PELLE BÉLA

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK AZ ÁLTALÁNOS ISKOLÁBAN

RESÜMEE: *(Geometrische transformatione in der Schule I) Seit eineger Zeit verstärken sich die Versuche, den geometrischen Unterricht in den Prozeß der Urngestaltung und Modernisierung des mathematichen Unterrichts dadurch einzubeziehen, daß den eindeutigen (geometrischen) Abbildungen der Ebene auf sich, den Transformationen, der ihnen gebührende zentrale Platz eingeräumt wird. Dem Vorschlag liegt ein axiomensystem Zugrunde, das aus dem Hilbertschen durch gewisse Änderungen entsteht. Die Hilbertxchen Kongruenzaxiome werden durch solche der Spiegelung ersetzt, durch Zusammensetzung von Spiegelungen die Bewegungen (Kongruenztransformatione) gewonnen. Mit diesen Transformationen untersucht man die Eigenschaften Figuren der Ebene. Diese Verhandlung muß man in der Grundschule gegründen.*

Der propädeutische Unterricht erarbeitet wesentliche Inhalte der Hilbertschen Axiomengruppen der Verknüpfung, Anordnung, Parallelität sowie gewisse Sachverhalte der Kongruenzlehre (gleich lange Strecken, gleich große Winkel, Spiegelungen an Geraden).

Geometriai transzformációk az általános iskola alsó tagozatában

Az 1987-88. tanévtől valószínű új tanterv szerint taníthatjuk a geometriát. Ennek a tantervnek a második változata az 1990-91-es tanévtől indul a 7. osztályban. Az új tananyagból a geometriai transzformációk tanításával kapcsolatban írok le néhány gondolatot. Ebben a dolgozatban először a transzformációkról szólok általában, majd a transzformációk tanításának alsó tagozatos előkészítését foglalom össze. A következő kötetekben a tengelyes tükrözés, eltolás, forgás, hasonlósági transzformációk tanításával kapcsolatos elképzeléseimet akarom leírni.

Az általam vázolt felépítés egy egyéni elgondolás a geometriai transzformációk tanítására. Azért írom le, hogy a tankönyvírók vagy a nevelők, ha találnak benne felhasználható gondolatokat, hasznosítsák. Nem állítom, hogy ez az elképzelés a legjobb, legtökéletesebb. Bizton remélem azonban, hogy tartalma, koncepciója újabb gondolatokat szülhet az e témakört művelők körében.

Az általános iskolai geometria korszerűbb tanítását én - valószínű - speciálisan fogom fel. A geometriát minden iskolatipusban valamilyen elfogadott axiomarendszert figyelembevéve tanítjuk. Nem axiomatikusan, hanem egy axiomarendszert alapul véve, azt követve, arra figyelve építjük fel a geometriát. Ez az axiómarendszer igen hosszú ideig az euklideszi axiómarendszer volt. Később a tökéletesebb hilberti axiómarendszer vette át ezt a szerepet. A század eleji korszerűsítési törekvések felvetették a kleini elgondolás érvényesülését az iskolai geometriaoktatásban. Ennek lényege az, hogy a síkot illetve teret ponthalmazként fogjuk fel. A ponthalmazok részhalmazainak egyrésze a geometriai alakzatok. A tér illetve a sík ponthalmazához transzformációcsoportot rendelünk, amelyek a ponthalmazt önmagára képezik le, és a ponthalmazból felépülő alakzatoknak azokat a tulajdonságait vizsgáljuk, amelyek egy adott transzformációcsoporttal szemben változatlanok (invariánsak). Igy, ha az auklideszi tér- vagy sík ponthalmazához a hasonlósági transzformációcsoportot rendeljük, és ezzel vizsgáljuk a geometriai alakzatok invariáns tulajdonságait, az euklideszi geometriát kapjuk. Ha az euklideszi teret (síkot) kiegészítjük a végtelen távoli elemekkel, és ehhez a ponthalmazhoz a projektiv transzformációt rendeljük, akkor a projektiv geometriát kapjuk.

