ZAY BÉLA

NEMLINEÁRIS REKURZIÓVAL DEFINIÁLT SOROZATOKRÓL

ABSTRACT: *(On sequences defined by nonlinear recursion) In the paper we investigate a nonlinear recursive sequence defined by* $G_n = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i} + D_n$ $(n>p)$, *where* p *is fixed positive integer,* A_i*'s are given, real numbers and* D_n *is a sequence of real numbers. We show that* G_n *satisfies a linear recursion of order greater than* p *if* D_n *is a constant, or* D_n *is the sequence of the values of a polynomial, or* D_n *is a linear recursive sequence. The characteristic polynomial and some other properties of the sequence* G_n *are also determined.*

Legyen p egy rögzített pozitiv egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_p$ rögzített valós számok. Definiáljuk a valós számok egy $G = \{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatát a

(1) $$G_n = A_1 \cdot G_{n-1} + A_2 \cdot G_{n-2} + \dots + A_p \cdot G_{n-p} + D_n \qquad (n>p)$$

rekurzióval, ahol a $G_1, G_2, \dots, G_p$ kezdő eleme adott, nem mind zérus valós számok, és $D = \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ a valós számok valamely sorozata.

Hasonló, nemlineáris sorozatokkal már többen foglalkoztak. P.R.J. Asveld [1], [2] olyan (1)-et kielégítő rekurziv sorozatokkal foglalkozott, melyben $p=2$, $A_1=A_2=1$ és D egy polinom helyettesítési értékeinek sorozata. (1)-ben bizonyította, hogy a sorozat tagjaira

$$G_n = q_1 \cdot F_n + q_2 \cdot F_{n-1} - h(n),$$

ahol F_i az i-edik Fibonacci szám, q_1, q_2 rögzített valós számok, $h(x)$ pedig egy rögzített polinom.

M. Bicknell-Johnson és G.E. Bergum [3] Asveld által vizsgált sorozathoz hasonló sorozattal foglalkoztak, de náluk D egy konstans sorozat.

A következőkben a fentieknek egy közös általánosítását vizsgáljuk, és egyben javítjuk az előbb emlitett eredményeket. Megmutatjuk, hogy az (1)-ben definiált sorozat lineáris rekurziv sorozat, ha D egy konstans, polinom, vagy egy lineáris rekurziv sorozat.

A továbbiakban szükségünk lesz a lineáris rekurziv sorozatokkal kapcsolatban néhány fogalomra. Legyen $R = \{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy k-adrendű lineáris rekurziv sorozat, melyet az $A_1, A_2, \dots, A_k$ konstansok, $R_1, R_2, \dots, R_k$ kezdő elemek és az

$$R_n = A_1 \cdot R_{n-1} + A_2 \cdot R_{n-2} + \dots + A_k \cdot R_{n-k} + D_n \quad (n>k)$$

lineáris rekurzió definiál. Az R sorozat karakterisztikus polinomjának nevezzük az

$$f_R(x) = x^k - A_1 \cdot x^{k-1} - A_2 \cdot x^{k-2} - \dots - A_k$$

polinomot. Legyenek $f_R(x)$ különböző zérushelyei $x_1, x_2, \dots, x_t$, melyek multiplicitásai $k_1, k_2, \dots, k_t$. Ismert, hogy ekkor az R tagjai

$$R_n = p_1(n) \cdot x_1^n + p_2(n) \cdot x_2^n + \dots + p_t(n) \cdot x_t^n \quad (2)$$

alakban is felirhatók minden $n \geq 1$ esetén, ahol $p_i(x)$ egy k_i-1 -ed foku polinom (Lásd Pl. M.D'Ocagne [4]).

A következő tételeket fogjuk bizonyítani:

1. TÉTEL. Legyen G az (1)-ben megadott sorozat, és legyen Y egy p-ed rendű lineáris rekurziv sorozat, melyet szintén az $A_1, A_2, \ldots, A_p$ konstansok, és az $Y_1=G_1$, $Y_2=G_2$, ... , $Y_p=G_p$ kezdőelemek és az

$$Y_n = A_1 \cdot Y_{n-1} + A_2 \cdot Y_{n-2} + \ldots + A_p \cdot Y_{n-p} \qquad (n>p)$$

lineáris rekurzió definiál. Jelöljük $y_1, y_2, \ldots$ -vel az Y sorozat elemeit, ha $Y_1=Y_2= \ldots =Y_{p-1}=0$ és $Y_p=1$.
Ekkor

$$(3) \qquad G_n = Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i$$

minden $n>p$ esetén.

