CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAOKTATÁSI KISÉRLETRŐL III.RÉSZ

ABSTRAKTO: *(Pri eksperimento de mezlerneja geometrioinstruado. III-a parto).*

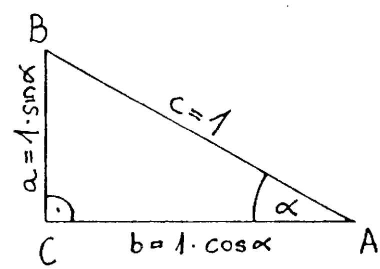
Tiu ĉi laboraĵo estas prezentado de tiu eksperimento, kiu rolas en la titolo de teksto pri mezlerneja geometrio, kaj ĝi donas resuomon pri la parto de la studmaterio de la III-a klaso. Unue prezentas la skribaĵo tiun instrumateriojn, kiujn oni ellaboris dum la lernojaro.

Instrumaterioj: komparo inter la angulofunkcioj de la pintanguloj, ŝkalara produktado de vektoroj kaj praktikaj aplikadoj de tiuj. Plue estas en teksto la koordinatogeometrio de la linio, la cirklo, la elipto, hiperbolo kaj parabolo kaj iliaj praktikaj aplikadoj.

Duaparte-nature en la temo okazas intertempe metodaj kaj simpligataj provoj por tiu celo, ke la gelernantoj alproprigu plej efike kaj plej facile tiun priskribitan studmaterion.

Ebben a dolgozatban a III. osztályban tanított geometriai tananyagot, annak tanításának egy módját és a tanítás esetleges eredményeit szeretnénk megismertetni. A II. osztályban ismertettük a négy szögfüggvény értelmezését tetszőleges szögre, vizsgáltuk tulajdonságaikat, általam szerencsésnek tartott ábraösszességek segítségével vizsgáltuk kapcsolatukat. Külön figyelmet szenteltünk a negatív szögek, az $\alpha^{\circ} \pm 180^{\circ}$-os, a $180^{\circ}-\alpha^{\circ}$-os, a $90^{\circ}-\alpha^{\circ}$-os szögek szögfüggvényeire, és a könnyebb tanulás és megjegyezhetőség érdekében kerestük a kapcsolatukat az egybevágósági transzformációkkal.

A III. osztály első tananyagrésze a hegyesszögek szögfüggvényei közötti kapcsolatok felismertetése volt.



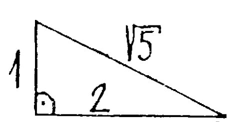
1. ábra

A $0^{\circ}<\alpha<90^{\circ}$ tartományban mindegyik szögfüggvényértéke pozitív. Az 1. ábrán láthatók alapján a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ összefüggés és a $tg\alpha$, valamint a $ctg\alpha$ értelmezése alapján hamar felismerték a tanulók, hogy bármelyik szög szögfüggvényének megadásával a szög további három szögfüggvényértéke meghatározható. Sőt érdekes volt tapasztalni azon felismerésüket is, hogy a szögfüggvényérték megoldásával (még ha irracionális is a szám, pl: $\frac{5}{2}$) a szögfüggvényértékhez tartozó szög megszerkeszthető is.

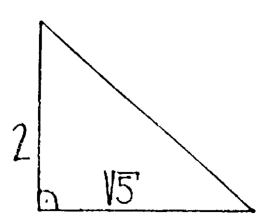
Pl.:

$tg\ \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad$ $ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$

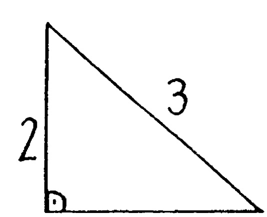
$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$



2. ábra



3. ábra



4. ábra

A következő anyagrész két szög összege, különbsége, adott szög kétszerese és fele szögfüggvényértékeinek meghatározása volt az adott szögek szögfüggvényértékeitől. Természetesen az értelmezéshez kapcsolódva az $\alpha + \beta$ szöghöz tartozó egységvektor koordinátáit határoztuk meg $\cos(\alpha + \beta)$ -t és $\sin(\alpha + \beta)$ -t, majd a már ismert összefüggések ismeretében a többi összegzési tételt is. A félszögek szögfüggvényeit azért emeltük ki méginkább, mert gyakorlati tapasztalatunk, hogy igen sok feladat megoldásában van rá szükség, s inkább a kiszámítás módját ajánlottuk megjegyezni a $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$; $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$ összefüggések összevonásaival.

A szögfüggvények transzformációi című anyagrész adott újabb alkalmat a geometriai transzformációk ismétlésére, összefoglalására. Innentől kezdve a szögeket radiánokban mértük.

Természetesen mindegyik szögfüggvény esetén elvégeztük az alábbi transzformációkat:

I. 1. $y = -f(x)$; x tengelyre való tükrözés;

2. $y = a \cdot f(x)$, "a" valós szám; y tengely irányú nyújtás; (ha $0<a<1$, "zsugorítás", ha $a>1$ nyújtás, ha $a<0$, akkor még x tengelyre vonatkozó tükrözés is);

3. $y = f(x)+b$; y tengely irányú eltolás; (ha $b>0$, akkor az y tengely pozitiv; ha $b<0$, akkor az y tengely negativ ága irányú az eltolás).

Az 1. és 2. esetében a fixpontokra ügyeltünk, míg a 3-ban a $b=0$ esetén az azonos leképezés fogalmát emeltük ki.

E három transzformációt *érték* vagy *függvénytranszformációnak* neveztük.