Ezek alapján olyan axiómarendszerek születtek, amelyek a hilberti axiómarendszert vették alapul, és módosították azt a transzformációkra vonatkozó axiómákkal. Két módositott változata terjedt el. Egyik a mozgási axiómacsoportra épitett geometria, másik a tükrözési axiómacsoportra épitett geometria néven vált ismertté. Jelenleg az iskolai geometria felépítésénél a mozgási axiómacsoporttal vagy a tükrözési axiómacsoporttal módositott hilberti axiómarendszerre alapozott geometriát oktatjuk. Először a mozgásra, mint geometriai transzformációra épitettünk, vagyis ezzel vizsgáltuk az alakzatok tulajdonságait. Mozgás alatt a síkon párhuzamos illetve metsző tengelyekre történő tükrözések egymásutánját értettük, tehát páros tengelyre történő tükrözések egymásutánját. Magától értetődően vetődött fel a gondolat, hogy még egyszerűbbé válik az iskolai geometria felépítése, ha tükrözésekkel kezdjük, és a tükrözési axiómacsoporttal módosított hilberti axiómacsoport adja az alapját az iskolai geometria oktatásának. Jelenleg tehát egy tengelyre, két tengelyre történő tükrözések sorozatával foglalkozunk, a tengelyes tükrözéssel, eltolással, forgással és centrális tükrözéssel. Utalunk arra, hogy a tengelyes tükrözések összetételét egybevágósági transzformációnak nevezzük, az egybevágósági transzformáció és centrális nyújtás összetételét pedig hasonlósági transzformációnak mondjuk. Az euklideszi sík alakzatainak tulajdonságait ezekkel a transzformációkkal vizsgáljuk.

Sokan korszerű elvnek tekintik a sík- és térgeometria egységes tárgyalását. Arra hivatkozunk, hogy a térben élünk, első benyomásainkat innen szerezzük. Ez mind igaz. Azonban nem a térbeli tárgyakkal dolgozik a geometria. Ezekből modelleket alkot. A térbeli modelleket általában síkbeli modellekből építjük fel. A síkbeli modellek nélkül nem tudjuk a térbeli modelleket megismerni. Az általános iskolában tehát együtt építjük a teret és a síkot, de a síkbeli alakzatok tulajdonságait a sík transzformációival vizsgáljuk, amelyekkel nem tudjuk a térbeli alakzatok tulajdonságait vizsgálni. A sík transzformációit feltétlen ki kell építeni, hogy a síkbeli alakzatok sokoldalú tulajdonságait megismerjük, és ebből következtethessünk a térbeli alakzatok egyes tulajdonságaira is. Az egységes tárgyalásról csak ilyen értelemben beszélhetünk, olyan értelemben nem, hogy a tér tulajdonságait vizsgáljuk általános iskolában a tér ponthalmazához rendelt transzformációcsoporttal, és ennek speciális eseteként tekintjük a síkgeometriát. Az egységes tárgyalás elvének hangoztatását nem szabad túlhangsúlyozni, csak olyan szerepet tulajdoníthatunk neki, amilyennel a jelenlegi tankönyvekben találkozunk.

Dolgozatomban csak a geometriai transzformációk felépítésével foglalkozom, nem az általános iskolai geometriaanyag tárgyalásával. A geometriai transzformáción kívül csak azoknak a fogalmaknak a kialakítására gondolok, amelyekre a transzformációknál szükségünk van.

A geometriai transzformációk tanításáról az általános iskola alsó tagozatában.

A bevezetőben már szóltunk róla, hogy az új, átdolgozott tanterv tovább tökéletesíti a transzformációk általános iskolai felépítését. Ennek tárgyalása azonban csak akkor lesz eredményes a felső tagozatban, ha az alsó tagozatban megfelelően előkészítjük.

A következőkben a geometriai transzformációk alsó tagozatos előkészítésével kapcsolatos elképzeléseinket vetjük papírra. Ezt abban a reményben tesszük, hogy az alsó tagozatos nevelőkben gondolatokat ébresztenek, ötleteket adnak a tartalmi és módszertani munkához.

