SZEPESSY BÁLINT

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ VI.

(Még egyszer a tetszőleges magasrendű ciklusokról)

ABSTRACT: *(Remarks on iteration of real functions) Let* f(x) *be a continuous real valued function on the interval* [a,b] *which maps the interval onto itself. We say c is a fix point of* f(x) *of order* n(>1) *if* $f(c)=c_1$, $f(c_1)=c_2,\dots,f(c_{n-1})=c$ *but* $f(c_r)\neq c$ *if* $1\leq r<n-1$. *In this paper, using our earlier methods and results, we give a new proof of the following theorem: "If there is a point e in the interval* [a,b] *for which* $e_3\leq e<e_1<e_2$, *where* $e_1=f(e)$, $e_2=f(e_1)$ *and* $e_3=f(e_2)$, *then there exists a fix point of order n in the interval for any natural numer n". This theorem was proved originaly by Tien-Yien Li and James A.Yorke.*

1. BEVEZETÉS

Legyen f(x) az [a;b] (a<b) zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. f(x) az adott szakasz minden belső pontjában folytonos, a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. f(x) az [a;b] intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben f(x) = constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az $f_0(x)=x$, $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f(f(x)),\dots,f_n(x)=f\left[f_{n-1}(x)\right],\dots$ függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, ..., n-edik (n-edrendű),... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy az $f(x)$ $n=2,3,\dots$ függvények is mind rendelkeznek az 1.,2.,3 tulajdonságokkal. Teljesülnek az $f_{n+m}(x) = f_n\left[f_m(x)\right] = f_m\left[f_n(x)\right]$ azonosságok.

Ha $[c;d]$ $(c<d)$ az $[a;b]$ szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele: $[c,d]_1$. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy $[c;d]_1=[\min f(x);\ \max f(x)]$, ha $c\leq x\leq d$). A $[c;d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c;d]_n=\left([c;d]_{n-1}\right)_1$ intervallumot értjük.

Ha $f(c)=c$, akkor a $\underline{c}$ pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c)\neq c$, $n=1,2,\dots,r-1$ esetén, de $f_r(c)=c$, akkor a $\underline{c}$ pont az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor - amint az ismeretes - a $c_1, c_2,\dots, c_{r-1},c_r$ fixpontok egy r-edrendű ciklust alkotnak.
Az n-edrendű fixpontok az $y=f_n(x)$ görbe és az $y=x$ átló metszéspontjainak vetületei az abszcisszatengelyen.

Már vizsgáltuk azt a kérdést, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén nem lehet a ciklusok rendszámára felső korlátot adni (Szepessy [8], [9]).
Bebizonyítottuk hogy:

1. Ha az $[a,b]$ szakaszban $f(x)$ az 1.,2.,3 feltételeknek eleget tesz és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész zárt $[a;b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus.

Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek bármilyen adott rendű ciklus létezéséhez. Ezt igazolják az említett dolgozatok szemléletes példái és a következő tétel:

2. Legyen $a \leq c < d < b$ és $f(x)$ az $[a;b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(c)=c$ $f(d)=b$, továbbá van a $[d;b]$ szakasznak olyan $[p;q]$ részszakasza, amelyet $f(x)$ az $[a;b]$ szakaszra képez le. Ekkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n-edrendű fixpontja.

A tétel bizonyításából kiderül, hogy $a<c$ vagy $q<b$ esetén a tétel érvényessége nem függ az $f(x)$ függvény $[a;c]$ vagy $[q;b]$ szakaszbeli menetétől. Ugyancsak nem befolyásolja a tétel érvényességét $d<p$ esetén $f(x)$ függvény $[d;p]$ szakaszbeli viselkedése sem.

A bizonyítás során kihasználatlanul maradt az alapfüggvénynek az említett szakaszokban való folytonossága is.

Ebben a dolgozatban ezeknek a tételeknek a segítségével és bizonyításaik sajátos, elemi módszerével igazoljuk az alábbi - tételeinknél álktalánosabb - tételt, amelyet Tien-Yien Li és James A. Yorke (alapvetően más bizonyítással) publikált ([7]).

