KISS PÉTER*

A LUCAS SZÁMOK PRIMOSZTÓINAK EGY TULAJDONSÁGÁRÓL

ABSTRACT: *(On a property of the prime divisors of Lucas numbers)* *Let* (R_n) *be a sequence of Lucas numbers defined by* $R_0=0$, $R_1=1$ *and* $R_n=AR_{n-1}+BR_{n-2}$ $(n>1)$, *where* A, B *are fixed coprime non-zero integers. For a prime* p $(p\nmid B)$ $r(p)>0$ *denotes the rank of apparition of* p *in the sequence, i.e.* $p|R_{r(p)}$ *but* $p\nmid R_m$ *for* $0<m<r(p)$. *We prove that the mean values of the numbers* $p/r(p)$ *and* $r(p)/p$, *for which* $r(p)\le x$, *are greater than* $\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\cdot\log x$ *and less than* $(1+\varepsilon)(\log\log x)/\log x$, *respectively, for any* $\varepsilon>0$ *if* x *is sufficiently large.*

Legyen $R=(R_n)$, $n=0,1,2,\ldots$, a Lucas számok egy sorozata, melyet az A,B zérustól különböző rögzített egészek, az

$$R_n = A\cdot R_{n-1} + B\cdot R_{n-2} \qquad (n>1)$$

rekurzió és az $R_0=0$, $R_1=1$ kezdő elemek definiálnak. A továbbiakban feltesszük, hogy az R sorozat nem degenerált, vagyis $(A,B)=1$ és a sorozatnak nincs R_0-tól különböző zérus eleme.

Ismert, hogy ha p egy primszám és $p\nmid B$, akkor van az R sorozatban R_0-tól különböző p-vel osztható tag. Ha $n>0$ és $p|R_n$, de $p\nmid R_m$ az $m=1,2,\ldots,n-1$ indexekre, akkor az n indexet a p prim előfordulási rendjének nevezzük az R sorozatban és $r(p)$-vel jelöljük. Tehát ha $p\nmid B$, akkor $r(p)$ létezik és

---

* A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273 sz. pályázata támogatta.

$p|R_{r(p)}$, de $p\nmid R_i$, $i=1,2,\dots,r(p)-1$. Az is jól ismert, hogy nincs a sorozatban p-vel osztható tag, ha $p|B$ és $(A,B)=1$ (ilyenkor $r(p)=\infty$ megállapodással élünk), továbbá $p\nmid B$ esetén

$$r(p)|(p-(D/p)),$$

ahol $D=A^2+4B$ és (D/p) a Legendre szimbolum $(D/p)=0$ a $p|D$ esetben kiterjesztéssel (lásd pl. D.H. Lehmer [4]).

Az előzőekből következik, hogy $r(p) \le p-(D/p) \le p+1$, ezért nyilván $r(p)/p \le 1+\frac{1}{2} < 2$ minden $p\nmid B$ primszám esetén. De [1] és [2] eredményeiből következik, hogy $r(p)/p$ tetszőlegesen kicsi is lehet. [3] -ban $r(p)/p$ átlagértékeire a következőket kaptuk: léteznek c_1, c_2, c_3, c_4 pozitiv abszolut konstansok ugy, hogy

(1) $$c_1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x} < \sum_{p\le x} \frac{r(p)}{p} < c_2 \cdot \frac{x}{\log x}$$

és

(2) $$c_3 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x} < \sum_{r(p)\le x} \frac{r(p)}{p} < c_4 \cdot x$$

minden elég nagy x-re. Mivel az x-nél nem nagyobb primek száma aszimptotikusan $x/\log x$ és, mint ahogy majd látni fogjuk, az $r(p) \le x$ feltételt kielégítő primek száma legalább $(1-\varepsilon)x$ bármely $\varepsilon>0$ esetén, ha x elég nagy, ezért (1) és (2) jobboldalából csak az következik, hogy $r(p)/p$ átlagértéke kisebb mint egy konstans. A következőkben jobb becslést adunk $r(p)/p$ és $p/r(p)$ átlagértékeire. A következőt bizonyitjuk:

TÉTEL. Legyen x egy pozitiv valós szám és $\omega(x)$ azon primek száma, melyekre $r(p) \le x$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén

(3) $$\frac{1}{\omega(x)} \cdot \sum_{r(p)\le x} \frac{p}{r(p)} > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \log x$$

és

$$(4) \qquad \frac{1}{\omega(x)} \cdot \sum_{r(p)\le x} \frac{r(p)}{p} < \left(1 + \varepsilon\right) \cdot \frac{\log\log x}{\log x}$$

ha $x > x(\varepsilon)$.

