PELLE BÉLA

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK AZ ÁLTALÁNOS ISKOLÁBAN

RESÜMEE: Geometrische Transformationen in der Schule, Teil 2. Seit einiger Zeit verstärken sich die Versuche, den geometrischen Unterricht in den Prozeß der Umgestaltung und Modernisierung des mathematischen Unterreichts dadurch einzubeziehen, daß den eindeutigen (geometrischen) Abbildungen der Ebene auf sich, den Transformationen, der ihnen gebührende zentrale Platz eingeräumt wird. Dem Vorschlag liegt ein axiomensystem zugrunde, das aus dem Hilbertshen durch gewiesse Änderungen entsteht. Die Hilbertschen Kongruenzaxiome werden durch solche der Spiegelung ersetzt, durch Zusammensetzung von Spiegelungen die Bewegungen (Kongruenztransformationen) gewonnen. Mit diesen Transformationen untersucht man die Eigenschaften von Figuren der Ebene. Diese Verhandlung muß in der Grundschule gegründet werden. Der propädeutische Unterricht erarbeitet wesentliche Inhalte der Hilbertschen Axiomengruppen der Verknüpfung, Anordnung, Parallelität sowie Sachverhalte der Kungruenzlehre (gleichlange Strecken, gleichgroße Winkel, Spiegelungen an Geraden).

Im Teil 1. habe ich über die Lehrstoffe der Klassen 1–4 der Grundschule geschrieben. Im Teil 2. fasse ich die Lehrstoffe der Klassen 5–6 zusammen.

Általános megjegyzés

A geometria tárgyalásánál a sík ponthalmazához olyan transzformációkat rendelünk, amelyek a síkot önmagára képezik le. Az alakzatokat a sík ponthalmazának részhalmazaként fogjuk fel. Az alakzatok tulajdonságait a sík ponthalmazához rendelt transzformációk segítségével állítjuk össze. A tárgyalás során tehát először megismerjük az egyes transzformációkat, ezek alkalmazását feladatokon gyakoroljuk, majd az alakzatok tulajdonságait a transzformációk segítségével megvizsgáljuk.

Geometriai transzformációk az 5. osztályban

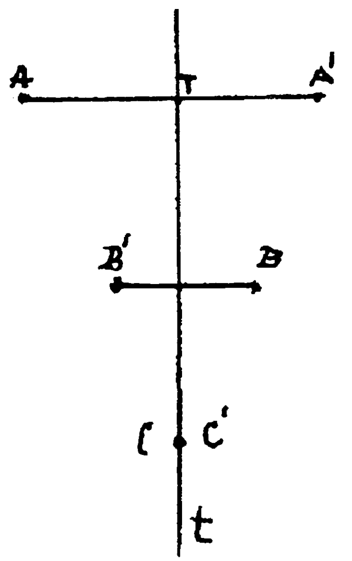
A tengelyes tükrözéssel kapcsolatos néhány fogalom gyakorlására az adott tulajdonságú pontok keresésénél nyílik alkalom. A két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok keresésénél megállapítjuk, hogy az az AB szakasz felező merőlegese. Az eddig tanultakból azonnal következik, hogy a felezőmerőlegesre az A,B pontpár tükrös, tehát a felezőmerőleges tükörtengely.

A közös pontból kiinduló két félegyenestől egyenlő távolságra lévő pontokról megállapítjuk, hogy azok a hajtásél pontjai. A hajtásél mentén összehajtva a két egyenes fedésbe hozható. Ellenőrizhetjük, hogy a két egyenes pontjai a hajtásélre tükrözve egymásba mennek át, továbbá a hajtásél felezi a szöget. Éppen azért szögfelezőnek nevezzük. A szögfelező tehát a szög száraihoz tartozó tükörtengely.

Az 5. osztály anyagában körülbelül ezekkel tarthatjuk fenn a folyamatosságot az alsó tagozat és felső tagozat között a geometriai transzformációknál.