2. TÉTEL. Ha D egy r-ed rendű lineáris rekurziv sorozat, akkor a G elemei előállíthatók az $f_G(x) = f_Y(x) \cdot f_D(x)$ karakterisztikus polinommal meghatározott $p+r$ -ed rendű lineáris rekurzióval, a $G_1, \ldots, G_{p+r}$ kezdőelemekből.

A 2. Tétel bizonyításából adódik a következő eredmény:

KÖVETKEZMÉNY: Ha valamely $p+r$ -ed rendű G lineáris rekurziv sorozat karakterisztikus polinomja $f_G(x) = = f_1(x) \cdot f_2(x)$ alakú, ahol az $f_1(x)$ egy p-ed fokú, $f_2(x)$ pedig r-ed fokú valós együtthatós főpolinom, akkor G elemeire teljesül a

$$G_n = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i} + D_n \text{, ha } n>p+r$$

rekurzió is, ahol az A_i együtthatókat $(1 \leq i \leq p)$ az $f_1(x) = x^p - \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot x^{p-i}$ egyenlőségből állapíthatjuk meg, a D pedig egy $f_D(x) = f_2(x)$ karakterisztikus polinommal rendelkező r-ed rendű lineáris rekurziv sorozat, melynek $D_{p+1}, \ldots, D_{p+r}$ kezdőértékeit a

$$D_n = G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i}, \quad \text{ha } p+1 \le n \le p+r$$

képlet szerint számíthatjuk.

Ha

$$D_n = \sum_{i=0}^{r-1} a_i \cdot n^i,$$

akkor (2) miatt D egy r-ed rendű lineáris rekurziv sorozat $f_D(x) = (x-1)^r$, karakterisztikus polinommal, igy az (1)-ben definiált G sorozat, a 2. Tétel szerint p+r -ed rendű lineáris rekurziv sorozat, ahol

$$f_G(x) = \left[x^p - \sum_{i=1}^{p} A_i x^{p-i}\right] \cdot (x-1)^r,$$

igy a $G_1, \ldots, G_{p+r}$ kezdőértékek ismeretében egy p+r ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásával a G explicit alakja meghatározható. Erre a [2] -ben láthatunk egy "standard" eljárást a $p=2$, $A_1=A_2=G_1=G_2=1$ speciális esetben. A leirtak alapján könnyen átgondolható, hogy ez a módszer az általános esetben is követhető.

Megjegyezzük, hogy speciálisan az

(4) $\qquad r=1, \; p=2, \; A_1=A_2=1$

feltételek mellett M. Bicknell-Johnson és G.E. Bergum foglalkozott a G sorozattal [3] -ban. A továbbiakban az $r=1$, azaz $D_n=a_0$ ha $n>p$ feltétel melletti G sorozattal foglalkozunk, esetleg utalva arra, hogy speciálisan a (4) feltétel mellett hogyan adódik a [3]-beli eredmények némelyike.

Ismert, és a lineáris rekurziv sorozat explicit alakja segítségével könnyen igazolható állítás az, hogy ha a G lineáris rekurziv sorozat $f_G(x)$ karakterisztikus polinomjának x_1 egyszeres gyöke, és $|x_1| > |x_i|$ $i=2,\ldots,t$ ahol t az $f_G(x)$ különböző gyökeinek a száma, akkor

$\lim_{n \to \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = x_1$. Innen a (4) feltétel mellett adódik a [3] -beli eredmény: $\lim_{n \to \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Szintén a [3] -ban szerepel a (4) feltételt kielégítő G sorozatra a $G_n = G_1 \cdot F_{n-2} + G_2 \cdot F_{n-1} + a_0 \cdot (F_n - 1)$ képlet, ahol

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n \right),$$

azaz a Fibonacci sorozat n-edik eleme. A következő tétel ennek egy általánosítása.