Ne úgy nézzék tehát a leírtakat, hogy ezzel egy kész, teljes anyag birtokába kerülnek, hanem úgy, hogy ezzel segíteni kívánjuk az eredményesebb felkészülésüket.

Kialakítandó fogalmak:

- pont, egyenes, sík, illeszkedés, elválasztás közte van,
- metszés, szakasz, félegyenes, félsík, szög,
- hozzárendelés, fedésbe hozható, egybevágó,
- síkbeli alakzatok; háromszög, négyszög, sokszög,
- négyzet, téglalap, átló,
- térbeli alakzatok: kocka, hasáb, henger, gúla, kúp, cs.kúp,
- kerület, terület.

A geometriával kapcsolatos fogalmak kialakítása többféleképpen történhet. A pedagógus felkészültsége, a tanulóanyag, a tanulók környezete meghatározó tényező. A tankönyvek, feladatlapok, folyóiratok, kézikönyvek, különböző írások elsősorban tanácsokat, ötleteket adnak, gondolat-ébresztő megjegyzéseket tartalmaznak, amelyeket a pedagógus saját egyéniségéhez, felkészültségéhez és a tanulóanyaghoz alakít.

A tanulók a környezetükben, a mindennapi valóságban létező tárgyakat, természetes és mesterséges alakzatokat látnak, tapintanak, tapasztalnak. A geometria ezek modelljét készíti el, és a modellt vizsgálja. Ki kell tehát alakítani a valóságról készíthető modellek-beli jártasságot, a valóság modellizálását, a modellekről a valóság felismerését.

Talán az a helyes, ha párhuzamosan ismerkedünk a valósággal és a modellel. Ismerjük fel a modellen a házat, autót, órát, képet, sátort stb-t! Sétánkon ismerkedjünk a valóság tárgyaival. Figyeljük meg a házakat, a házak oldalát (falát), a tetőt! Hogyan rajzolnánk le? Iskolában elkészíttetjük a modelljeiket. Rajzoljuk le a házat! A geometriát nem érdekli a kilincs, a cserép, az ablakrács, a szín. A legegyszerűbb modell érdekli. Így rajzoljuk meg! Rajzoljuk meg az oldalfalat, az ablakot, az ajtót! Vegyük észre, hogy ezek modellje ugyanolyan. Ezeket négyszögeknek nevezzük. Rajzoljuk le a hegyes tetőket, sátrat. Ezek neve háromszög. Megmondjuk, hogy az egyik fajta rajzot síkbelinek, a másikat tériesnek, térhatásúnak, térbelinek nevezzük. Ismerjük meg a térbeli rajzokat! Minek a modelljei ezek a rajzok? Bögre, doboz, henger-kályhacső, villanypózna, oszlop, gerenda, kocka, sátor, süveg, tölcsér, csésze, pohár, gyárkémény. Figyeljük meg! Van köztük szögletes és nem szögletes (görbelapu). Csoportosítsuk! Adjunk nevet ezeknek! Hasáb, henger, gúla, csonkagúla, kúp, csonkakúp. Figyeljük meg otthon a tárgyakat! Nevezzük őket a geometria nyelvén! Modellünk igen keveset tartalmaz. Ezek köre bővíthető! Gyűjtsünk olyanokat, amelyről térbeli rajz készíthető!

Ismerkedjünk a síklap-gyűjteményünkkel. Válasszuk külön azokat, amelyeket vonalzó mellett meg tudunk rajzolni. Válasszuk külön azokat, amelyek megrajzolásánál háromszor-, négyszer-, többször kell elforgatni a vonalzót. Adjunk nevet ezeknek! (Háromszög, négyszög, stb.) Keressünk olyan alakzatot, amelyet nem tudunk vonalzó mellett megrajzolni (pl. a kör).

A vonalzó mellett megrajzolható vonalat egyenes vonalnak (egyenesnek) mondjuk. A többi vonalat nevezzük el görbe vonalnak. Rajzoljunk ilyeneket!

Rajzoljunk két pontot (A,B)! Kössük össze egyenes vonaldarabbal és görbe vonaldarabbal! Vegyük észre, hogy *két pont egy egyenes vonallal köthető össze*.