2. MÉG EGYSZER A TETSZŐLEGES MAGASRENDŰ CIKLUSOKRÓL

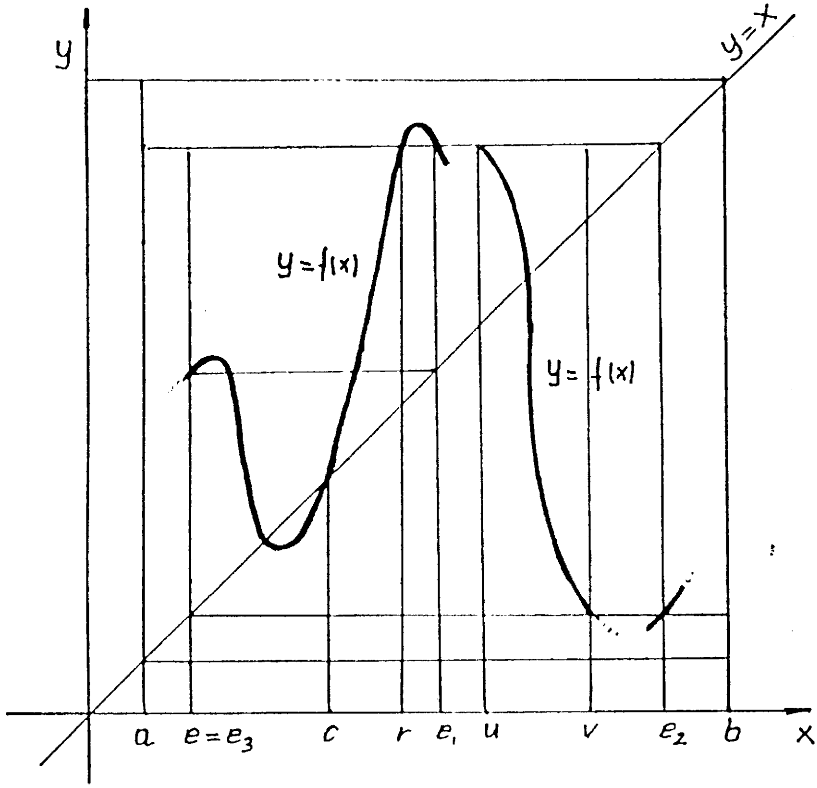
TÉTEL. Legyen $f(x)$ az $[a;b]$ zárt intervallumban értelmezett iterációs alapfüggvény. Ha van az $[a;b]$ szakaszban olyan $\underline{e}$ pont, amelyre $e_3 \leq e < e_1 < e_2$; (vagy $e_3 \geq e > e_1 > e_2$) relációk teljesülnek; akkor van bármilyen n-edrendű ciklus is. (Ahol e_1, e_2 és e_3 az e pont első, második és harmadik iterált pontja).

BIZONYÍTÁS: Elegendő a bizonyítást az $e_3 = e < e_1 < e_2$ esetre elvégezni; más esetekben - az analóg ($e_3 \geq e > e_1 > e_2$) esetben is - a bizonyítás ehhez hasonlóan történik.

Legyen $u=\max\limits_{x\in[e_1;e_2]}(x)$; $f(x)=e_2$; azaz u a legnagyobb abszcisszaérték, amelyben $f(u)=e$ teljesül;és $v=\min\limits_{x\in[u;e_2]}(x), f(x)=e$; azaz v az u-tól jobbra a hozzá legközelebb eső olyan pont, amelyben $f(v)=e$. Ilyen u és v pont az adott szakaszban létezik, ugyanis - a feltételek szerint - $f(e_1)=e_2$,és $f(e_2)=e$ Az 1.,2.,3 következtében $f(x)$ függvény az $[u;v]$ szakaszban folytonos és ezt a szakaszt az $[e;e_2]$ szakaszra képezi le. Mivel az $f(x)-x$ (folytonos) függvény az u és v pontban különböző előjelű - $f(u)-u=e_2-u>0$ és $f(v)-v=e-v<0$ -, ezért van az $[u;v]$ szakaszban zérushelye; azaz $f(x)$ függvénynek elsőrendű fixpontja. Innen a bizonyítás kétfelé ágazik.

a/ Az $[e;u]$ szakaszban van legalább egy elsőrendű fixpont. Legyen $c=\max\limits_{x\in[e;u]}(x)$; $f(x)=c$ (1.ábra). Az $f(x)$ függvény folytonossága következtében a $[c;u]$ szakaszban van legalább egy olyan pont, amelyben a függvény az e_2 értéket veszi fel; az u például ilyen pont, ugyanis $f(u)=e_2$ teljesül. Legyen ezek közül a c-hez legközelebbi az r pont; azaz $r=\min\limits_{x\in[c;u]}(x)$, $f(x)=e_2$. Az $f(x)$ függvény a $[c,r]$ szakaszt a $[c;e_2]$ szakaszra, az $[u;v]$ szakaszt - $[r;e_2]$ részszakaszát - pedig az egész $[e;e_2]$ szakaszra képezi le. A bevezetésben is szereplő második tétel szerint az $[e;e_2]$ szakaszban (sőt annak $[c;r]$ részszakaszában), bármely (természetes) n szám esetén van n-edrendű ciklus.