II. 1. $y = f(-x)$, y tengelyre való tükrözés;

2. $y = f(cx)$, "c" valós szám; x tengely irányú nyújtás; (ha $c>1$ "zsugorítás", ha $0<c<1$ nyújtás, az $x=0$ -hoz tartozó pont fixpont);

3. $y = f(x+m)$, x tengely irányú eltolás; (ha $m>0$ az x tengely negatív, ha $m<0$ az x tengely pozitív ága irányú az eltolás).

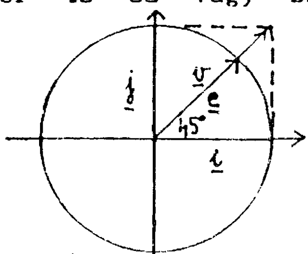
E három transzformációt *változó transzformációnak* hívtuk. Persze oldottunk meg kevésbé és igen bonyolult feladatokat is, az utóbbiakat a továbbtanulni készülőkkel főleg külön foglalkozásokon (pl.: szakkörön).

A trigonometrikus egyenletek megoldásában újat a vektorokkal való intenzívebb foglalkozás adott.

Álljon itt erre egy nagyon egyszerű példa.

Oldjuk meg a $\cos x - \sin x = 0$ egyenletet!

MEGOLDÁS: Legyenek az $\underline{e}$ egységvektor koordinátái $\cos x$ és $\sin x$. Az egyenlet szerint $\cos x = \sin x$, vagyis $\underline{e}$ egyállású a $\underline{v} = a(\underline{i}+\underline{j})$ vektorral (ahol "a" tetszőleges), hiszen a $\underline{v}$ vektor az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egységvektorok által meghatározott szög felezőjére (rombusz-négyzet) illeszkedik. Tehát az $\underline{e}$ vektor az $\underline{i}$ vektor 45^{o}-os vagy 225^{o}-os elforgatásával áll elő,



5. ábra

vagyis

$x_1 = \frac{\Pi}{4} + k\cdot 2\Pi$, vagy

$x_2 = \frac{5\Pi}{4} + k\cdot 2\Pi$, ahol $k \in Z$.

Mivel $\frac{5\Pi}{4} + k\cdot 2\Pi = \frac{\Pi}{4} + \frac{4\Pi}{4} + k\cdot 2\Pi = \frac{\Pi}{4} + \Pi(2k+1)$, és mivel 2k páros, 2k+1 páratlan egész, a kétfajta gyök együtt írva

$x = \frac{\Pi}{4} + l\Pi$, ahol $l \in Z$.

Feladatokat hagyományos úton is oldottunk meg.

Nagy figyelmet szenteltünk a feladatok megoldása után az ellenőrzésre, illetve az állásfoglalásra abban az értelemben, hogy a kapott eredmények valóban megoldásai a feladatoknak. Oldottunk meg persze trigonometrikus egyenletrendszereket is, az összefüggések alkalmazására pedig igazoltunk trigonometrikus azonosságokat is.

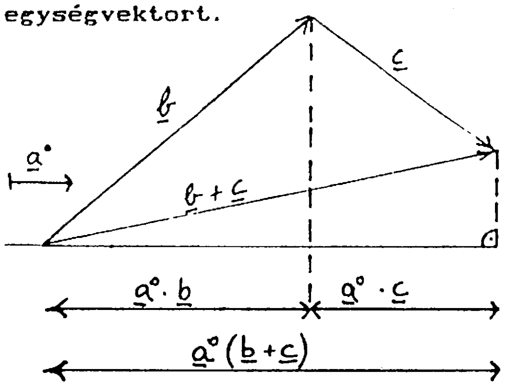
A cosinustétel valamint a koordinátageometriában az egyenesek kölcsönös helyzetének meghatározása igényelheti két vektor skaláris szorzatának fogalmát.

DEFINICIÓ: Két vektor skaláris szorzatán a két vektor hosszának és a körbezárt szögük cosinusának szorzatát értettük. Jele pl.: $\underline{a}\cdot\underline{b}$ ami az $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$ -val egyenlő, s mivel mindhárom tényező valós szám $\underline{a}\cdot\underline{b}$ is az.

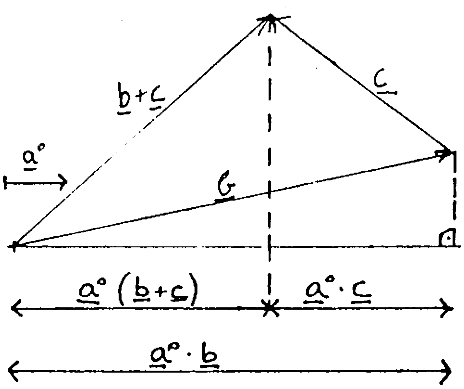
Ha a két vektor közül az egyik $\underline{0}$, a szögük, így cosinusa sem egyértelmű, a skaláris szorzat mégis egyértelmű, mégpedig nulla. Bebizonyítottuk tulajdonságait, s néhány megjegyzést tettünk:

1. $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$, (kommutativ);
2. $\lambda\underline{a}$ esetén $(\lambda\underline{a})\cdot\underline{b} = \lambda(\underline{a}\cdot\underline{b})$;
3. $\underline{a}(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c}$ (disztributiv);

Ennek bizonyítását is megmutattuk kétféle felvétel esetén is. Tekintettük az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$, valamint az $\underline{a}$ irányába eső $\underline{a}^0$ egységvektort.



6. ábra



7. ábra

Nyilvánvaló, hogy - mint az ábra is mutatja - pl: az $\underline{a}^o \cdot \underline{b}$, a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vagy $\underline{a}^o$ vektor irányába eső merőleges vetületének hosszaként is felfogható.