Hosszabbítsuk meg az AB egyenes vonaldarabot a B oldalon bármeddig. Ezt *AB félegyenesnek* mondjuk. A a kezdőpont.

Az AB félegyenest az A oldalon is hosszabbítsuk meg, amig rajzolni tudunk. Ezt *AB egyenesnek* nevezzük. Az AB részt *szakasznak* mondjuk. Tegyünk (illesszünk) pontokat az egyenesre. Mennyit tudunk? *Az egyenesre végtelen sok pont illeszkedik*.

Egy egyenesre A, B, C három pontot illesszünk! Azt mondjuk, hogy B az A és C között van, vagyis *B elválasztja az A és C pontokat*.

Rajzoljunk szakaszokat. Mérjük meg ezeket. A mérőszámot írjuk mellé. *A szakaszokhoz számokat rendeltünk*. Vegyük észre, hogy más mérőegységekkel más számok rendelhetők a szakaszokhoz. Érdemes tehát mérőegységet választani.

A füzetlapot, könyvlapot, papírlapot, ... síklapnak mondjuk. Képzeljük el ezeket minden irányban a "végtelenségig" meghosszabbítva. Ezt a nagy "lapot" *síknak* nevezzük el.

Rajzoljunk a füzetünkben egy pontot. A ponton át rajzoljunk egyeneseket. Hányat tudunk? *A síkben egy pontra végtelen sok egyenes illeszkedik*.

Rajzoljunk a füzetünkben egy egyenest. Ez a füzetlapot, a síkot két részre osztja. Az egyenest és az egyik részt *félsíknek* nevezzük. Az egyenes a síkot két félsíkra osztja. Rajzoljunk olyan két pontot, amelyik egy félsíkban van. Rajzoljunk olyant, amely különböző félsíkokban van. Rajzoljunk olyant, amely az egyenesre (határegyenesre) illeszkedik. Kössük össze a két pontot. Mondjunk igaz állításokat a két pont összekötő szakaszáról.

Tekintsük a füzetlapot egy síknak. Mutassunk pontokat, amelyek nem illeszkednek a síkra. A síkot és a felette (vagy alatta) lévő részt (pontok halmazát, ponthalmazt) *féltérnek* nevezzük. Egy sík két félteret határoz meg. Helyezzünk el két pontot úgy, hogy egyik féltérben legyen, különböző félterekben legyen, mindkét féltérben legyen. Mit tudunk mondani a két pont összekötő szakaszáról?

Három ujjunk hegye legyen három pont. Helyezzük rá a füzetet. A füzet most síkot helyettesít. Próbáljuk meg két ujjunkra helyezni. Helyezzük négy ujjunk hegyére. Előfordulhat, hogy a negyedik nem ér hozzá? Tapasztalat: *három pontra egy sík illeszthető.* Kettő pontra több sík helyezhető. *Van olyan négy pont, amelyre sík nem illeszthető.*

Rajzoljunk olyan két egyenest (egyenespárt), amelynek egy közös pontja van (amelyek metszik egymást). Szögestáblán is mutassunk ilyet. Tudunk-e olyan egyenespárt mutatni, amelyek nem metszik egymást, bármeddig meghosszabbítanánk (szögestáblán, négyzetrácsos papiron)? Ezeket *párhuzamosok*nak nevezzük. Előre elkészített metsző egyenespárra és párhuzamos egyenespárra helyezzünk síkot.

Rajzoljunk egy pontot a füzetben. A pontból kiindulva húzzunk két különböző félegyenest. Szögestáblán is állítsunk elő ilyen alakzatokat. Ezeket *szögnek* nevezzük. Adjunk nevet ezeknek.

A síkbeli és térbeli modellkészletünkön mutassunk szakaszokat, szögeket.

Ismerkedjünk meg alaposabban a négyszögekkel. A modellekből válogassuk ki és rajzoljunk is ilyeneket. Hol találkozunk ilyenekkel a valóságban? Mondjunk példákat. Adjunk nevet ezeknek (téglalap, négyzet, paralelogramma, deltoid, trapéz). Mondjunk, keressünk jellemzőket, tulajdonságokat.