A tételünk alapján következtethetünk a Lucas számok primitiv primosztóinak nagyságára is. Egy R Lucas szám primitiv primosztójának nevezzük a p primszámot, ha $r(p)=n$. A tételünkből következik, hogy általában $p > r(p)\cdot\log x$, vagyis R_n primitiv primosztóira általában $p > n\cdot\log n$. A Lucas számok legnagyobb primitiv primosztóira C.L. Stewart [6] hasonló eredményt ért el, miszerint majdnem minden n természetes szám esetén R_n legnagyobb primitiv primosztója nagyobb mint $\varepsilon(n)\cdot n\cdot(\log n)^2/\log\log n$, ahol $\varepsilon(n)$ egy tetszőleges, $\varepsilon(n) \longrightarrow 0$, ha $n \longrightarrow \infty$ feltételt kielégitő függvény. Stewart eredménye csak a legnagyobb primitiv primosztóra, a mi eredményünk pedig minden primitiv primosztóra vonatkozik.

Megemlitjük, hogy a (3) egyenlőtlenség egy gyengébb formáját Révész Máriusz [5] is bizonyította, ő az $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ helyett egy konstans létezését bizonyította.

Rátérünk a tételünk bizonyítására.

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A továbbiakban feltesszük, hogy x egész szám, továbbá ε_1, ε_2, ... -vel pozitiv valós számokat jelölünk, melyek tetszőlegesen kicsik lehetnek, ha x elég nagy.

C.L. Stewart [7] bizonyította, hogy van olyan n_0 pozitiv egész szám ugy, hogy minden $n > n_0$ esetén az R_n Lucas számnak van primitiv primosztója, vagyis minden n_0 -nál nagyobb n egészhez van olyan p prim, melyre $r(p)=n$. Ebből következik, hogy

$$(5) \qquad \omega(x) \ge x - n_0 > (1 - \varepsilon_1)x.$$

Legyen $p_1, p_2, \ldots$ a prímszámok növekvő sorozata. Ekkor $\omega(x)$ definíciója alapján

$$(6) \qquad \sum_{r(p)\le x} \frac{p}{r(p)} > \frac{1}{x} \cdot \sum_{r(p)\le x} p \ge \frac{1}{x} \cdot \sum_{i=1}^{\omega(x)} p_i \ .$$

Ismert, hogy

$$p_n > n \cdot \log n$$

minden $n \ge 1$ esetén és ha $y > 3$ tetszőleges valós szám, akkor

$$\sum_{p\le y} p = \frac{y^2}{2\cdot \log y} + O\left(\frac{y^2}{\log^2 y}\right) ,$$

ezért $n=\omega(x)$ és $y=\omega(x)\cdot\log\omega(x)$ helyettesítéssel

$$\sum_{i=1}^{\omega(x)} p_i \ge \sum_{p\le y} p \ge (1-\varepsilon_2)\cdot \frac{y^2}{2\cdot\log y} \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_3\right)\cdot(\omega(x))^2\cdot\log\omega(x)$$

következik. Ebből viszont (5) és (6) alapján

$$\sum_{r(p)\le x} \frac{p}{r(p)} > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_3\right)\cdot \frac{\omega(x)\cdot\log\omega(x)}{x} \cdot \omega(x) >$$

$$> \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_4\right)(\log x)\cdot\omega(x)$$

adódik, amiből (3) már következik.

Most rátérünk (4) bizonyítására.