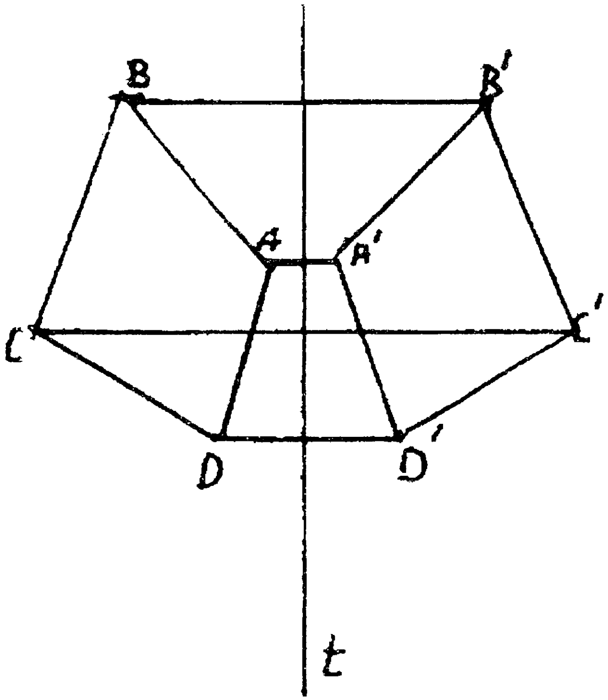
Geometriai transzformációk a 6. osztályban

Tengelyes tükrözés a síkon.



A tengelyes tükrözés egy sík pontjaihoz a sík pontjait rendeli a következő előírás szerint: Egy tetszőleges A pontból merőlegest húzunk a t tengelyre és a tengelyen lévő T metszéspontból felmérjük az AT szakaszt a másik félsíkban a merőleges egyenesre. Így kapjuk meg az A pont A' tükörképét.

Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget a t tükörtengelyre!



Mondj igaz állításokat!

a) a pontokról és képeikről;

b) a szakaszokról és képeikről;

c) a szögekről és képeikről;

d) a szakaszokra illeszkedő egyenesekről és képeikről,

e) a tengelyek pontjairól;

f) a tengely által meghatározott félsíkokról;

g) a pontokat és képeiket összekötő egyenesekről.

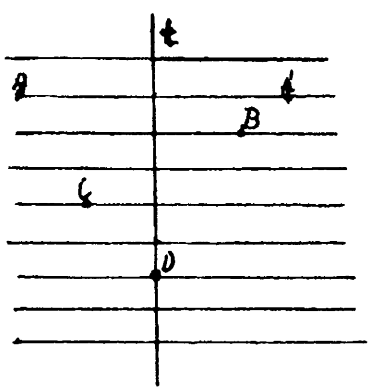
Ezek után foglaljuk össze a *tengelyes tükrözés alaptulajdonságait*!

1. A sík ponthalmazához a sík ponthalmazát rendeli.
2. A tengely pontjai fixek.
3. A félsíkokat felcseréli.
4. A pontot és képét összekötő szakasz merőleges a tengelyre, a tengely a szakaszt felezi.
5. Az eredeti és a képpontokat összekötő szakaszok párhuzamosak.
6. A tengelyes tükrözés szakasztartó és szögtartó transzformáció.
7. Alakzat és képe egybevágó.
8. Az alakzatok körüljárást megváltoztatja.

Gyakorlás

1. Négyzetrácson adott egy pont és a tükrözéssel kapott képe. Jelöld ki a tükörtengelyt!

Válaszolj!



a) A sík bármely pontjának a képét meg tudjuk ezután rajzolni?

b) A pont és képe meghatározza a tengelyes tükrözést?

c) Egy pontnak egy képe van, vagy több?

Egy pont és képe a tengelyes tükrözést egyértelműen meghatározza.

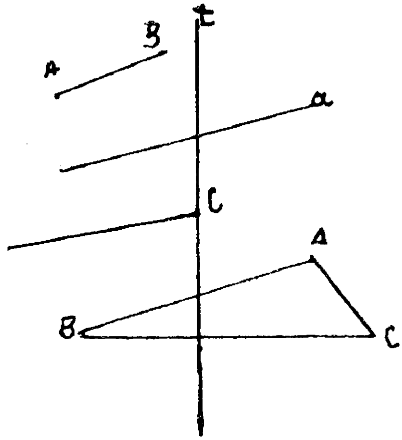
2. Adott a tengely, szerkesszük meg

a) az AB szakasz képét;

b) az a egyenes képét;

c) a C-ből kiinduló félegyenes képét

d) az ABC háromszög képét!