Igy az ábráról

$$\underline{a}^o \cdot (\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}^o \cdot \underline{b} + \underline{a}^o \cdot \underline{c} \quad \text{adódott.}$$

Ha az egyenlőséget $|\underline{a}|>0$ számmal megszoroztuk, az

$$|\underline{a}| \cdot \underline{a}^o \cdot (\underline{b}+\underline{c}) = |\underline{a}| \cdot \underline{a}^o \cdot \underline{b} + |\underline{a}| \cdot \underline{a}^o \cdot \underline{c} \quad \text{egyenlőséget}$$

kaptuk, ami az $|\underline{a}| \cdot \underline{a}^o = \underline{a}$ miatt az

$$\underline{a} \cdot (\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} \quad \text{bizonyítandó}$$

állítást jelentette.

A skaláris szorzás kommutatív tulajdonsága miatt

$$(\underline{b}+\underline{c}) \cdot \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{a} \quad \text{is fennáll.}$$

Megjegyzés: Az eljárás ismétlésével belátható, az

$$(\underline{a}_1+\underline{a}_2+\underline{a}_3+ \dots +\underline{a}_n) \cdot \underline{b} = \underline{a}_1 \cdot \underline{b}+\underline{a}_2 \cdot \underline{b}+ \dots +\underline{a}_n \cdot \underline{b}$$

összefüggés is.

A későbbiek érdekében még megjegyeztük, hogy ha $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ akkor $\underline{a} \cdot \underline{b}>0$, ha szögük (α) $0^o \leq \alpha < 90^o$, $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ ha $\alpha=90^o$ és $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0$, ha $90^o < \alpha \leq 180^o$.

Egyébként $\underline{a} \cdot \underline{b}=0$ akkor, ha valamelyik vektor $\underline{0}$ vagy $\alpha=90^o$.

Két nem nullvektor esetén tehát $\underline{a} \cdot \underline{b}$ akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Továbbá $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$ és $|\underline{a}| \geq 0$;

$$(\underline{a}+\underline{b}) \cdot (\underline{a}+\underline{b}) = \underline{a}^2+2\underline{ab}+\underline{b}^2 \ ;$$

$$(\underline{a}-\underline{b}) \cdot (\underline{a}-\underline{b}) = \underline{a}^2-2\underline{ab}+\underline{b}^2 \ .$$

Mivel skaláris szorzatnál két tényezővektorról van szó, ezért asszocivitásról szó sem lehet.

Nem értelmezhetők 2-nél magasabbfokú hatványai sem.

Ez utóbbiak is inkább a továbbtanulók kedvéért kerültek belátásra.

Ezután mivel $\underline{i}^2=\underline{j}^2=1$ és $\underline{i} \cdot \underline{j}=0$,

két vektor skaláris szorzatát megfelelő koordinátáik szorzatösszegeként, egy vektor önmagával alkotott skalárszorzatát koordinátái négyzetösszegeként nyertük, hosszát pedig gyökvonással.

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = x_1x_2+y_1y_2;$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{és} \quad |\underline{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

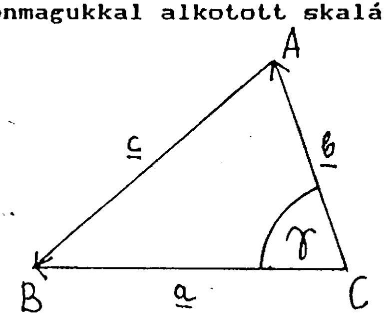
A skalárszorzatból igy lehetett könnyen nyerni két vektor szögét. Ha $\underline{a}_1\,(x_1;y_1)$ és $\underline{a}_2\,(x_2;y_2)$, szögük α, akkor az

$$\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2 = |\underline{a}_1|\cdot|\underline{a}_2|\cdot\cos\alpha \text{ -ból}$$

$$\cos\alpha = \frac{\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2}{|\underline{a}_1|\cdot|\underline{a}_2|}\,,$$

másképpen $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, s táblázattal a szög nyerhető.

Természetesen két egyenes szögét irányvektoraik szögéből nyerhettük. A cosinustétel az ábra alapján és vektorok önmagukkal alkotott skalárszorzatából adódik:



8. ábra

$$\underline{c} = \underline{a}-\underline{b}$$

$$\underline{c}^2 = \underline{a}^2-2\underline{a}\underline{b}+\underline{b}^2; \text{ s ha}$$

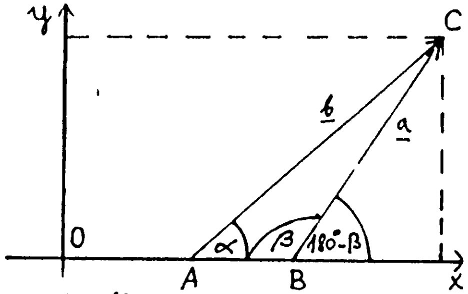
$$\underline{a}^2=|\underline{a}|^2=a^2; \quad \underline{b}^2=|\underline{b}|^2=b^2,$$

$$|\underline{a}|= a, \quad |\underline{b}|= b, \text{ akkor}$$

$$c^2= a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma\,.$$

A γ -ról az előbb elmondottak miatt már fölösleges szólni.

Az alábbi ábra alapján a sinustétel is igen könnyen adódott.