A modellkészletünkből válogassuk ki a háromszögeket. Állitsunk elő ilyeneket (szögestáblán, füzetben). Hol találunk ilyeneket a valóságos tárgyakon? Csoportosítsuk a háromszögeket. Adjunk nevet mindegyiknek. Válasszunk ki két olyan háromszöget, amelynek "méretei" egyenlők. Helyezzük ezeket egymásra. Azokat a háromszögeket, amelyek egymásra fektetve fedik egymást, *egybevágó* háromszögeknek nevezzük. Keressünk a különböző tárgyakon ilyeneket. Mondjunk, csináljunk, gondoljunk ki egybevágó háromszögeket.

Ismerkedjünk a *körrel*. Pl. egy 2 Ft-ost rajzoljunk körbe. Válogassunk a modellkészletből ilyeneket. Keressünk a körmodellnek megfelelő alakzatokat a valóságos tárgyakon. Középpont, körvonal, húr.

Összefoglaláskor, ismétléskor sokoldalúan állíthatjuk össze eddigi tapasztalatainkat.

- Hol találkozunk a valóságban
  - a. egyenes vonaldarabokkal (szakaszokkal); (ház,tervrajz, ...);
  - b. párhuzamosokkal; (szoba, sínpár, ...);
  - c. pontokkal; (sarkok, csucsok, ...);
  - d. síkrészekkel; (fal, tábla, síkidomok, ...);
  - e. szögekkel?

Alakuljon ki, hogy a valóságos tárgyakon és azok geometriai modelljein ezek mindig előfordulnak.

- Rajzoljunk egy pontot, két pontot, egy egyenest, egy metsző egyenespárt, egy párhuzamos egyenespárt, egy síkot, egy pontból kiinduló félegyenespárt. Mondjunk ezekre igaz állításokat.

- Mondjuk el, milyen síkbeli alakzatokból épül fel egy-egy előttünk álló térbeli modell.
- Mondjunk valamit ezeknek a síkbeli alakzatoknak a tulajdonságairól.

Hozzárendelés, geometriai transzformációk

1. Keresd a szabályt!

□	◯
3	7
5	11
8	17

□ ⟶ (□·2)+1

◯ = (□·2)+1

□ : számok halmaza

◯ : számok halmaza

A két halmazt egymáshoz rendeltük. A □ számhalmazhoz hozzárendeltük a ◯ számhalmazt a következő *előírás* szerint: a □ -hez tartozó számokat szorozzuk meg 2-vel, és adjunk hozzá egyet.

Figyeljük meg: a □ különböző számaihoz különböző számokat rendeltünk az előírás (szabály) szerint!

2. Az egyik halmazban síkidomok találhatók, a másikban számok. A két halmazt rendeljük egymáshoz a következő előírás szerint: minden síkidomhoz rendeljük hozzá a kerületét.

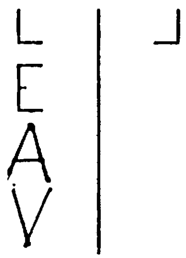
   rajzoljunk még síkidomokat, és írjunk hozzá méreteket! Keressük a hozzárendelt számokat! Figyeljük meg! Különböző síkidomokhoz ugyanazok a számok is tartozhatnak! Adjunk meg ilyen méreteket!

3. Gondoljunk a téglalapok és négyzetek halmazára! Rendeljünk mindegyikhez egy számot, a területét!

Írjuk be a T halmazba a számokat!

Adjunk meg önállóan adatokat! Figyeljük meg: Különböző alakzatokhoz különböző számok tartoznak mindig?

4. Síktükör előtt állunk. Figyeljük a képünket!

5. 

Rendeljük hozzá a tükörképét!

Mi az, hogy tükörkép?
Tükör segítségével mondd el!
Ellenőrizzük a rajzot tükörrel!

