ZAY BÉLA

A FIBONACCI SZÓSOROZATOK EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSA*

Abstract: (A generalization of the Fibonacci word-sequences). In [3] J. C. Turner introduced the Fibonacci word-sequences and used for the investigation of binary sequences. Such a sequence is, e.g. The word-sequence F(0,10)= 0; 10; 010; 10010; 01010010; ... where the n^{th} word $(m>2)$ is constructed by writing the $(n-1)^{\text{th}}$ word after the $(n-2)^{\text{th}}$ one and the initial words are 0 and 10. In this squence the position of the n^{th} one determine the n^{th} Wythoff pair which was investigated by J. G. Turner [4]. Also a Fibonacci word-sequence is the so colled "papal sequence" which was investigated by P. M. Higgins [1] who has given several algoritms for the construction of this sequence. In this paper we investigate the generalization of these word-sequences.

---

* A dolgozat az OTKA 1641 sz. pályázat támogatásával készült.

J. C. Turner [3]-ban bináris sorozatokkal és úgynevezett Fibonacci szósorozatokkal foglalkozott. Fibonacci szósorozatnak nevezte és $F(w_1,w_2)$-vel jelölte azt a szósorozatot, melynek első két eleme w_1,w_2, az $n(n>2)$-edik elemét pedig az $n-2$-edik és $n-1$-edik elemének egymás mellé írásával képezzük. Ilyen sorozat a P. M. Higgins [1] által vizsgált

F(J,P=J) P JP PJP JPPJP...

"pápa sorozat" is, vagy a [3]-ban is megemlített

F(0,10)=0 10 010 10010 01010010..

sorozat, melyben a 0-ák sorszáma rendre

1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, ...,

s ez azonos az $\{a_n\}=\{[n\alpha]\}_{n=1}^{\infty}$ sorozattal $\left(\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)$, az 1-ek sorszáma pedig rendre

2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, ...,

ami azonos a $\{b_n\}=\left\{\left[n\alpha^2\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozattal. Az (a_n,b_n) rendezett elempár (lásd például [21]-ben) éppen az n-edik Wythoff párral azonos, aminek további előállításairól olvashatunk [4]-ben.

A következőkben a Fibonacci szósorozatok egy általánosításával foglalkozunk.

Legyenek s és k rögzített pozitív egészek, $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_s\}$ az $x_1,x_2,\ldots,x_s$ betűk halmaza! Jelöljük $W(X)$-el az X-beli betűkből, ezek egymás mellé írásával képezett, összes szó halmazát, és $\overline{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_k)$-sal a $W(X)$ k-szoros Descartes szorzatának, $W^k(X)$-nek egy tetszőleges elemét!

Legyen $f_i(\overline{w})$ a $W^k(x)$-et $W(X)$-be képező leképezés és minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re

(1) $\quad f_i(\overline{w}) = f_i(w_1, w_2, \ldots, w_k) = w_{j_{1,i}}, w_{j_{2,i}}, \ldots, w_{j_{p_i,i}}$

ahol minden $i (1 \le i \le k)$-re p_i rögzített pozitív egész, és $1 \le j_{m,i} \le k$ minden $m (1 \le m \le p_i)$ és minden $i (1 \le i \le k)$ egész számra! Tehát $f_i(\overline{w})$ valamely k dimenziós $\overline{w}$ vektor esetén a $j_{1,i}$-edik, $j_{2,i}$-edik ..., $j_{p_i,i}$-edik koordináták egymás mellé írásával előállított szó.

Legyenek továbbá minden $i (1 \le i \le k)$-re n pozitív egészre a $P_{n,i}(\overline{w})$ és $P_n(\overline{w})$ olyan $W^k(x)$-et $W(X)$-be képező leképezések, melyeket

(2) $$P_{n,i}(\overline{w}) = \begin{cases} w_1 & \text{ha } n = 1 \\ f_i(P_{n-1,1}(\overline{w}), (P_{n-1,2}(\overline{w}), \ldots, (P_{n-1,k}(\overline{w})), & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

és

(3) $\quad P_n(\overline{w}) = P_{n,1}(\overline{w}) P_{n,2}(\overline{w}) \ldots P_{n,k}(\overline{w})$

definiálva, minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re!