Ebben az esetben a bizonyítást befejeztük.

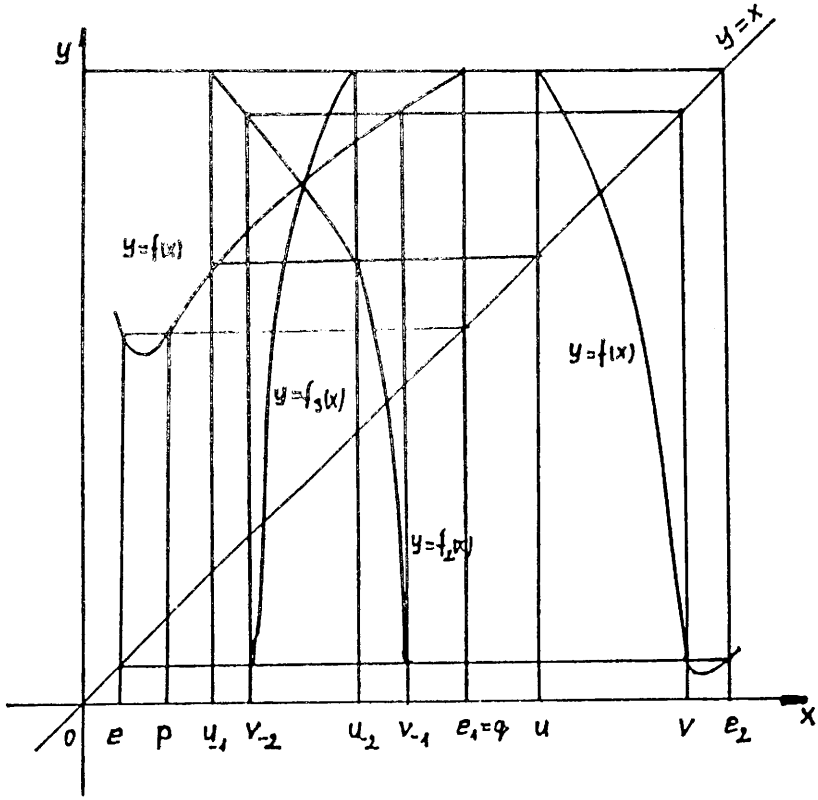


1. ábra

b/ Az [e;u] szakaszban nincs elsőrendű fixpont.

Ebben az esetben a bizonyítás a következőképpen folytatható.

Tekintsük a $q=\min\limits_{x\in[e;e_1]}\{x\}$, $f(x)=e_2$ és a $p=\max\limits_{x\in[e;q]}\{x\}$, $f(x)=e_1$; pontokat (2. ábra). A feltételek szerint $f(e)=e_1$ és $f(e_1)=e_2$ és $f(x)$ folytonos függvény; tehát van ilyen p és q pont a szóbanforgó szakaszban, és a $[p;q]$ szakaszt a (folytonos) $f(x)$ függvény az $[e_1;e_2]$ szakaszra képezi le. Mivel $e_1 \leq u < v < e_2$ ezért mind az u mind a v pontnak van (legalább egy-egy) inverz-iterált pontja a $[p;q]$ szakaszban. Tekintsük a v pont $[p;q]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legkisebb és jelöljük ezt v_{-1}-gyel; tehát $v_{-1}=\min\limits_{x\in[p;q]}\{x\}$; $f(x)=v$. Az u pontnak a $[p;q]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül a v_{-1} -től balra a hozzá legközelebb esőt választva, legyen ennek abszcisszája u_{-1}; azaz $u_{-1} = \max_{x\in[p;v_{-1}]}\{x\}$; $f(x)=u$. Könnyű megmutatni, hogy $[u_{-1},v_{-1}]_1=[u;v]$ (Szepessy [8]).



