CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAOKTATÁSI KÍSÉRLETRŐL. IV.

SUMMARY: In this paper we have summarized the syllabus material written for the 4th year of secondary school geometry.

We have demonstrated how it is possible to define the circumference of the convex plane figure, the length of the of the convex arc, the area of the plane figure, the superficies of the convex geometric solid and the volume of the convex geometric solid with the help of limit value.

E dolgozatban annak a geometriai tananyagnak az összefoglalását adjuk meg, amelyet a tanterv a IV. osztály számára írt elő, és szeretnénk azt is megmutatni, milyen módon történt ez a korábban már tanított határérték fogalomra építve.

A tananyag a kerület-, ívhossz-, terület-, a felszín-, a térfogatszámítás.

Ahhoz, hogy a fogalmak mindannyiunk számára ugyanazt jelentsék, összefoglaltuk a *térelemek kölcsönös helyzetéről* szóló ismereteket, értelmeztük azok *távolságát* és *szögét*.

I. Sokszögek, síkidomok

A. Kerület és ívhossz

Mindenekelőtt a *töröttvonalat* értelmeztük, oldalai hosszának összegeként a *töröttvonal hosszát*, s bebizonyítottuk róla, hogy az nem kisebb a kezdő és végpontja összekötő szakaszának hosszánál (teljes indukcióval).

1. *Sokszögnek* neveztük az egyszerű, síkbeli zárt töröttvonalat, amelynek három egymást követő csúcsa nem illeszkedik egy egyenesre.
Értelmeztük a konvex és a konkáv sokszögeket is.
Sokszög kerületén oldalai hosszának összegét értettük. Bebizonyítottuk, hogy konvex sokszög kerülete nagyobb az általa tartalmazott konvex sokszögek kerületénél.
Beláttuk azt is, hogy hasonló sokszögek kerületének aránya a hasonlóság arányával egyenlő.
2. *Síkidomon* a sík véges, nem kolineánis részét értettük, határán pedig síkbeli vonalat, *síkgörbét* értettünk. Miután bebizonyítottuk, hogy konvex síkidom által tartalmazott konvex sokszögek kerületének van felső határa, ezt a *síkidom kerületének* neveztük. Következett az is, hogy minden konvex síkidomnak van kerülete, egybevágó síkidomok kerülete egyen-

lő, végül hasonló síkidomok kerületének aránya a hasonlóság arányával egyenlő.

3. A kör kerületét az előbbi gondolatok alapján adtuk meg. Mivel a kör konvex és mind hasonló, kerületük létezik és kerületük aránya sugaraik arányával egyenlő.

Ha k-val a kerületüket, r-rel a sugarukat jelöljük, akkor

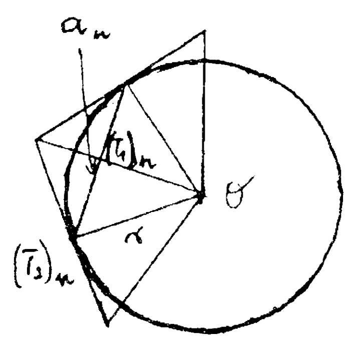
$$k_1 : k_2 : \cdots : k_n = r_1 : r_2 : \cdots r_n = 2r_1 : 2r_2 : \cdots : 2r_n .$$

Tehát a kerület és az átmérő aránya állandó (π):

$$\frac{k_n}{2r_n} = \pi; \quad \text{így } k = 2r\pi.$$

Az alábbi állítást szükségesnek tartottuk itt belátni, bár később a kör területének meghatározásánál volt rá csak szükség:

a körbe írt és a kör köré írt szabályos sokszögek kerülete a kör kerületéhez tart, ha a sokszög oldalszáma minden határon túl nő.



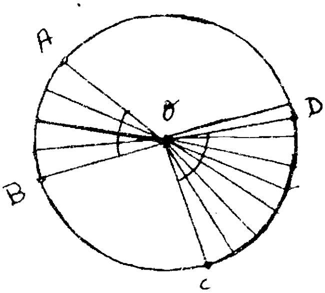
A körbe és köré n oldalú szabályos sokszöget írtunk. A beírt sokszögek kerülete a kör kerületéhez tart.

Ha $\frac{B_n}{K_n} \to 1$-hez, akkor Kn is a kör kerületéhez tart.