3. TÉTEL. Definiáljunk egy G sorozatot a $G_1, G_2, \ldots, G_p$ kezdőelemekkel, $A_1, A_2, \ldots, A_p$, a_0 konstansokkal és a

$$G_n = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i} + a_0 \qquad (n>p)$$

rekurzióval. Legyenek továbbá $\{Y_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1,2,\ldots,p)$ p-ed rendű lineáris rekurziv sorozatok, melyeket az $A_1, A_2, \ldots, A_p$ konstansokkal és

$$Y_{n,i} = \begin{cases} 0 \text{ ha } n \neq i \text{ és } 1 \leq n \leq p \\ 1 \text{ ha } n = i \text{ és } 1 \leq n \leq p \end{cases}$$

feltételt kielégítő kezdő elemekkel definiálunk.

Ekkor, ha

$$S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} y_i ,$$

ahol y az 1. Tételben definiált sorozat, akkor

$$G_n = \sum_{i=1}^{p} G_i \cdot Y_{n,i} + a_0 \cdot S_{n-1}$$

teljesül minden $n>p$ esetén.

Rátérünk a tételek bizonyítására.

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A tétel feltételei és a sorozatok definiciói alapján

$$G_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{p+1-i} + D_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot Y_{p+1-i} + D_{p+1} =$$

$$= Y_{p+1} + y_p \cdot D_{p+1} = Y_{p+1} + \sum_{i=p+1}^{p+1} y_{p+1+p-i} \cdot D_i$$

Tegyük fel a továbbiakban, hogy minden j-re (p<j<n) teljesül a (3). Ezt és a sorozatok definicióit felhasználva (különösen figyelve az y sorozat kezdőértékeire) a $p+1 \leq n < 2p$ esetben

$$G_n = \sum_{t=1}^{n-p-1} A_t \cdot G_{n-t} + \sum_{t=n-p}^{p} A_t \cdot G_{n-t} + D_n =$$

$$= \sum_{t=1}^{n-p-1} A_t \cdot \left[Y_{n-t} + \sum_{i=p+1}^{n-t} y_{n-t+p-i} \cdot D_i \right] + \sum_{t=n-p}^{p} A_t \cdot Y_{n-t} + D_n =$$

$$= \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot Y_{n-t} + \sum_{t=1}^{n-p-1} \sum_{i=p+1}^{n-t} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-p-1} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} y_{n+p-i} \cdot D_i + y_p \cdot D_n = Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i \ .$$

adódik.

Ha $n \geq 2p$, akkor hasonló átalakításokat végezhetünk:

$$G_n = \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot G_{n-t} + D_n = \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot \left[Y_{n-t} + \sum_{i=p+1}^{n-t} y_{n-t+p-i} \cdot D_i \right] + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{t=1}^{p} \sum_{i=p+1}^{n-t} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i ,$$

mivel $y_p=1$. Ezzel a teljesindukció gondolatmenete szerint az állítás bebizonyítottuk.

A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Legyen $f_D(x) = \prod_{i=1}^{t} (x-x_i)^{k_i}$, ahol $x_1, \ldots, x_t$ zérustól különböző komplex számok, $k_1, \ldots, k_t$ pedig olyan pozitiv egészek, amelyek összege r. Mint ahogy láttuk, ekkor D_n egy explicit alakja

(5) $$D_n = \sum_{i=1}^{t} p_i(n) \cdot x_i^n ,$$

ahol $p_i(n)$ k_i-1 ed fokú komplex együtthatós polinom.

Legyen z egy tetszőleges számsorozat, s definiáljuk a következő differencia operátorokat:

$$F_{x_j}(z_n) = z_{n+1} - x_j z_n$$

$$F_{x_j}^{k}(z_n) = F_{x_j}\left[F_{x_j}^{k-1}(z_n) \right] ,$$

ahol $k>1$ pozitiv egész és $F_{x_j}^{1}(z_n) = F_{x_j}(z_n)$

Alkalmazzuk ezeket az (5) -beli összegre, majd annak i. tagjára:

$$F_{x_j}(D_n) = F_{x_j}\left[\sum_{i=1}^{t} p_i(n)\cdot x_i^n\right] = \sum_{i=1}^{t} p_i(n+1)\cdot x_i^{n+1} -$$

$$- x_j \sum_{i=1}^{t} p_i(n)\cdot x_i^n = \sum_{i=1}^{t} F_{x_j}\left[p_i(n)\cdot x_i^n\right]$$

illetve

$$F_{x_j}\left[p_i(n)\cdot x_i^n\right] = p_i(n+1)\cdot x_i^{n-1} - x_j\cdot p_i(n)\cdot x_i^n =$$

