RÓKA SÁNDOR

RAY-CHAUDHURI–WILSON TÍPUSÚ EGYENLŐT-LENSÉG HÁRMAS METSZETEK ESETÉN

ABSTRACT: (On an inequality of type Ray-Chaudhuri–Wilson in the case of triple intersections) Let L be a set of a nonnegative integers and F a family of subsets of an n-element set X. Suppose that for any two distinct members $A,B \in F$ we have $|A \cap B| \in L$. Assuming in addition that F is uniform, i. e. each member of F has the same cardinality, a celebrated theorem of D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson [3] asserts that $|F| \le \binom{n}{s}$.

We prove a statement similar to the theorem. Let F be a family of subsets of set X having n elements. If for each $A,B,C \in F$ $A \ne B \ne C$ $|A \cap B \cap C| < t$, then $|F| \le \frac{2}{\binom{s}{t}}\binom{n}{t}$. We give the construction of a set system for $t = 2$, close at the bound given in the theorem.

Ray-Chaudhuri–Wilson egyenlőtlenség [3] Az n-elemű X halmaz k-elemű részeinek egy családja F, és

$L=(r_1,r_2,\dots,r_s)$, ahol az r_i számok nemnegatív egészek. Ha $\forall A,B\in F$, $A\neq B$ esetén $|A\cap B|\in L$, akkor $|F|\leq\binom{n}{s}$.

Ennek egy változata a következő tétel [5]:

Ha az n-elemű X halmaz $A_1,A_2,\dots,A_m$ részhalmazai Sperner-rendszert alkotnak, és $|A_i\cap A_j|<s$, $1\leq i<j\leq m$ esetén, akkor $m\leq\binom{n}{s}$.

Mindkét állításból következik, hogy ha egy n-elemű X halmaznak $A_1,A_2,\dots,A_m$ olyan k-elemű részhalmazai, hogy $|A_i\cap A_j|<s$, $1\leq i<j\leq m$, akkor $m\leq\binom{n}{s}$.

A dolgozatban ez utóbbi állításnak egy módosítását vizsgáljuk.

TÉTEL: Ha egy n-elemű X halmaznak $A_1,A_2,\dots,A_m$ olyan 3-elemű részei, hogy $|A_i\cap A_j\cap A_k|\leq 1$, $1\leq i<j<k\leq m$, akkor $m\leq\frac{1}{3}n(n-1)$, s nagyságrendjében ez a becslés pontos.

Bizonyítás: Tekintsük az X halmaz 2-elemű részhalmazait. Egy ilyen halmaz a metszetfeltétel miatt legfeljebb két A_i-nek része. Mivel egy 3-elemű halmaznak három 2-elemű része van, így A_i-k 2-elemű részeit leszámolva az X halmaz 2-elemű részeinek mindegyikét legfeljebb kétszer kapjuk meg, tehát $3m\leq 2\binom{n}{2}$.

Lássuk be, hogy ha $m=c*n^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, akkor az $A_1,A_2,\dots,A_m$ halmazok még továbbiakkal bővíthetők. Egy A_i halmaznak a 3-elemű részhalmazok közül legfeljebb $3(n-3)$ db másikkal vett metszete 2-elemű, tehát ezekből legfeljebb az egyik szerepelhet az $A_1, A_2, \dots, A_m$ rendszerben. Valamint az kell még megfigyelni, hogy minden más 3-elemű halmaz A_i-hez képes „jó", azaz egy „jó" A_i^* halmazra $|A_i \cap A_i^* \cap A_k| \leq 1$ teljesül. Így, ha $m + m * 3(n-3) < \binom{n}{3}$, akkor van olyan 3-elemű halmaz, amely az $A_1, A_2, \dots, A_m$ halmazok mindegyikéhez „jó", s így ezzel bővíthetjük a rendszert. Ez az egyenlőtlenség a fenti m érték esetén elegendően nagy n-re már teljesül.