Mivel a két sokszög hasonló, ezért a hasonlóság arányával egyenlő a kerületek aránya.

Ezért $\frac{B_n}{K_n} = \frac{O(T_1)_n}{O(T_2)_N}$. Ez utóbbi azért tart az 1-hez, mert $O(T_2)_n = r$ és $O(T_2)_n - O(T_1)_n < (T_1)_n(T_2)_n$, valamint n minden határon túl való növelésével $a_n = 2(T_1)_n(T_2)_n \to 0$, vagyis $r - O(T_1)_n \to 0$, amiből $O(T_1)_n \to r$ adódik.

4. Egy konvex síkgörbét két pontja két konvex ívre bontja. Konvex ív hosszán, a konvex ív és a két végpont szakasza által meghatározott konvex síkidom kerületének és a két végpont szakasza hosszának különbségét értettük. Beláttuk, hogy ha egy konvex ívet bármely belső pontja két részre bont, a részek hosszának összege az eredeti ív hosszával egyenlő. Beláttuk, hogy egybevágó ívek hossza egyenlő, hasonlók hosszának aránya egyenlő a hasonlóság arányával.
5. Bebizonyítottuk, hogy egy kör ívei hosszának aránya egyenlő a hozzájuk tartozó középponti szögek arányával. (A területnél a térfogatnál a hasonló bizonyításoktól eltekintünk).



Osszuk fel az AOB szöget $n=2^m$ egyenlő részre, a kapott szöget mérjük fel az OC szártól a COD szögre ahányszor tudjuk.
Tegyük fel, hogy k-szor még ráfér, de $k+1$-szer már nem.
Ekkor

$$k\cdot\frac{AOB\sphericalangle}{n}\le COD\sphericalangle<(k+1)\cdot\frac{AOB\sphericalangle}{n}$$

Az I. osztályban bizonyítottuk, hogy egyenlő középponti szögekhez egybevágó (egyenlő) ívek tartoznak, így

$$k\cdot\frac{\overset{\frown}{AB}}{n}\le\overset{\frown}{CD}<(k+1)\cdot\frac{\overset{\frown}{AB}}{n}.$$

Osztások után

$$\frac{k}{n}\le\frac{COD\sphericalangle}{AOB\sphericalangle}<\frac{k+1}{n}\text{ és }\frac{k}{n}\le\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{AB}}<\frac{k+1}{n}$$

adódik.

Képezve az alábbi különbség abszolút értékét,

$$\left|\frac{COD}{AOB}-\frac{\overset{\frown}{CD}}{AB}\right|<\frac{1}{n},$$

mivel e két hányados a $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right)$ balról zárt jobbról nyitott intervallumban van.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, azért ez csak úgy állhat fenn minden n-re, ha

$$\frac{COD\sphericalangle}{AOB\sphericalangle}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Így ha α szöghöz i hosszúságú ív tartozik, akkor

$$i:2r\pi=\alpha:2\pi, \text{ amiből } i=r\cdot\alpha.$$

B. Terület

1. Bizonyítás nélkül elfogadtuk azt az állítást, hogy minden sokszöghöz hozzárendelhető egy pozitív valós szám, amelyet a *sokszög területének* nevezünk és amelyre fennáll az alábbi három tulajdonság:

   a) az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe 1;

   b) egybevágó sokszögek területe egyenlő;

   c) ha egy sokszöget két részsokszöggé bontunk, akkor a részek területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

Ezen állításból két újabb következik:

egyrészt, ha egy sokszög tartalmaz egy másik sokszöget, akkor területe a tartalmazott területénél nagyobb, másrészt ha egy sokszöget véges részsokszögre bontunk a részsokszögek területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő. (A bizonyítás gondolatmenetét persze röviden ismertettük, amiből kiderült, hogy sokszög területe azon háromszöget területének összege, amelyekre az valamilyen módon felbontható, s a háromszöghöz területként a háromszög valamely oldalának és hozzátartozó magassága szorzatának felét rendeltük, ami egy háromszögre állandó.)

A terület egyértelműségét úgy láttuk be, hogy feltettük: létezik olyan terület (függvény) amely az előbbitől különbözik, de a három tulajdonságot teljesíti.