A tengely a tengelyes tükrözést egyértelműen meghatározza.

3. Négyzetrácson jelöljünk ki egy szakaszt! Keressünk olyan tengelyt, amelyre tükrözve a szakasz önmaga lesz a tükörképe.
   Hány ilyen tengely van?

4. Rajzoljunk egy egyenest! Keressünk olyan tengelyt, amelyre tükrözve az egyenes saját magának a tükörképe lesz!
   Hány ilyen tengely van?
   Azokat az egyeneseket, amelyeknek képe önmaga, invariáns *egyeneseknek* nevezzük.

5. Négyzetrácson jelöljünk ki két párhuzamos egyenest! Húzzunk olyan egyenest, amelyre az egyik egyenest tükrözve a másik egyenes kapjuk! Hány ilyen egyenes van?

Megoldás: a két párhuzamos egyeneshez egy tengely-egyenes van. Ezt a tengely-egyenest a két párhuzamos egyenes *középvonalának* nevezzük.

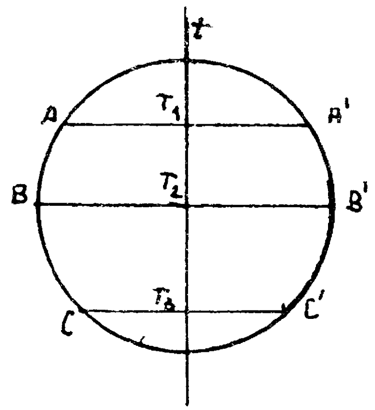
A következőkben a tengelyes szimmetrikus alakzatok tulajdonságait vizsgáljuk meg a tengelyes tükrözés segítségével.

A kör tükrös alakzat

A következő felépítésben tárgyalhatjuk:

a) Észrevétetjük, hogy a kör tükrös az átmérőre;
b) A tükrözésből megállapítjuk a húr és átmérő kapcsolatát, ezt összevetjük az 5. osztályban tanultakkal,
c) Rávezetjük a tanulókat az érintő és sugár kapcsolatára.
Ezt elvégezzük pl. a következő felépítésben.

Húzzunk meg a körben egy tetszőleges átmérőt! Hajtsuk ketté az átmérő mentén a kört! A két rész fedi egymást. Jelöljünk meg az egyik félkörön tetszőleges pontokat. A hajtogatás után jelöljük meg a másik félkörön a pontok megfelelőit. Kössük össze a megfelelő pontokat.
Mit tapasztalunk?



AA', BB', CC' merőleges az átmérőre. Mindegyik szakaszt felezi az átmérő, tehát $AT_1 = T_1A'$, $BT_2 = T_2B'$, $CT_3 = T_3C'$. A és A', B és B', C és C' szimmetrikus az átmérőre. Az egyik félkörből a másik félkört megkapjuk, ha a félkör pontjait tükrözzük az átmérőre.

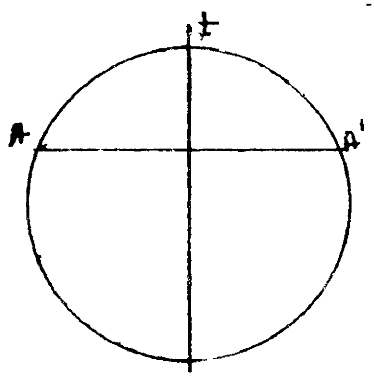
A kör átmérője a körnek tükörtengelye. A körnek minden átmérő tükörtengelye.

Rajzoljunk a körbe egy húrt! A középpontból rajzoljunk merőlegest a húrra!

Az előzőek alapján mondjunk igaz állításokat a húrra és a rá merőleges átmérőre!