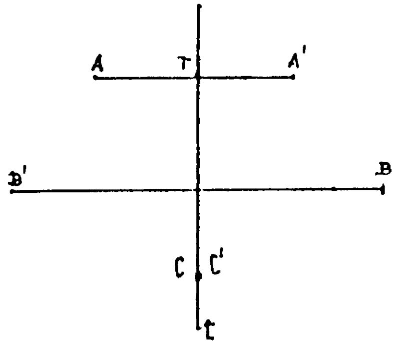
Figyeljük meg, a síkban a tükröt a tükör és síklap vonala helyettesíti!

6. Szögestáblán mozgassunk egy pontot! A tükröt egyenesvonal helyettesítse. Hol lesznek a különböző pontok képei?

Összegezés. Példáinkban a számok halmazához hozzárendeltünk számok halmazát, síkidomokhoz a kerületét illetve a területét, alakzatok ponthalmazához a tükörképeik ponthalmazát.

Ezután alaposabban megismerkedünk a tükrözéssel. Tanulmányaink során sokat fogjuk használni alakzatok tulajdonságainak a megállapításánál.

A sík pontjainak halmazát egy egyenes két félsíkra osztja. Az egyenest nevezzük el tengelynek. Az egyik félsík pontjaihoz rendeljük hozzá a másik félsík pontjait



képpontokként a következő előírás szerint: *a pontból húzzunk merőleges egyenest a tengelyre, a pont és a tengelyen lévő metszéspont távolságát mérjük fel a metszésponttól az egyenes másik félsíkben lévő részére. (AT = TA') Így kapjuk meg az A pont A' képét.* Az A pontot eredeti pontnak, az A' pontot képpontnak mondjuk, a *leképezést tengelyes tükrözésnek nevezzük.*

Gondolkozz és válaszolj! Próbáld ki, rajzold le!

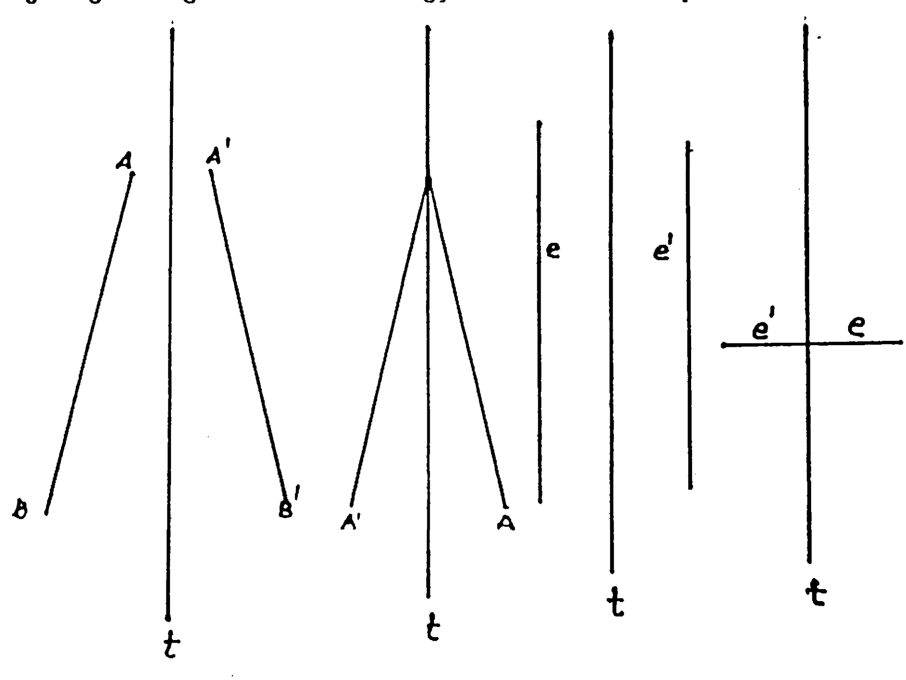
- A pont bármelyik félsíkban lehet. Hol van a képpont?
  (Az ellenkező félsíkban.)
- A pont a tengelyen van. Hol van a képpont?
  (Az eredeti pont és képpont egybeesik.)

Fogalmazzuk meg ezeket a tulajdonságokat!