Belátható volt, hogy ha két téglalap egy-egy oldala egyenlő, akkor területük aránya a hozzájuk csatlakozó oldalaik arányával egyenlő. Ebből aztán beláttuk, hogy a téglalap területe két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő. Azt is beláttuk, hogy ezen ismeretek birtokában a háromszög területére valamelyik oldala és hozzátartozó magassága szorzatának fele adódik. Így tehát minden sokszögnek van egyértelműen meghatározott területe.

Ezek után a trapéz területe: $\dfrac{a+c}{2}\cdot m$,
a paralelogrammáé: $a\cdot m_a$,
a deltoidé: $\frac{1}{2}e\cdot f$,
az érintősokszögé: $\frac{1}{2}k\cdot r$
ebből a háromszögé: $g\cdot s$, ahol a betűk az irodalmakban megszokott mennyiségeket jelölik. Persze teljességről itt szó sincs.

2. Mivel a síkidomok korlátos ponthalmazok, ezért vannak olyan sokszögek, amelyek a síkidomot tartalmazzák, és vannak olyan sokszögek, amelyeket a síkidom tartalmaz.

Értelmezés: Ha a síkidomot tartalmazó sokszöget területének alsó határa egyenlő a síkidom által tartalmazott sokszögek területének felső határával, akkor ezt a számot a *síkidom területének* nevezzük.

Megfogalmaztuk, hogy ha egy síkidomnak van területe, az analízis nyelvén azt jelenti, hogy létezik olyan külső (K) és olyan belső (B) sokszög, amelyekre bármilyen kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén $t(K) - t(B) < \varepsilon$,

$$\frac{t(K)}{t(B)} < 1 + \varepsilon \text{ vagy } \frac{t(B)}{t(K)} > 1 - \varepsilon \text{ áll fenn.}$$

Beláttuk, hogy ha egybevágó síkidomok közül valamelyiknek van területe, akkor a többinek is van, s a területük egyenlő. Bizonyítás nélkül elfogadtuk, hogy ha egy síkidomot két olyan síkidomra bontunk, amelyeknek van területük, akkor van területe az eredeti síkidomnak, amelynek területe a két részsíkidom területének összegével egyenlő. Ugyanígy elfogadtuk, hogy ha egy síkidomnak és egy részének van területe, akkor van terület a másik részének is és területe, az eredeti területének és a részsíkidom területének különbségével egyenlő.

Ezek segítségével a kör területe: $r^2\pi$

(a kiszámításnál az érintősokszög kerületét használtuk fel),

a körcikké: $\frac{ri}{2}$,

a körgyűrűé: $2g\pi d$,

a körszeleté: $\frac{ri}{2} - \frac{1}{2}r^2 \sin\alpha$.

Mivel a hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, ezért az értelmezések alapján a hasonló síkidomok területének arányára is a hasonlóság arányának négyzete áll fenn.

II. Poliéderek, mértani testek

A. Poliéderek

Az olyan térrészt, amelyet véges számú sokszög határol és nem tartalmaz félegyenest, *poliédernek* nevezzük.

Néhány speciális poliéderrel foglalkoztunk. Először a *hasábfelülettel*, majd a hasábbal, köztük a *paralelepipedonnal*, a *téglatesttel*, *kockával* foglalkoztunk.

Másodszor a *gúlafelülettel*, majd a *gúlával*, és a *csonka gúlával*. A feladatok megoldásához pedig néhány sajátos síkmetszetet vizsgáltunk.

B. Mértani testek

A tér tetszőleges, nem komplanáris korlátos ponthalmazát *mértani test*nek nevezzük (ilyenek a poliéderek is).

Itt is előbb a *hengerfelületet*, a *hengert*, továbbá a *kúpfelületet*, a kúpot és a csonka kúpot értelmeztük, vizsgáltuk sajátos síkmetszeteiket is.

A gömböt mint a tér adott pontjától adott távolságra lévő pontjainak halmazát értelmeztük. Értelmeztük a *forgásteste-*

ket is és az *egyenes körhengert*, az *egyenes körkúpot*, az *egyenes csonka körkúpot*, valamint a gömböt *forgástestekként* is értelmeztük.

C. Felszínszámítás

1. Poliéder *felszínén* a határoló sokszögek területének összegét értjük.

Így az egyes hasáb felszíne: $F = 2T + km$, ahol T a hasáb alaplapjának területe, k a kerülete, m pedig a hasáb magassága.