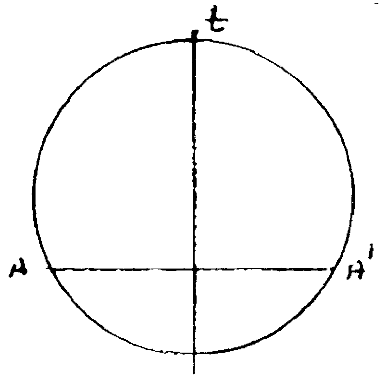
A húrra merőleges átmérő felezi a húrt. A húr felezési pontján átmenő átmérő merőleges a húrra.

A húr felezőmerőlegese átmérő.



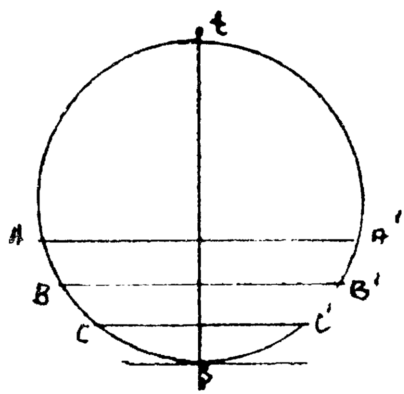
Ellenőrizzük, igazoljuk ezeket az állításokat az 5. osztályban tanultak segítségével!

AA' egy szakasz. A szakasz két végpontjából egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye a szakaszfelező merőleges. A középpont is ilyen tulajdonságú, tehát a húrfelező merőleges átmegy a kör középpontján.



A húr közeledjen az átmérő egyik végpontja felé!

AA', BB', CC' húrok párhuzamosak, merőlegesek az átmérőre, A és A', B és B', C és C' szimmetrikus társak. Az átmérő végpontját jelöljük P-vel.
Mi lesz P szimmetrikus társa?
P szimmetriatársa P, P fixpont, mert a tengelyen van.

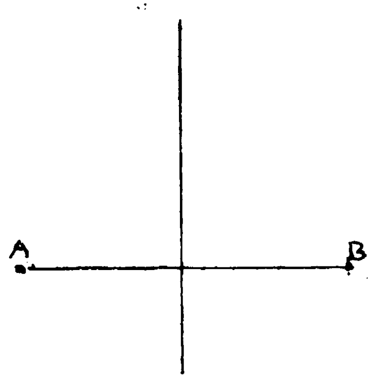


P-ben húzzunk merőlegest az átmérőre, mint tükörtengelyre. Ez a merőleges a körből P szimmetriatársát metszené ki. Mivel ez P, így a merőleges nem metszi a kört, csak egy közös pontja van a körrel. Ez a merőleges egyenes, tehát *érintő.*

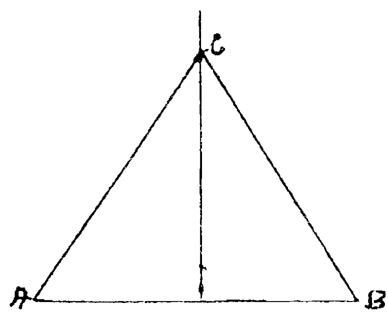
Milyen tulajdonsága van az érintőnek és az átmérőnek a tükrözés alapján? Az átmérő és a végpontjában húzott érintő merőleges egymásra. Ha az átmérőnek csak az érintési ponthoz tartozó felét tekintjük, akkor az sugár.
Így: *az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.*

Tükrös háromszögek

Az eddig tanultak alapján rajzoljuk meg azt az egyenest, amelynek pontjai egyenlő távolságra vannak az A és a B pontoktól.
Milyen neveket adtunk ennek az egyenesnek? *Szakaszfelező merőleges*, amely két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye, két ponthoz tartozó tükörtengely.



