kollineárisak.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ és $A \in \{\alpha \cap \beta\}$

Tekintsük az α sík A-ra illeszkedő két különböző, a,b egyenesét. Ha ezek közül az egyik illeszkedik β-ra is, a bizonyítás kész. Ha ez nem teljesül, akkor az előző tétel alapján az a egyenesen létezik $X_1 \in E_1$, $X_2 \in E_2$ pont, ahol E_1, E_2 a β által meghatározott nyilt féltereket jelentik. A IX. axióma miatt $[X_1, X_2]$ metszi β-t A-tól különböző B pontban. $\overline{A,B}$ a két sík közös egyenese. Ettől különböző közös pont nincs, mert az 1.2 tétel alapján akkor $\alpha = \beta$ teljesülne.

3.6 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Ha α és β két különböző sík és van közös egyenesük, akkor a két síkot *metszőnek* nevezzük, közös egyenesüket *metszésvonal*nak.

Síkot és *félsíkot* ill. *két félsíkot metszőnek* nevezünk, ha az általuk meghatározott síkok metszők és a metszésvonalnak legalább egy pontja mindkét geometriai alakzatra illeszkedik.

3.7 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: *Két síkot párhuzamosnak* nevezünk, ha metszetük üres halmaz.

3.7 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Ha két sík metszi egymást, az egyiknek a másik által határolt félterekkel közös részei a közös határegyenesű, különböző félsíkok.

Az m-t metsző α -beli egyenesek két, a metszéspont által meghatározott félegyenesei a 3.2 tétel alapján a két β határú féltérben vannak, s a félsíkok konvexitása alapján α két, m határú félsíkjában is. (β -re hasonlóan belátható az állítás.)

3.4 <u>TÉTEL</u>: Két, nem párhuzamos invariáns sík közös egyenese invariáns egyenes.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: $F(\alpha) = \alpha$, $F(\beta) = \beta$ $\alpha \cap \beta = m$,

$m \subset \alpha$ és $m' \subset \alpha$

$m \subset \beta$ és $m' \subset \beta$. $m=m'$ mert két metsző síknak két közös egyenese nem lehet. (Ha $\alpha = \beta$, az állítás nyilvánvaló).

IRODALOM

[1] G.Choquet, Geometria, Mir (Moszkva), 1970.

[2] Dr. Hajós György, Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

[3] Dr. Pelle Béla, Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[4] Radó Ferenc - Orbán Béla, A geometria mai szemmel, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1981.

[5] Dr. Redling Elemér, Geometriai transzformációk, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[6] Dr. Szendrei János, Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[7] Vigassy Lajos, Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.