1. A tengelyes tükrözés a félsíkokat felcseréli.
2. A tengely pontjainak képe önmaga. A tengely pontjai fixpontok.

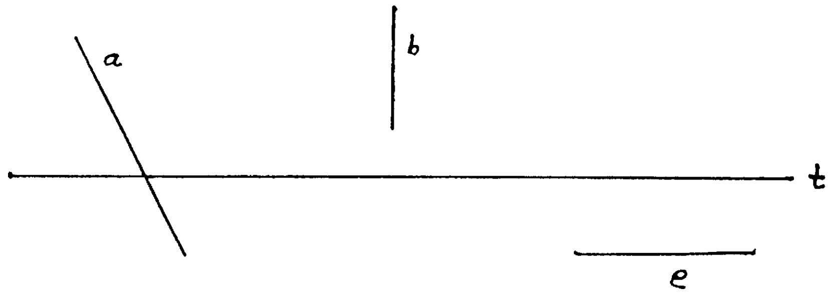
Vizsgáljuk meg ezután az *egyenesek* tükörképeit! Tudjuk, hogy az egyenest két pontja meghatározza. Az egyenes tükörképét két pontjának tükörképével határozhatjuk meg.

Rajzoljuk meg a következő egyenesek tükörképeit!



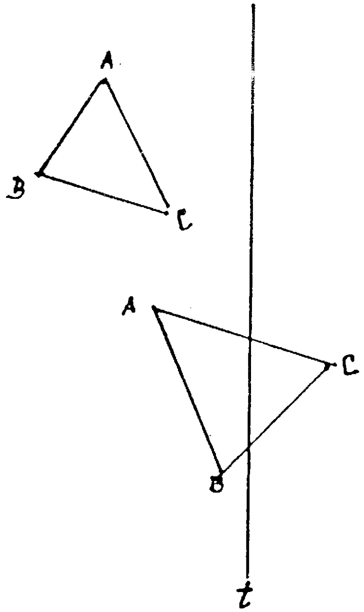
A rajzolt egyenesek felfoghatók úgy mint szakaszok. Ezzel a szakaszok tükörképeinek szerkesztését is megtanultuk.

Egy papírlapra rajzoljunk egy tengelyt, és a rajzon látható módon rajzoljunk egyeneseket (szakaszokat)! Rajzoljuk meg ezek tükörképeit!

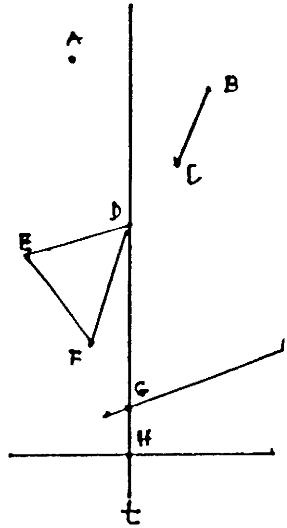


A tengely mentén hajtsuk össze a papírlapot! Mit tapasztalunk? (Az eredeti és a kép fedi egymást.)

Szerkesszük meg a következő ábrán látható háromszögek tükörképeit! Figyeljük meg a háromszögek körüljárását! Ellenőrizzük az eredeti- és képháromszögek oldalainak és szögeinek nagyságát! Mit tapasztalunk?
(Az eredeti és képháromszög körüljárása ellenkező, a megfelelő oldalak egyenlők, a megfelelő szögek egyenlők.)



Rajzoljuk meg a következő alakzatok tükörképét!



Az előző ábrához mondjunk igaz állításokat!

- Minden pontnak egy párja van.
- Különböző pontok képe különböző.
- BB' ‖ CC'.
- Tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.
- $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.
- EGF = E'G'F' .
- Tengelyen lévő pont képe önmaga.
- Pont és képe különböző félsíkban van.
- Ha A párja A', akkor A' párja A.
- A pont és kép távolságát a tengely felezi.
- A tükrözés a félsíkokat felcseréli.

A gyakorló feladatok között különböző helyzetű síkidomokhoz keressünk tükörtengelyeket. Döntsük el különböző síkidompárokról, hogy tükörképeik e egymásnak vagy nem! Mutassunk be különböző tükrös alakzatokat, és ezeken keressük meg a tükörtengelyeket!