9. ábra

Az AC második koordinátája $|\underline{b}|\cdot\sin\alpha$,

A BC második koordinátája $|\underline{a}|\cdot\sin\beta$

De ezek egyenlők, és $|\underline{a}|=a$, $|\underline{b}|=b$ miatt $b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$

vagyis $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, általánosabban $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

A következő fejezet az analitikus geometria volt. E fejezetben a geometriai alakzatok pontjainak kölcsönösen egyértelmű módon rendezett számpárokat feleltettünk meg. A geometriai feladatok megoldása során algebrai fogalmakkal dolgoztunk, s a kapott eredményeket ismét a geometria nyelvén fogalmaztuk meg. Mivel a sík analitikus geometriájáról volt szó, alakzataink az egyenes, a kör, az ellipszis, a hiperbola és a parabola voltak. Ezek tulajdonságait, kölcsönös helyzeteit vizsgáltuk. A felsorolt alakzatoknak egyenleteket feleltettünk meg. Egy alakzat egyenletén olyan összefüggést értettünk, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái elégítettek ki, más pontok koordinátái nem. Más szavakkal: az alakzat minden pontja kielégíti a szóbanforgó egyenletet, s ha egy pont koordinátái kielégítik az egyenletet, akkor ez a pont illeszkedik az alakzatra.

Persze mi a pontokat pontokhoz tartozó helyvektorokkal is megadtuk, így beszélhettünk a pontokból álló alakzat vektoregyenletéről is. A vektoregyenlet olyan összefüggés, amelyet az alakzat pontjainak helyvektorai kielégítettek, más pontok helyvektorai azonban nem. Az alakzat vektoregyenletében változóként szereplő helyvektort a futópont helyvektorának nevezzük. Az *egyenes* koordinátageometriáját az alábbi módon tárgyaltuk. Felírtuk egy adott $\underline{r}_0$ helyvektorú ponton átmenő adott $\underline{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres vektoregyenletét:

$$\underline{v} = \underline{r}_0 + t\underline{v} \quad ; \quad t \text{ paraméter.}$$

Mivel ez két skalár egyenletet jelent, előállt az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + tv_1$$

$$y = y_0 + tv_2 \ .$$

A t-t kiiktatva $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$ -höz jutva átrendezés után a

$v_2x-v_1y = v_2x_0-v_1y_0$ -hez, az ugynevezett paramétermentes egyenlethez jutottunk. (A $\underline{v}$ nem párhuzamos a tengely egyikével sem.) A $v_2=A$, $a-v_1=B$ és $v_2x_0-v_1y_0=C$ helyettesítés után az egyenes egyenlete $Ax+By=C$ alakban volt írható. Mivel $\underline{v}$-vel együtt $\lambda\underline{v}$ is irányvektora az egyenesnek, így egy egyenesnek végtelen sok egyenlete van.

Az x és y tengelyekkel párhuzamos egyenesek irányvektorait $(v_1;0)$ illetve $(0;v_2)$ jelentette, így az ezekkel párhuzamos egyenesek egyenletei amennyiben a $P_0(x_0;y_0)$ pontra illeszkednek

$$y = y_0 \quad \text{illetve} \quad x = x_0 .$$

A koordinátatengelyek egyenletei rendre $y = 0$, $x = 0$.

A P_1 és P_2 pontok helyvektorai pl.: $\underline{p}_2-\underline{p}_1$ helyvektorainak különbsége lehet e két pontra illeszkedő egyenes irányvektora, (amely pl.: a P_1-re illeszkedik a felírás szempontjából) így

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y = (y_2-y_1)x_1-(x_2-x_1)y_1$$

alakban, sőt átrendezve

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$

jól megjegyezhető alakban volt irható. Ez tehát két adott ponton átmenő egyenes egyenlete. Amikor az x tengely $P_1(a;0)$ és az y tengely $P_2(0;b)$ két pontján megy át az egyenes, akkor az un. tengelymetszetes alakhoz jutottunk:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Több feladat megoldásában előnyös az alkalmazása.

Amikor idáig jutottunk elméletben, utána konkrét feladatokon keresztül újra végiggondoltuk, végigcsináltuk, gyakoroltuk az egészet. Majd vektor 90°-os elforgatottjának koordinátáit határoztuk meg azon az alapon, hogy $\cos(\alpha+90^\circ)=-\sin\alpha$ és $\sin(\alpha+90^\circ)=\cos\alpha$.

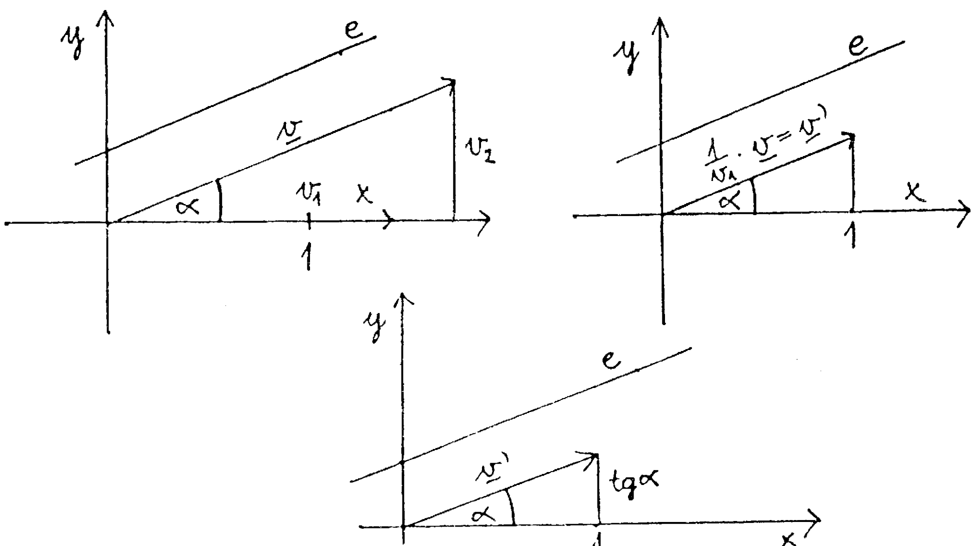
Igy a $\underline{v}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ + 90°-os elforgatottja $\underline{v}^*(-\sin\alpha;\cos\alpha)$,

továbbá a $\underline{v}$ − 90°-os elforgatottja $\underline{v}^{**}(\sin\alpha;-\cos\alpha)$.