Tehát valóban, nagyságrendjében pontos az $m \leq \frac{1}{3}n(n-1)$ becslés. A következőkben konstruálunk a tétel feltételeit kielégítő halmazrendszert. Az első konstrukcióban m értéke nagyságrendjében $n^{3/2}$, míg a második konstrukció közel van a megadott felsőkorláthoz, ott $m = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$.

Erdős Páltól származik a következő probléma [1]: Adott n pont a síkon (melyek között nincs három kollineáris), és minden ponthármas köré kört írunk. Mennyi a maximális száma az egységsugarú köröknek? Jelölje ezt a maximumot $f(n)$. Erdős igazolta, hogy $\frac{3*n}{2} < f(n) \leq n(n-1)$. Elekes György [2] egy szellemes konstrukcióval megmutatta, hogy $f(n) \geq c * n^{3/2}$ és megjegyzi, hogy valószínűleg nagyságrendjében ilyen a pontos korlát. Az n-pontból álló halmazt jelölje X, s azon ponthármasokat, melyek köré írt körök sugara 1 egység: $A_1, A_2, \dots, A_m$. Ezek — mint könnyen látható — kielégítik a tétel feltételeit. Ezért mondhatjuk, hogy $f(n) \leq \frac{n(n-1)}{3}$. Sajnos a tétel és Erdős problémája közti kapcsolatból nem vonható le olyan következtetés, mely az egységkörök számára várt $c*n^{3/2}$ felső becslést kétségbe vonná. Elekes konstrukciója lehetőséget nyújt a tételben megszabott feltételeket kielégítő halmazrendszer megadására.

1. konstrukció: Tekintsük az l-elemű $H=(a_1,a_2,\dots,a_l)$ halmaz 2-elemű részeit. Ezekből, mint elemekből álljon az X halmaz, melynek $A_1,A_2,\dots,A_m$ részhalmazai $\{(a_r,a_s),(a_s,a_t),(a_t,a_r)\}$ alakúak. Ezekre teljesül a tételben kiszabott metszetfeltétel. $|X|=\binom{l}{2}=n$, $m=\binom{l}{3}$, tehát $m\le c*n^{3/2}$.

Az 1988-as Kürschák verseny [4] 2. feladata az általunk vizsgált halmazrendszerhez hasonlóval foglalkozik, az ott megadott konstrukció az alábbi.

2. konstrukció: Legyen $X=(1,2,3,\dots,n)$, az $A_1,A_2,\dots,A_m$ halmazok az $(a,b,a+b)$ alakú hármasok, ahol $1\le a<b$ és $a+b\le n$.

A tételhez hasonlóan bizonyítható: Ha egy n-elemű halmaznak $A_1,A_2,\dots,A_m$ olyan s-elemű részei, hogy $|A_i\cap A_j\cap A_k|<t$, akkor $m\le\frac{2}{\binom{s}{t}}*\binom{n}{t}$, s nagyságrendjében ez a becslés pontos.

További vizsgálatok tárgya lehetne ilyen tulajdonságú halmazrendszer megadása, s a bevezetőben említett Ray-Chaudhuri–Wilson egyenlőtlenséggel analóg, hármas metszetekre vonatkozó állítás bizonyítása.

IRODALOM

[1] P. Erdős, *Some applications of graph theory and combinatorial methods to number theory and geometry,* Algebraic Methods in Graph Theory, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 25(1981), 137—148.

[2] G. Elekes, *n points in the plane can determine $n^{3/2}$ unit circles,* Combinatorica, 4(1984), 131.

[3] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *On t-designs,* Osaka J. Math., 12(1975), 737—744.

[4] Surányi János: *Az 1988. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása.* Középiskolai Matematikai Lapok, 1989. február, 50—60.

[5] Róka Sándor: *Ray-Chaudhuri–Vilson típusú egyenlőtlenségek.* A Bessenyei György Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei 12/D, 1990. 21—24.