A szabályos sokszögalapú egyenes csonka gúla felszíne

$$F = T + t + \frac{k+K}{2} m_t,$$

ahol az m_t az oldallap (trapézok) magassága.

A szabályos sokszögalapú egyenes csonka gúla felszíne

$$F = T + t + \frac{k+K}{2} m_t,$$

ahol az m_t az oldallap (trapézlapok) magassága.

2. Konvex mértani test felszínén a testbe írt konvex poliéderek felszínének felső határát értjük.

A fenti összefüggések az alábbi határok meghatározásához kellenek. Az r sugarú, m magasságú egyenes körhenger térfogata a beleírt n oldalú szabályos sokszög alapú egyenes hasábok $F_n = 2t_n + k_n \cdot m$ felszínének felső határa:

$$F = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m.$$

Az r sugarú, o alkotójú egyenes körkúp térfogata a beleírt n oldalú szabályos sokszögalapú egyenes gúlák

$$F_n = t_n + \frac{1}{2} k_n \pi \cdot o_n \text{ f}$$

elszínének felső határa

$$F = r^2\pi + r\pi + r\pi \cdot o.$$

Az egyenes csonka kúp felszíne a beleírt n oldalú szabályos sokszög alapú csonka gúlák

$$F_n = T_n + t_n + \frac{k_n + K_n}{2} m_{tr}$$

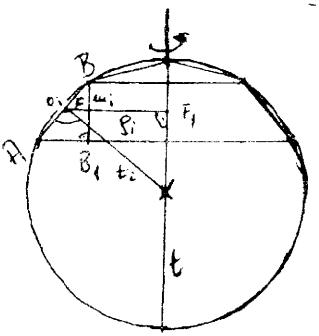
felszínének felső határa

$$F = R^2\pi + r^2\pi + (r + R)\pi \cdot o.$$

A gömb felszínének meghatározásához felhasználjuk a csonka kúp palástjának felszínét, ami

$$P = (r + R)\pi o = 2\varsigma \pi d \text{, ahol } \varsigma = \frac{r + R}{2},$$

(ς a kiterített palást (körgyűrűcikk) középívének sugara).



Így az r sugarú gömb felszíne $F = 4r^2\pi$. Tekintsünk ugyanis az r sugarú kört és egy abba írt páros ($n = 2k$) oldalszámú szabályos sokszöget. Válasszuk ki valamely átellenes csúcspont párjának összekötő egyenesét és forgassuk meg t körül a kört és a sokszöget. A körből gömb, a sokszögből k darab csonkakúppalást (2 speciális) alakul ki.

Az $OFF_{1\Delta} \sim ABB_{1\Delta}$-höz két-két szög egyenlősége miatt. Így az i-edik palástfelszín $P_i = 2\varsigma_i \pi o_i$, az előbbi Δ-ek hasonlósága miatt ($\varsigma_i \cdot t_i = m_i : o_i$) $P_i = 2t_i \pi m_i$ alakot veszi fel.

Összegezve a palástfelszíneket,

$$P = P_1 + P_2 + \cdots\cdots + P_n$$

$$P = 2t_i\ \pi(m_1 + m_3 + \cdots\cdots + m_k) = 2t_i\,\pi 2r.$$

Ennek felső határa $n \to \infty$ esetén a gömb felszíne $F = 4r^2\pi$, hiszen $t_i \to r$.

D. Térfogatszámítás

Egy nem bizonyított tétellel kezdtük.

1. Minden poliéderhez hozzárendelhető egy pozitív valós szám, amit a poliéder térfogatának nevezünk, és ami rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.
   a) az egységnyi élhosszúságú kocka térfogata 1,
   b) egybevágó poliéderek térfogata egyenlő,
   c) ha egy poliédert két poliéderre bontunk, akkor a részek térfogatának összege egyenlő az eredeti poliéder térfogatával.

E tételből következik, hogy ha egy poliéder egy másik poliédert tartalmaz, akkor a térfogata nagyobb a tartalmazott poliéder térfogatánál, s az is, hogy ha egy poliédert véges sok részre osztunk, akkor a részek térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.

Persze ezek alapján hozzá is fogtunk néhány poliéder térfogatának meghatározásához.

Előbb beláttuk, hogy ha két téglatest alaplapja egybevágó, akkor térfogatuk aránya magasságuk arányával egyenlő.