Ezek alapján aztán a normálvektor előállíthatósága alapján – az $\underline{n}(A;B)$ – az egyenes egyenlete $Ax+By=Ax_0+By_0$.
Két egyenes metszéspontját az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásával határoztuk meg.
Igen fontos volt az egyenes és az elsőfokú függvény kapcsolatának vizsgálata, s beláttuk, hogy az $Ax+By=C$ egyenlet minden olyan esetben egyenes egyenlete, ha A és B egyszerre nem nullák. $A=B=C=0$ esetén a sík minden pontja kielégíti az egyenletet.
Könnyű volt kimutatni, hogy két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha az egyenesek irányvektorai megfelelő koordinátáinak hányadosa egymással egyenlő, és akkor és csak akkor merőleges, ha irányvektoraik megfelelő koordinátáinak szorzatösszege nulla. Ez utóbbi így is írható: $v_1v_1'+v_2v_2'=0$,

másképpen $\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_2'}{v_1'} = -1$.

Az egyenes iránytényezős alakja sok feladat megoldása szempontjából előnyös. Legyen $\underline{v}$ $(v_1;v_2)$ egy egyenes irányvektora.



10. ábra

Ehelyett az $\frac{1}{v_1}\cdot \underline{v} = \underline{v}' \left[1;\ \frac{v_2}{v_1}\right] = \underline{v}'\ (1;tg\alpha) = \underline{v}'\ (1;m)$ írható, ha $m=tg\alpha$ jelölést is bevezettük.

Az utóbbi irányvektorral felírt $P_1\ (x_1\ ;y_1\ )$ ponton átmenő egyenes egyenlete $mx-y = mx_1-y_1$, átrendezve

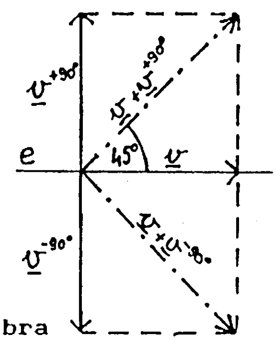
$$y-y_1 = m(x-x_1) ,$$

az adott ponton átmenő adott iránytényezőjű egyenes egyenlete. Ha a $P_1(0;b)$, akkor $y=mx+b$, az egyenes iránytényezős alakja. A korábban leírtak alapján annak szükséges és elégséges feltétele, hogy két egyenes egyállású illetve merőleges legyen

$$m_1=m_2 \qquad \text{illetve} \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2} .$$

Gyakran fordult elő, hogy adott egyenessel 1. 45^o-os, 2. 30^o-os, 3. 60^o-os szöget bezáró egyenesek egyenletét, illetve 4. két egyenes szögfelezőinek egyenletét kellett felírni.

1. Az ábráról leolvasható, hogy a két egyenes



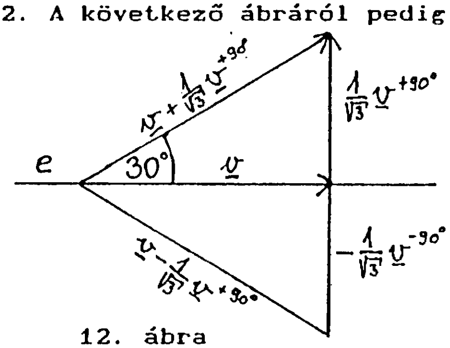
11. ábra

irányvektora a $\underline{v} + \underline{v}^{+90^o}$,

illetve a $\underline{v} + \underline{v}^{-90^o}$;

ahol $\underline{v}$ az egyenes irányvektora.

2. A következő ábráról pedig, hogy a két egyenes irányvektora



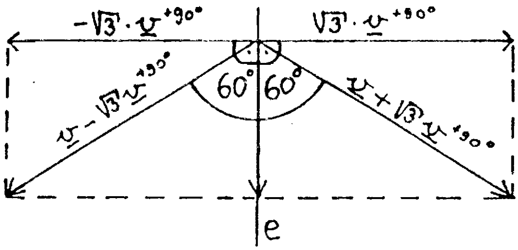
12. ábra

$\underline{v} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \underline{v}^{+90^o}$, illetve

$\underline{v} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \underline{v}^{-90^o}$,

ahol $\underline{v}$ az egyenes irányvektora.

3. A két egyenes irányvektora:



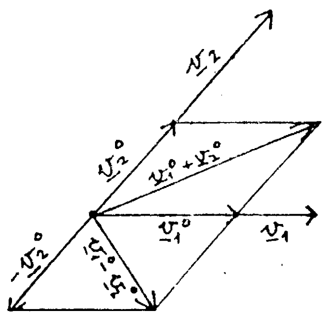
$$\underline{v} - \sqrt{3}\ \underline{v}^{+90^\circ}$$

$$\underline{v} + \sqrt{3}\ \underline{v}^{+90^\circ}$$

ahol $\underline{v}$ az egyenes irányvektora.

13. ábra

4. A $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ irányvektorú metsző egyenespár szögfelezőinek irányvektorai



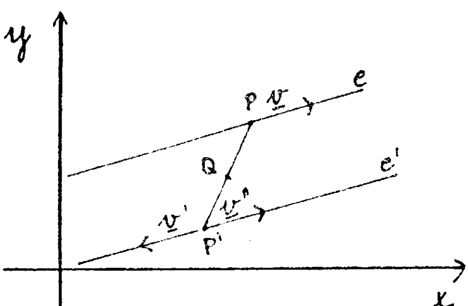
$$\pm\left(\underline{v}_1^\circ + \underline{v}_2^\circ\right),$$

$$\pm\left(\underline{v}_1^\circ - \underline{v}_2^\circ\right),$$

ahol $\underline{v}_1^\circ$ a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2^\circ$ a $\underline{v}_2$ irányvektorokkal egyirányú egységvektorok (A rombusz átlói felezik a a rombusz szögeit).