Válasszuk ki a szakaszfelező merőleges tetszőleges C pontját és kössük össze A-val és B-vel. $AC = BC$, tehát az ABC háromszög *egyenlő szárú háromszög.*



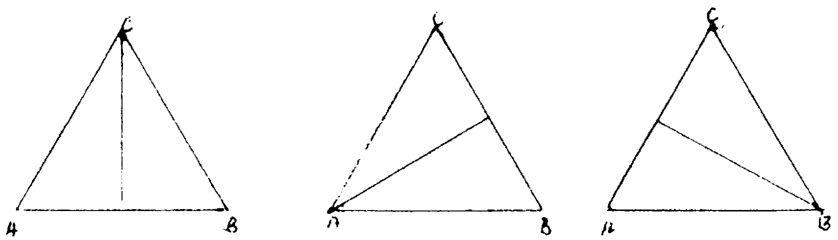
Tükrözzük az ABC háromszöget az alapfelező merőlegesre! Az A pont B-be kerül, a B pont A-ba, C pedig C-be. Így a háromszög képe önmaga.

Az egyenlő szárú háromszög tükrös az alap felezőmerőlegesére. Az alapfelező merőleges tükörtengely.

Állapítsuk meg az egyenlőszárú háromszög tulajdonságait a tükrözés alapján!

1. A CAB szög képe CBA szög, tehát az *alapon lévő szögek egyenlők*;
2. Az ACT szög képe BCT szög, tehát a *tükörtengely felezi a szárak szögét*;
3. Az egyenlő szárú háromszög tükörtengelye merőleges az alapra és azt felezi.

Az AB szakaszhoz tartozó tükörtengelyen jelöljük ki azt a pontot, amelynek A-tól és B-től a távolsága AB-vel egyenlő!



A háromszög nem csak egyenlő szárú, *hanem egyenlő* oldalú is, mert $AB = AC = BC$.

A tükrözés alapján (és az egyenlő szárú háromszögről tanultak alapján) az alapon lévő szögek egyenlők, tehát

$$CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle .$$

Válasszuk most BC-t alapnak. BC szakaszfelező merőleges átmegy az A csúcson, mert A egyenlő távolságra van a B és C pontoktól ($AB = AC$). Akkor a BC alapon lévő szögek is egyenlők, vagyis:

$$CAB\sphericalangle = BCA\sphericalangle .$$

Így: $CAB\sphericalangle = CAB\sphericalangle = BCA\sphericalangle$, vagyis az egyenlő oldalú háromszög szögei egyenlők.

Igazoljuk, hogy az AC oldal is lehet alapja az egyenlő oldalú háromszögnek!

Az AC szakaszhoz tartozó felezőmerőleges átmegy a B csúcson, mert a B pont egyenlő távolságra van az A és a C pontoktól: $AB = CB$. Hány tükörtengelye van az egyenlő oldalú háromszögnek? (Három.)

Foglaljuk össze az *egyenlő oldalú háromszög tulajdonságait*!

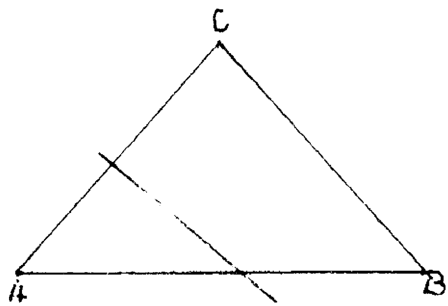
1. Minden szöge egyenlő.
2. Három tükörtengelye van.
3. A tükörtengelyek felezik a szögeket.

Méréssel válaszoljunk a következő kérdésekre!

Hány fokos az egyenlő oldalú háromszög egyik szöge? (60).

Hány fok egy háromszög belső szögeinek összege? (180).

Igazoljuk, hogy a nem egyenlő oldalú, egyenlő szárú háromszögnek nem lehet három tükörtengelye!

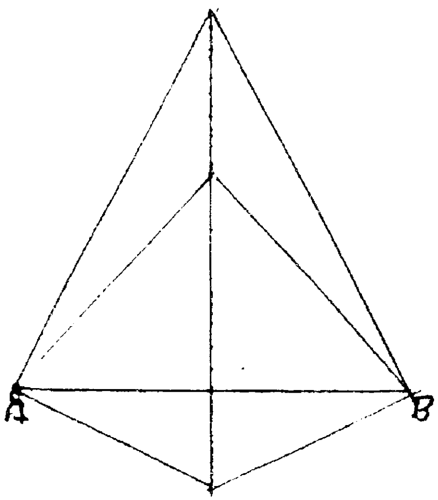


Ha $BC = AC$, de $BC \neq AB$, akkor az AC oldalhoz tartozó felezőmerőleges nem megy át a B csúcson, mert B nincs egyenlő távolságra A-tól és C-től. Hasonlóan ez igaz a BC szakaszra is.