$$= \left[p_i(n+1) - \frac{x_j}{x_i}\, p_i(n)\right]\cdot x_i^{n+1} = q_i(n)\cdot x_i^{n+1}$$

adódik, ahol $q_i(n)$ fokszáma k_i-1, ha $i\neq j$; k_i-2 ha $i=j$ és $k_i\neq 1$; ha pedig $k_i=1$, azaz $p_i(n)$ konstans és $i=j$, akkor $q_i(n)=0$. Ez azt jelenti, hogy ha D_n-re alkalmazzuk $F_{x_1}^{k_1}$ -et, majd a kapott kifejezésre $F_{x_2}^{k_2}$ -őt, ... s végül a $t-1$ -edik lépésben kapott kifejezésre a $F_{x_t}^{k_t}$ operátort, akkor zérust kapunk, azaz

$$\left[\prod_{i=1}^{t} F_{x_i}^{k_i}\right](D_n) = 0.$$

Ugyanakkor (1)-ből $D_n = G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i}$ ha $n>p$, tehát

$$\left[\prod_{i=1}^{t} F_{x_i}^{k_i}\right]\left[G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i}\right] = 0, \tag{6}$$

ami azt jelenti, hogy a G elemei kielégítik ezt a $p+r$ -ed rendű rekurziót.

$$F_{x_j}\left[G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i}\right] = G_{n+1} - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n+1} - x_j\cdot G_n + x_j\cdot \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i} =$$

$$= G_{n+1} - \left[A_1 + x_j\right]\cdot G_n + \sum_{i=1}^{p-1} \left[x_j A_i - A_{i+1}\right]\cdot G_{n-i} + x_j\cdot A_p\cdot G_{n-p} ,$$

ahol az együtthatók rendre megegyeznek az

$$(x-x_j)\cdot\left[x^p-\sum_{i=1}^{p}A_i x^{p-i}\right]=(x-x_j)f_Y(x)$$

polinom együtthatóival. Innen és a (6)-ból már következik, hogy a (6)-beli rekurziónak megfelelő karakterisztikus függvény

$$f_G(x)=\prod_{j=1}^{t}\left(x-x_j\right)^{k_j}\cdot f_Y(x)=f_D(x)\cdot f_Y(x).$$

A 3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Először belátjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_p$ konstansokkal, $Y_1=G_1$, $Y_2=G_2, \dots,$ $Y_p=G_p$ kezdőértékekkel meghatározott Y sorozat minden elemére teljesül az

$$(7)\qquad Y_n=\sum_{i=1}^{p}G_i\cdot Y_{n,i}$$

egyenlőség.

Ha $1 \le n \le p$ akkor

$$Y_n=\sum_{i=1}^{p}G_i\cdot Y_{n,i}=G_n\cdot Y_{n,n}=G_n\ .$$

Tegyük fel, hogy minden j-re, ahol $1 \le j < n$ és $p<n$ teljesül (7). Ezt és az Y előállítását felhasználva

$$Y_n=\sum_{j=1}^{p}A_j\cdot Y_{n-j}=\sum_{j=1}^{p}A_j\sum_{i=1}^{p}G_i\cdot Y_{n-j,i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}G_i\sum_{j=1}^{p}A_j Y_{n-j,i}=\sum_{i=1}^{p}G_i\cdot Y_{n,i}$$

adódik, s igy a teljesindukció gondolatmenete alapján igazoltuk, hogy (7) minden n pozitiv egészre teljesül.

(7)-et és a tétel feltételeit felhasználva, az 1. Tételből

$$G_n = Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i = \sum_{i=1}^{p} G_i \cdot Y_{n,i} + a_0 \cdot \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} G_i \cdot Y_{n,i} + a_0 \cdot S_{n-1} .$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] Peter R.J. Asveld, A Family of Fibonacci-Like sequences. Fibonacci Quart. 25, No. 1 (1987), 81-83.

[2] Peter R.J. Asveld, Another Family of Fibonacci-Like sequences, Fibonacci Quart. 25, No. 4 (1987), 361-364.

[3] Marjorie Bicknell-Johnson and Gerald E. Bergum, The generalized Fibonacci Numbers, Applications of Fibonacci numbers (ed. by A.N. Philipou et al), Kluwer Acad. Publ., (1988), 193-205.

[4] M.D' Ocagne, Mémoire sur les suites récurrentes Journal de l'ecole polytechnique, 64 (1884), 151-224.