14. ábra

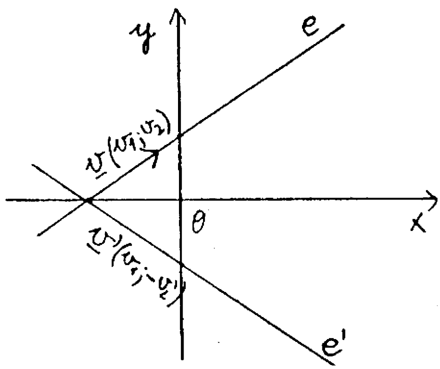
Vektorok segítségével egyenes pontra vonatkozó tükörképének irányvektora az eredeti irányvektorával egyállású.



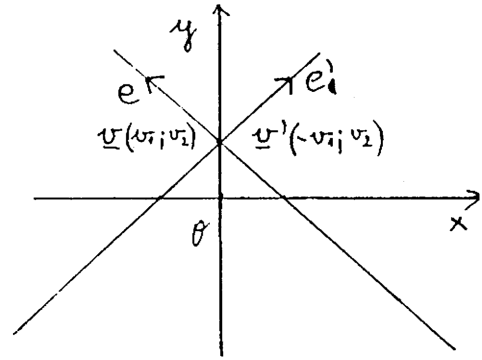
Tetszőleges $P \in e$ Q-ra vonatkozó tükörképén e-vel párhuzamos egyenes tükörképét felirni egyszerű.

15. ábra

Az egyenes x és y tengelyre vonatkozó tükörzéskor a képegyenes irányvektora az ábra alapján megállapítható volt.

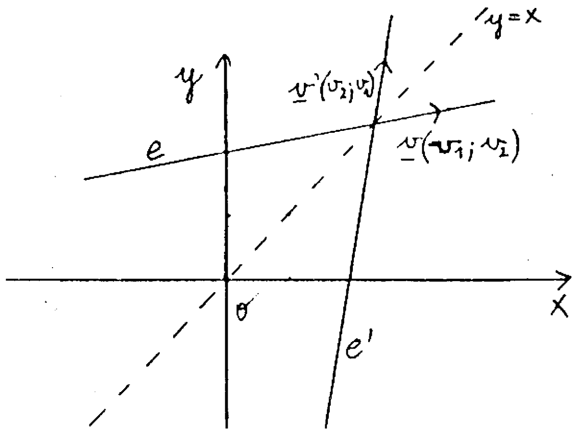


16. ábra



17. ábra

Az egyenes y=x tengelyre tükrözésekor a kép irányvektora pedig az alábbi ábráról olvasható le.



18. ábra

Ezek a felismerések nagyon felgyorsíthatják a szóbanforgó tulajdonságú egyenesek egyenletének felírását, ami a középiskolás tanulóknak a vektorokkal történő munkát szimpatikussá teheti.

Két egyenes irányvektorának ismeretében a két egyenes által bezárt szög a két vektor skalárszorzatából került meghatározásra

$$\cos\alpha = \frac{v_{11}\cdot v_{21} - v_{12}\cdot v_{22}}{\sqrt{v_{11}^2+v_{12}^2}\cdot\sqrt{v_{21}^2+v_{22}^2}}\text{ , amitől}$$

$\cos\alpha = 0$ esetén $\alpha = 90^o$, $\cos\alpha > 0$ esetén α hegyesszög, $\cos\alpha < 0$ esetén α tompaszög.

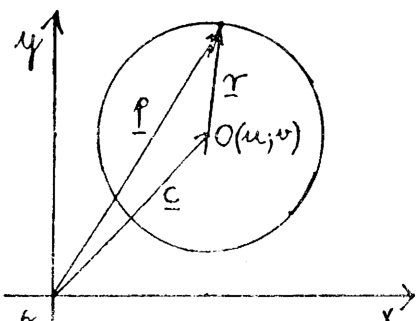
Pont és egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük. Ezt úgy határoztuk meg, mint két pont távolságát (persze koordináták segítségével).

A kör, ellipszis, hiperbola és parabola koordinátageometriája

Először megadtuk mindegyiknek, mint mértani helynek a definicióját, és ezután határoztuk meg egyenletüket, jellemzőiket.

I.

a. A kör egyenlete



19. ábra

$\overrightarrow{CP} = \underline{p} - \underline{c}$

$|\overrightarrow{CP}| = |\underline{p} - \underline{c}| = r$

$\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} = r$,

másképpen

$(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$.

Ha $u=v=0$, akkor $x^2+y^2=r^2$ origó középpontú kör.

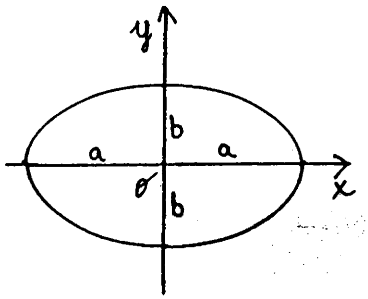
Kimutattuk, hogy az

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+Exy+F=0$ akkor kör egyenlete, ha $A=B$, $E=0$, továbbá teljes négyzetté kiegészítés után

$(x-u)^2+(y-v)^2= s$ alakba írható; ahol u, v és s az A,C,D,E számokból áll elő és $s>0$. Ha $s=0$ csak az $(u;v)$ elégíti ki, ha $s<0$ akkor nincs az egyenletet kielégítő pont, tehát ekkor nem kör egyenletéről van szó.

b. Az olyan ellipszis egyenletét vezettük le, amelynek szimmetriaközéppontja az origó, tengelyei a koordinátatengelyre illeszkednek.