Mi következik a bizonyításból?
Az egyenlő szárú, nem egyenlő oldalú háromszögnek 2 vagy 3 tükörtengelye nem lehet, csak 1.

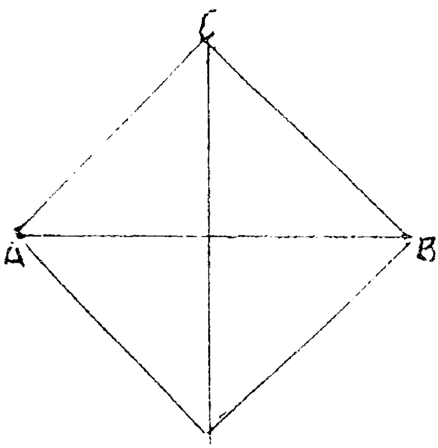
Szerkesztések a tükrös háromszög tulajdonságai alapján

1. Szerkesszünk olyan egyenlő szárú háromszöget (tükrös háromszöget), amelynek az alapja 3 cm!



Hány ilyen háromszöget tudunk szerkeszteni?
Mondjunk igaz állításokat ezekre a háromszögekre! Emeljük ki az igaz állítások közül a következőket:
– A tükörtengely felezi az egyenlő szárú háromszög alapját.
– A tükörtengely felezi az alappal szemközti szöget

2. Felezzük meg egy adott AB szakaszt!



Elemezzük az I. feladatot, az segít a megoldásban! Egyenlő szárú háromszögeket kell az AB szakaszra rajzolni. Elég kettőt megrajzolni. Ezek csúcsait összekötő egyenes lesz a tükörtengely, amely felezi az alapot.
Úgy rajzoljuk meg a két egyenlő szárú háromszöget, hogy csúcsai távolabb legyenek egymástól! Így pontosabban meg tudjuk rajzolni az egyenest.

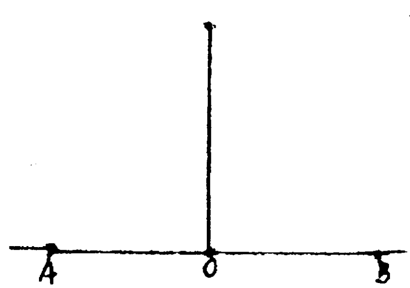
Az AB szakaszhoz megrajzolt tükörtengelyt *szakaszfelező merőlegesnek* neveztük.

3. Felezzünk meg egy szöget! Az előző ábráról olvassuk le a szerkesztést!

4. Szerkesszünk 60°-os szöget!
Keressünk a tükrös háromszögek között olyat, amelynek 60°-os szöge van! Ezt egyenlő oldalú háromszögnek neveztük. Az egyenlő oldalú háromszögnek csak egyik szögét kell megszerkeszteni.

5. Milyen szögeket tudunk szerkeszteni szögmérő felhasználása nélkül?
Ha 60°-ost tudunk szerkeszteni, akkor 300°-ost is tudunk, ugyanis a 60°-os szöghöz tartozó másik szögtartomány 300°-os, a 60°-os szögből 120°-os is szerkeszthető.
A 60°-os szög felezésével 30°-os, majd ennek a felezésével 15°-os szöget kapunk.