2. ábra

Mivel $f_2(u_{-1})=f(u)=e_2$ és $f_2(v_{-1})=f(v)=e$ valamint az $f_2(x)$ iterált függvény az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszban folytonos, ezért ezt a szakaszt az $[e;e_2]$ szakaszra képezi le (azaz $f_2(x)$ függvény minden $[e_1;e_2]$ szakaszbeli értéket felvesz). Az $f_2(x)-x$ (folytonos) függvény az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakasz kezdő és végpontjában különböző előjelű – $f_2(u_{-1})-u_{-1}=e_2-u_{-1}>0$ illetve

$f_2(v_{-1})-v_{-1}=e-v_{-1}<0$ – következésképpen van ebben a szakaszban zérushelye; azaz van olyan $\bar{x}$ pont, amelyben $f_2(\bar{x})=\bar{x}$ teljesül. Tehát $\bar{x}$ pont az $f(x)$ függvénynek legfeljebb másodrendű fixpontja. Az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszban nincs $f(x)$-nek elsőrendű fixpontja, ezért $\bar{x}$ annak pontosan másodrendű fixpontja.

Az $f_2(x)$ iterált függvény az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszban minden $[e;e_2]$ szakaszbeli értéket felvesz, ezért mind az $\underline{u}$ mind a $\underline{v}$ pontnak van ebben a szakaszban az $f_2(x)$ iterált függvényre vonatkozóan inverz-iterált pontja, legyen $u_{-2}=\min_{x\in[u_{-1};v_{-1}]}\{x\};\ f_2(x)=u$ és $v_{-2}=\max_{x\in[u_{-1};u_{-2}]}\{x\};\ f_2(x)=v$. Mivel $f_2(v_{-2})=v$ és $f_2(u_{-2})=u$ és $f(x)$ az $[u;v]$ szakaszt az egész $[e;e_2]$ szakaszra képezi le, ezért a $[v_{-2};u_{-2}]$ szakaszban az $f_3(x)$ iterált függvény is minden $[e;e_2]$ szakaszbeli értéket felvesz. Az $f_3(x)-x$ (folytonos) függvény e szakasz kezdő és végpontjában különböző előjelű – $f_3(v_{-2})-v_{-2}=f(v)-v_{-2}=$ $=e-v_{-2}<0$, illetve $f_3(u_{-2})-u_{-2}=e_2-u_{-2}>0$ –, ezért van a $[v_{-2};u_{-2}]$ szakaszban zérushelye; azaz van olyan $\hat{x}\left(\in[v_{-2};u_{-2}]\right)$ pont, amelyre $f_3(\hat{x})=\hat{x}$ teljesül. Az $\hat{x}$ pont legfeljebb harmadrendű fixpontja az $f(x)$ függvénynek. Az u_{-2} értelmezéséből következik egyrészt, hogy $u_{-2}<v_{-1}$; másrészt, hogy az $f(x)$ függvény $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszbeli másodrendű fixpontjai mind az $[u_{-2};v_{-1}]$ szakaszban vannak; ezért $\hat{x}$ pontosan harmadrendű fixpontja az $f(x)$ függvénynek.

Képezzük ezután a $c=\max_{x\in[v_{-2};u_{-2}]}\{x\};\ f_3(x)=x$ pontot, valamint a következő $g(x)$ függvényt: $g(x)=f_3(x)$ ha $x\in[v_{-2};u_{-2}]$ és $g(x)=f(x)$ ha $x\in[u;v]$. A $g(x)$ függvény mind a $[c;u_{-2}]$, mind az $[u,v]$ szakaszban folytonos és az előbbit a $[c;e_2]$ szakaszra az utóbbit pedig az egész $[e;e_2]$ szakaszra képezi le.

A bevezetőben szereplő második tétel (Szepessy [9]) szerint a $[c;u_{-2}]$ szakaszban bármely (természetes) n szám esetén van a g(x) függvénynek n-edrendű fixpontja; azaz f(x) függvénynek negyed, ötöd,...,n-ed,...rendű fixpontja.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I, Publ. Math. (Debrecen) 7 (1960), 16-40.

[2] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II, Publ.
Math. (Debrecen) 13 (1966), 169-172.

[3] B. Barna, Berichtigung zur Arbeit "Über die Iteration reeller Funktionen II.", Publ. Math. (Debrecen) 20 (1973), 281-282.

[4] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III, Publ. Math. (Debrecen) 22 (1975), 269-278.

[5] L. Berg, (Rostock) Über irreguläre Iterations - folgen, Publ. Math. (Debrecen) 17 (1970), 112-115.

[6] A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Grax - Mill. Inc.), New York, 1965.

[7] Tien-Yien Li and James A.Yorke, Period three implies chaos, Amer.Math.Monthly 8 2 (10.), 985-992. (1975).

[8] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához I, Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV. (Eger, 1979.), 395-405.

[9] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához III, (A tetszőleges magasrendű ciklusokról), Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVII. (Eger, 1984.), 835-843.