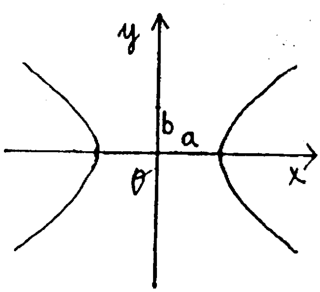
Egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$



20. ábra

c. Továbbá az olyan hiperbola egyenletét is levezettük, amelynek középpontja az origó, tengelyei a koordinátatengelyekre illeszkednek.

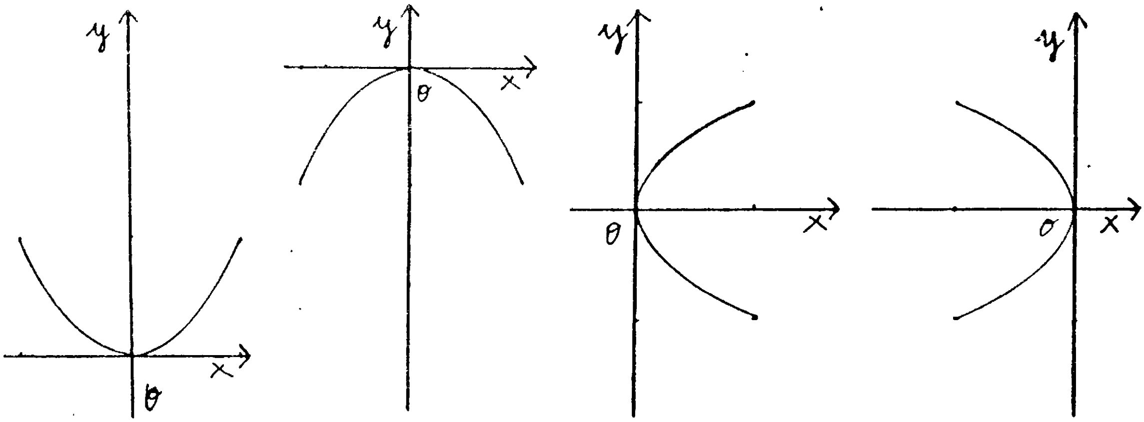
Egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$



21. ábra

d. Végül olyan parabolák egyenleteit vezettük le, amelyek csúcsa az origó, szimmetriatengelyük pedig az x tengely pozitív és negatív ága, illetve az y tengely pozitív és negatív ága.

Egyenleteik rendre $y^2=2px$, $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$.

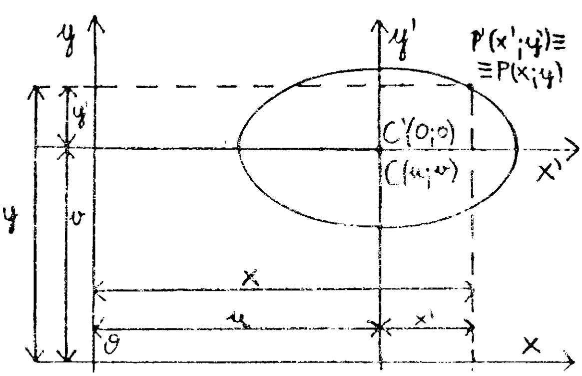


22. ábra

Ezek után koordinátatranszformációval elkészítettük a nem origó középpontú 1. ellipszis, 2. hiperbola egyenletét, amelynek tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, illetve 3. parabolák egyenletét, amelyek tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyek valamelyikével.

II.

1. A C(u;v) középpontú, x és y tengellyel párhuzamos 2a nagy-, és 2b kistengelyű ellipszis egyenlete.



23. ábra

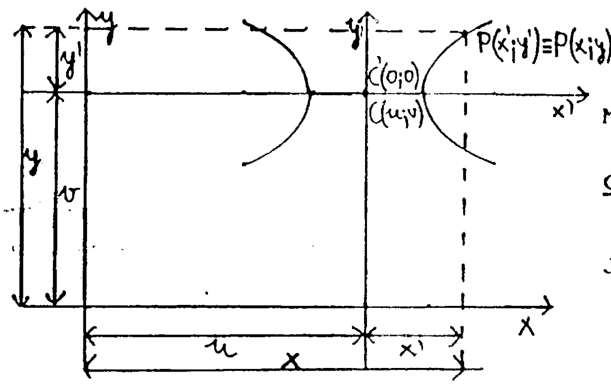
Az x';y' rendszerben az ellipszis origó középpontú egyenlete

$$\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 1$$

Az ábráról leolvasható, hogy $x'=x-u$, $y'=y-v$, amit az előbbi egyenletbe írva kaptuk az igért egyenletet:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 .$$

2. A $C(u;v)$ középpontú, x és y tengellyel párhuzamos 2a valós-; és 2b melléktengelyű hiperbola egyenlete.



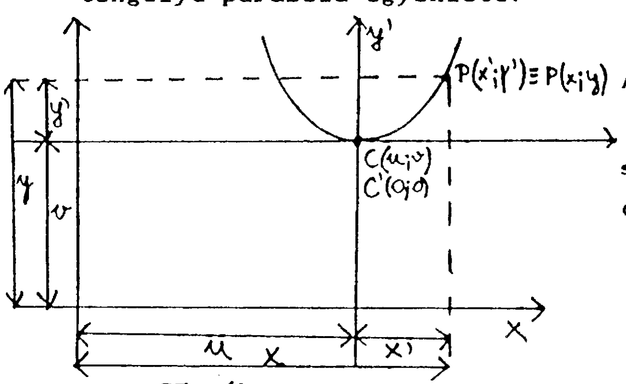
24. ábra

Mint előbb, az

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \text{ -hez}$$

jutunk.