A téglatest térfogatát a három egy csúcsból kiinduló élének szorzataként kaptuk. Ezután a háromszögalapú, majd a sokszögalapú egyenes hasáb térfogatát határoztuk meg. A ferde hasáb térfogata – egy az oldaléleire merőleges síkmetszet és az alaplap területe közötti $T' = T_o \cos\alpha$ kapcsolat felismerésével – mint előbb az alapterület és a magasság szorzata lett.

A gúla térfogatának felhasználásával, s a hasáb három egyenlő térfogatú háromszög alapú gúlára való bontásával a háromszög alapú gúla térfogata az alapterület és a magasság szorzatának harmadaként adódott.

A csonka gúla térfogatát egy azt gúlává egészítő újabb gúla segítségével nyertük: $V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t)$ alakban.

2. A mértani testhez – annak korlátossága miatt – találhatók azt tartalmazó, és általa tartalmazott poliéderek. Ezeket külső, illetve belső poliédereknek nevezzük. Eddigi eredményeink alapján az előbbiek térfogata alulról, az utóbbiak térfogata felülről korlátos számhalmazt alkot. (Létezik alsó, illetve felső határ.)

   Ha egy mértani testet tartalmazó poliéderek térfogatának alsó határa egyenlő a mértani test által tartalmazott poliéderek térfogatának felső határával, akkor ezt a közös *határt a mértani test térfogatának* neveztük. Bár a mértani testek térfogatára is fenn állnak a poliéder térfogatára kimondott tétel állításai, ezekkel nem foglalkozhattunk, segítségükkel néhány speciális mértani test térfogatának meghatározására szorítkozunk.

Az egyenes körhenger térfogata $V = r^2 \cdot \pi \cdot m$.
Írtunk a körhengerbe és köré n oldalú szabályos húrsokszög alapú hasábokat.
A beírt hasábok térfogata: $V_{bn} = t_{bn} \cdot m$,
a körülírtaké: $V_{kn} = t_{kn} \cdot m$,.
Mivel $t_{bn} \to r^2 \cdot \pi$ és $t_{bn} \to r^2 \cdot \pi$, ha $n \to \infty$, így $V_{bn} \to r^2 \cdot \pi \cdot m$ és $V_{kn} \to r^2 \cdot \pi \cdot m$, van közös határ, vagyis a henger térfogata $V = r^2 \cdot \pi \cdot m$.
Hasonló módon bizonyítottuk be, hogy az egyenes körkúp térfogata:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot m,$$

míg az egyenes csonka körkúp térfogata:

$$V = \frac{m\pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2).$$

A gömb térfogatát a nem bizonyított ún. Cavalieri-elv segítségével határoztuk meg. Mivel egy r sugarú félgömb és egy r sugarú és r magasságú egyenes körhengerből kivett r sugarú r magasságú körkúp után visszamaradó test teljesíti a Cavalieri elvben felsorolt feltételeket, az utóbbi $V = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot m$, térfogata a félgömb térfogatával egyenlő, s a gömb térfogata $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$.

Integrálszámítással a forgástestek térfogatát is megadtuk. A konvex síkidomok kerületének — köztük a kör kerületének —, a konvex ív hosszának, köztük a körív hosszának —, a síkidom területének, a konvex mértani test felszínének és a mértani test térfogatának, az alulról, illetve felülről korlátos számhalmazok tulajdonságainak, valamint a számszorzat határértéke fogalmának felhasználásával való definiálása a közepes vagy annál jobb tanulók esetében nagyon sokat adott.
Eddig ezekről csak képletek formájában volt fogalmuk, most már némi tapasztalat és absztrakció segítségével a valóságot jobban leíró fogalmak alakultak ki a fent említettekről.

Itt persze e dolgozatban csak egy angol tagozatos osztálynak tanított geometriai tananyag vázlatát közöltem az eddig megszokottól eltérő módon.
A kísérletet sikeresnek ítélem, hiszen a gyengébbek is tudták követni úgy az anyagot, ahogyan más osztályok az ott tanítottakat. Viszont a továbbtanulók (azóta történt visszajelzésekre is alapozva) annyi többletet kaptak, amennyi könnyen segítette át őket a középiskola és a felsőoktatás matematika oktatásának feltűnő szintkülönbségén.