6. Szerkesszünk 90°-os szöget!
Egy egyenesen kijelöljük a 180°-os szög O csúcsát. A szögszárakon lévő A, B pontokból, $OA = OB$, az AB alaphoz tetszőleges körzőnyílással egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk. A O

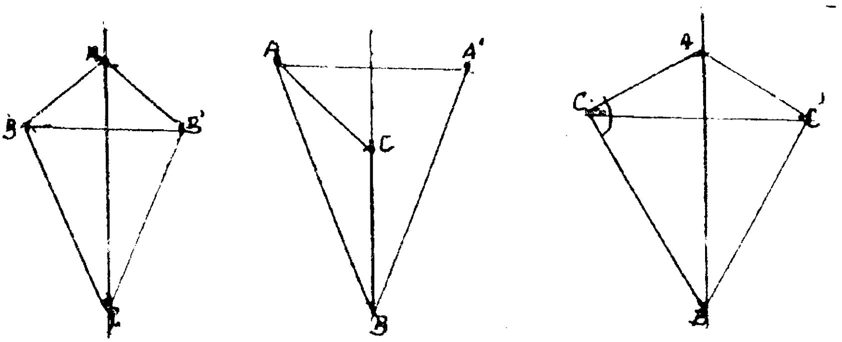


csúcsot összekötjük a metszésponttal. Ezzel a 180°-os szöget megfeleztük.

7. Szerkesszünk 45°-os szöget!
   a) Felezzük a 90°-os szöget.
   b) A 90°-os szöghöz egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk.

Tükrös négyszögek

Rajzoljunk fel nem egyenlő szárú hegyesszögű, tompaszögű és derékszögű háromszögeket! Tükrözzük ezeket egyik oldalukra, a derékszögűt az átfogóra. Négyszögeket kapunk.



A tükörtengely a négyszögnek átlója lesz.

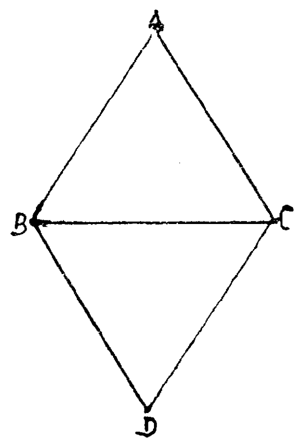
Az olyan négyszöget, amelynek egyik átlója tükörtengely, deltoidnak nevezzük.

A tükrözés alapján határozzuk meg a deltoid tulajdonságait!

- Két-két szomszédos oldala egyenlő.
- Két szöge egyenlő.
- A szimmetria átló felezi a két szöget.
- A szimmetria átló merőlegesen felezi a másik átlót.

Vizsgáljuk ezután azokat a deltoidokat, amelyeket egyenlő szárú háromszögekből kapunk, az alapra történő tükrözéssel! Olyan deltoidot kapunk, amelynek mindkét átlója tükörtengely.
Ezt a deltoidot *rombusznak* nevezzük.

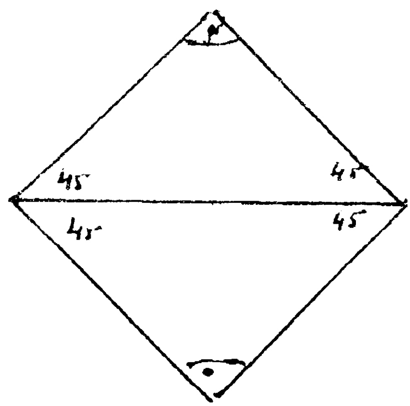
Figyeljük meg! A BC alaphoz a BA szár és a CD szár ugyanolyan szög alatt hajlik, tehát párhuzamosak.
Ellenőrizzük!
Ugyanazért párhuzamos a CA és BD is.



A rombusz olyan deltoid, amelynek mindkét átlója tükörtengely.
A tükrös háromszög tükrözéséből következtetünk a rombusz tulajdonságaira.
- Oldalai egyenlők.
- Szemközti oldalai párhuzamosak.
- Szemközti szögei egyenlők.
- Átlói felezik a szögeket.

– Átlói merőlegesen felezik egymást.

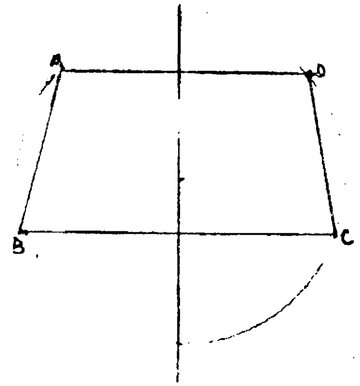
Tükrözzünk egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget az átfogójára!
A kapott négyszög átlói itt is szimmetriatengelyek.
A négyszög tehát rombusz.