Mivel $r(p) \le p+1$ a $p\nmid B$ feltételt kielégítő primekre és

$$(7) \qquad \sum_{p\le y} \frac{1}{p} = \log\log y + C + O\left(\frac{1}{\log^2 y}\right) ,$$

ahol C egy abszolut konstans, ezért (5) figyelembe vételével

$$(8) \qquad \sum_{\substack{r(p)\le x\\ p\le\omega(x)}} \frac{r(p)}{p} \le \Pi(\omega(x)) + \sum_{p\le\omega(x)} \frac{1}{p} <$$

$$< \left(1+\varepsilon_6\right)\cdot \frac{\omega(x)}{\log \omega(x)} ,$$

ahol $\Pi(\omega(x))$ az $\omega(x)$ -nél nem nagyobb primszámok számát jelöli. Másrészt $p_n \le (1+\varepsilon_6) n \cdot \log n$ tetszőleges $\varepsilon_6 > 0$ esetén, ha $n > n(\varepsilon_6)$, ezért

$$(9) \qquad \sum_{\substack{r(p)\le x\\ p>\omega(x)}} \frac{r(p)}{p} \le x \cdot \sum_{\substack{r(p)\le x\\ p>\omega(x)}} \frac{1}{p} \le x \cdot \sum{}' \frac{1}{p}$$

adódik, ahol $\sum{}' \frac{1}{p}$ azon p primek reciprokösszegét jelenti, melyekre

$$\omega(x) < p \le (1+\varepsilon_6)\cdot\omega(x)\cdot\log\omega(x) .$$

Igy (7) alapján

$$\sum{}' \frac{1}{p} \le \log\log\left[(1+\varepsilon_6)\cdot\omega(x)\cdot\log\omega(x)\right] - \log\log\omega(x) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right) .$$

De ha y elég nagy valós szám, akkor

$$\log\log(y\cdot\log y) = \log\left(\log y\left(1+\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right) <$$

$$< \log\log y + (1+\varepsilon_7)\cdot \frac{\log\log y}{\log y} ,$$

ezért

$$(10) \qquad \sum{}' \frac{1}{p} < (1+\varepsilon_8)\cdot \frac{\log\log\omega(x)}{\log\omega(x)}$$

és (8), (9), (10) alapján

$$\sum_{r(p)\le x} \frac{r(p)}{p} < \left(1+\varepsilon_9\right)\cdot\left(\frac{\omega(x)}{\log\omega(x)} + \frac{x\cdot\log\log\omega(x)}{\log\omega(x)}\right)$$

következik. Azonban az

$$f(t) = \frac{\log \log t}{\log t}$$

függvény csökkenő, ha $t > e^e$, ezért (5) és $\frac{x}{\omega(x)} < (1+\varepsilon_{10})$ alapján a

$$\sum_{r(p) \le x} \frac{r(p)}{p} < \left(1 + \varepsilon_{11}\right) \cdot \omega(x) \cdot \left(\frac{1}{\log x} + \frac{\log \log x}{\log x}\right)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből (4) már következik.

IRODALOM

[1] P. Kiss and B.M. Phong, On a function concerning second order recurrences, Ann. Univ.Sci. Budapest. Eötvös, 21 (1978), 119-122.

[2] Kiss Péter, A Lucas számok primosztóiról, Acta Acad. Pedag. Agriensis, XVIII/11 (1987), 17-25.

[3] P. Kiss, On rank of apparition of primes in Lucas sequences, Publ. Math. Debrecen, 36 (1989), 147-151.

[4] D.H. Lehmer, An extended theory of Lucas' function, Ann. of Math., 31 (1930), 419-448.

[5] Révész Máriusz, Primszámok előfordulási rendje Lucas sorozatokban, Diákköri Dolgozat, Tanárképző Főiskola, Eger, 1988.

[6] C.L. Stewart, On the greatest prime factor of terms of a linear recurrence sequence, Rocky Mountain J. of Math., 15 (1985), 599-608.

[7] C.L. Stewart, Primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers, Transcendence theory: advances and applications, ed. by A. Baker and D.W. Masser, Acad. Press, London and New York, (1977), 79-92.