3. A $C(u;v)$ tengelypontú y tengely pozitív ágával párhuzamos tengelyű parabola egyenlete.



25. ábra

Az $x'=x-u$ és $y'=y-v$ felhasználásával az $x'^2=2py'$ -ből $(x-u)^2=2p(y-v)$ adódik.

Hasonlóan kapjuk a további háromféle parabola egyenletét:

$(x-u)^2 = -2p(y-v)$,

$(y-v)^2 = 2p(x-u)$ és

$(y-v)^2 = -2p(x-u)$ alakban.

Ha az 1-3 egyenleteket átalakítottuk, másodfokú kétismeretlenes egyenletekhez jutottunk. Megfordítva: bizonyos feltételeknek eleget tevő másodfokú kétismeretlenes egyenletek ellipszist, hiperbolát, illetve parabolát határoztak meg.

Természetesen megvizsgáltuk egyenesek, körök, ellipszisek, hiperbolák, parabolák közül bármely kettőnek a kölcsönös helyzetét. Egyenleteikből egyenletrendszereket alkottunk, azok megoldásainak száma a két alakzat közös pontjainak számát adta. Érdekes volt két alakzat érintési problémáinak vizsgálata, hiszen ekkor másodfokú egyenletrendszert kellett megoldanunk a kérdések megválaszolásához, a másodfokú egyenlet diszkriminánsának előjelétől függően aztán levontuk a megfelelő tanulságokat.

Külön foglalkoztunk az origó középpontú hiperbola és az origón átmenő egyenes kölcsönös helyzetével.

Oldjuk meg tehát az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ és $y=mx$ egyenletekből álló egyenletrendszert pl. behelyettesítő módszerrel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 ,$$

$$x^2b^2 - a^2m^2 = a^2b^2 .$$

a/ Ha $b^2-a^2m^2 = 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, ugyanis $x^2 \cdot 0 = a^2b^2$. Vagyis $b^2=a^2m^2$, amiből $|m|=\left|\frac{b}{a}\right|$, ekkor az origón átmenő egyenes és a hiperbola nem metszik egymást.

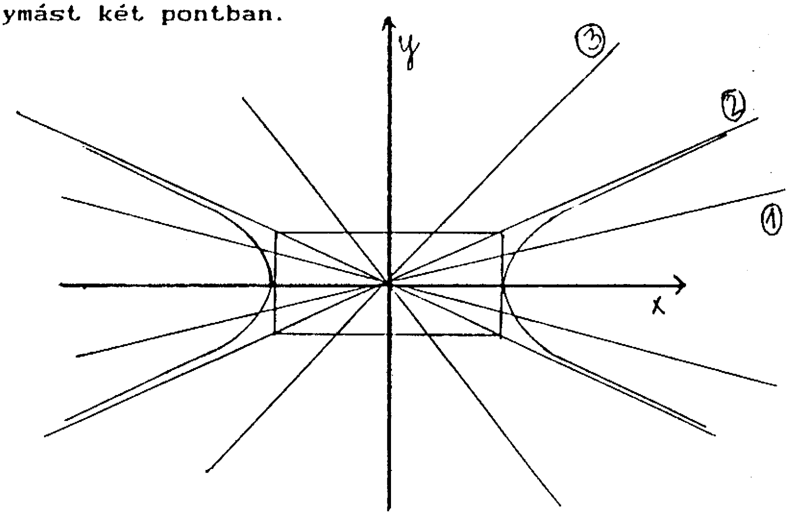
b/ Ha $b^2-a^2m^2 < 0$, akkor sincs megoldása. Vagyis ha $b^2<a^2m^2$, amiből $|m|>\left|\frac{b}{a}\right|$, az egyenes és a hiperbola nem metszik egymást.

c/ Ha $b^2-a^2m^2 > 0$ akkor a megoldások

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2b^2}} ; \qquad y_1 = \frac{m \cdot ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}} \quad \text{és}$$

$$x_2 = -\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2b^2}} ; \qquad y_2 = -\frac{m \cdot ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}} ,$$

vagyis, ha $|m|<\left|\frac{b}{a}\right|$, az egyenes és a hiperbola metszik egymást két pontban.



26. ábra

A 2-es jelzésű egyenesek nem metszik a hiperbolát, az 1-esek metszik, a 3-asok ismét nem. A 2 jelűek az 1 és 3 jelűeket elválasztják, mondhatnánk hogy a 2 jelűek az első nem metszők, ezeket az aszimptotáknak nevezzük, amelyek a hiperbolát tetszőlegesen megközelítik, de el nem érik. Ezzel azért foglalkoztunk, mert ez az út is elvezethet a végtelen távoli elemek értelmezéséhez, amely a továbbtanulás szempontjából érdeklődésre tartott számot.

IRODALOM

[1] Az érvényben levő általános iskolai tanterv.

[2] Az érvényben levő középiskolai tanterv.

[3] A forgalomban levő általános iskolai tankönyvek.

[4] A forgalomban levő középiskolai tankönyvek.

[5] Dr. Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, 1960.

[6] Dr. Pelle Béla: Geometria Tankönyvkiadó, 1974.

[7] Dr. Cservenyák János: A geometria középiskolai szintű feldolgozása transzformációkkal és vektorokkal. Egyetemi doktori disszertáció, 1977.