Vizsgáljuk a szögeit. Ezek derékszögek. *A derékszögű rombusz neve négyzet.* Ellenőrizd az átlók hosszát. Ezek egyenlők. További tulajdonságai megegyeznek a rombusz tulajdonságaival.
Ezután a tükrös négyszögek tulajdonságai alapján szerkesztéseket végezhetünk.

A húrtrapéz

Rajzoljunk egy kört és rajzoljunk bele két húrt, amelyek párhuzamosak. Kössük össze a két húr felezési pontját.



„A kör tükrös alakzat"-nál tanultak alapján mondjunk igaz állításokat a párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenesről.

– A párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenes átmegy a kör középpontján.

– A párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenes az átmérő egyenese.

– A párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenesre a kör tükrös.

Próbáljuk bizonyítani, hogy a párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenes átmegy a kör középpontján!

Kössük össze a húrok végpontjait! A kapott négyszög két oldala párhuzamos, tehát trapéz. Oldalai egy kör húrjai, így a trapéz neve: *húrtrapéz.* Az eddig megismert tükrös négyszögeknél a tükörtengely a négyszög csúcsain ment át. A húrtrapéznál van olyan tükörtengely, amely nem a csúcsokon meg át.

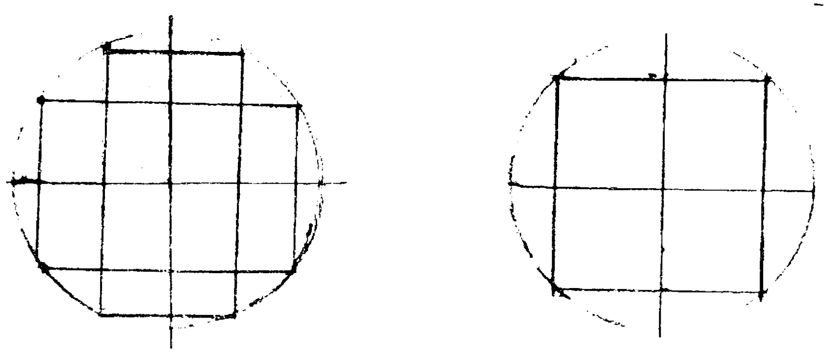
Húrtrapéz: olyan trapéz, amelynek van nem a csúcsponton átmenő tükörtengelye.

A kör tükrös tulajdonságának segítségével állítsuk össze a húrtrapéz tulajdonságait!

1. Oldalai egy kör húrjai.
2. Szárai egyenlőek.

3. A közös alapon lévő szögek egyenlők.
4. Átlói egyenlők és a tengelyen metszik egymást.

Kísérletezzünk! Rajzoljunk olyan húrtrapézt, amelynél az alapok egyenlő távolságra vannak a körközépponttól! Hány ilyent tudunk egy körben rajzolni? Mivel több ezeknek a tulajdonsága az előző tulajdonságoknál?



A párhuzamos alapok egyenlők. Figyeljük meg a szárakat is! Ellenőrizzük a tapasztalatokat!

Ennél a húrtrapéznál a szemközti oldalak egyenlők és párhuzamosak. Mivel *AB* és *CD* szárak párhuzamos húrok, ezek felezési pontjait összekötő egyenes átmegy a középponton, tehát tükörtengely. Ezek a szárak is lehetnek alapok, így az ezen lévő szögek is egyenlők. Ennek a húrtrapéznak minden szöge egyenlő, egy szöge 90°-os. A húrtrapéz *téglalap.*

A téglalapnak két olyan tükörtengelye van, amely nem megy át a csúcsokon, és felezi az oldalakat.

A téglalapok között lehet olyan, amelynek mind a négy oldala egyenlő.

Az ilyen téglalapot *négyzetnek* nevezzük.

A négyzetnek két csúcsponton átmenő és két nem csúcsponton átmenő, tehát négy tengelye van.
Ezek után szerkesztések végezhetők a húrtrapéz tulajdonságai alapján.