A következőket fogjuk bizonyítani:

1. Tétel: Minden t, n pozitív egészre és $i (1 \le i \le k)$-re

(4) $\quad P_{n-1+t,i}(\overline{w}) = P_{n,i}\left(P_{t,i}(\overline{w}), P_{t,2}(\overline{w}), \ldots, P_{t,k}(\overline{w})\right)$

és

(5) $\quad P_{n-1+t}(\overline{w}) = P_n\left(P_{t,1}(\overline{w}), P_{t,2}(\overline{w}), \ldots, P_{t,k}(\overline{w})\right).$

2. Tétel: Ha $h(\overline{w})$ a $W^k(x)$-nek a $W(X)$-be való olyan leképezése, amit minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re a

(6) $\quad h(\overline{w}) = h(w_1, w_2, \ldots, w_k) = w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, i_r \le k)$

képlet definiál, ahol $r, i_1, i_2, \dots, i_r$ rögzített egész számok, és $H = \{H_n(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$ olyan, a $W^k(x)$ halmazt $W(X)$-be képező leképzések sorozata, amelyet

$$(7) \quad H_n(\overline{w}) = \begin{cases} h(\overline{w}) & \text{ha } n = 1 \\ H_{n-1}(f_1(\overline{w}), f_2(\overline{w}), \dots, f_k(\overline{w})), & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

definiál, akkor minden n pozitív egészre

$$H_n(\overline{w}) = h(P_{n,1}(\overline{w}), P_{n,2}(\overline{w}), \dots, P_{n,k}(\overline{w})) =$$
$$= P_{n,i_1}(\overline{w}\ ), P_{n,i_2}(\overline{w}\ ), \dots, P_{n,i_r}(\overline{w}\ ) P_{n,i_1}(\overline{w}), P_{n,i_2}(\overline{w}), \dots, P_{n,i_r}(\overline{w}).$$

Megjegyezzük, hogy a H definíciója szerint a $\overline{w} = (w_1, w_2, \dots w_k)$ vektor $H_n(\overline{w})$ képe az a szó, amely a $H_{n-1}(\overline{w})$ szóból úgy állítható elő, hogy w_1 helyett mindenhová $f_1(\overline{w})$-t, w_2 helyett $f_2(\overline{w})$, ..., w_k helyett pedig mindenhová $f_k(\overline{w})$-t írunk.

A H sorozat a $\{P_{n,i}(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{P_n(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok közös általánosítása, hiszen (2)-ből és (7)-ből következően, ha $h(\overline{w}) = w_i$ minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re, akkor $H = \{P_{n,i}(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$, ha pedig $h(\overline{w}) = w_1, w_2, \dots, w_k$, minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re, akkor (3)-ból és (7)-ből adódik, hogy $H = \{P_{n,i}(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$.

Bizonyos speciális esetekben vizsgálni fogjuk a rögzített $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2, \dots, w_k = v_k$, szavak (azaz $\overline{w} = \overline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$) és (7) által meghatározott H szósorozatban a különböző betűk és szavak eloszlását, ezért bevezetjük a következő jelöléseket: Ha v^I a $v_1, v_2, \dots, v_k$ szavakból konkatenációval (egymás mellé írással) készített szó, akkor minden $i (1 \le i \le k)$-re $L_i(v^I)$ jelentse azt, hogy v_i hányszor fordul elő

v^I-ben, $D_m(v^I)$ pedig azt, hogy x_m betű hányszor fordul elő v^I-ben $(1 \le m \le s)$! A v^I "szóhosszát" $\left(a \sum_{i=1}^{k} L_i(v^I) \text{ összeget}\right)$ jelölje $L(v^I)$, a v^I "betűhosszát" $\left(a \sum_{i=1}^{o} L_i(v^I) \text{ összeget}\right)$ pedig $D(v^I)$!

A bevezetett fogalmakra a következő érvényes:

3. Tétel: Az $L_j(H) = \{L_j(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty}$, $D_m(H) = \{D_m(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty}, L(H) = \{L(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty}$ és közös $F_k(x)$ karakterisztikus polinommal rendelkező lineáris rekurzív sorozatok, ahol

(8) $F_k(x) = \det(c_{i,j})$, $c_{i,j} = \begin{cases} -L_i(f_j(\overline{v})), & ha 1 \le 1 \ne j \le k \\ x - L_i(f_j(\overline{v})), & ha 1 \le 1 = j \le k \end{cases}$

A továbbiakban az $f_i(\overline{w})$, $1 \le s \le k$, leképezéseket speciálisan a

(9) $f_i(\overline{w}) = \begin{cases} w_k, & ha \quad i = 1 \\ w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_k, & ha \quad 2 \le i \le k \end{cases}$

képlettel definiáljuk.

Legyen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tetszőleges szósorozat és $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, $B_1^I, B_2^I, \ldots, B_n^I$ ... olyan leképzések, melyekre

$$B_1(w_1) = w_1 \quad , \quad B_1^I = \emptyset \quad (\text{"üres" szó})$$

és $i \le 1$ esetén, ha

$$B_i(w_1, w_2, \ldots, w_i) = w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_{2^{i-1}-1}} w_1$$

és

$$B_i^I(w_2,w_3,\dots,w_i)=w_{j_1}w_{j_2}\dots w_{j_{2^{i-1}-1}}$$

akkor legyen

(10) $B_{i+1}(w_1,w_2,\dots,w_{i+1})=B_i^I(w_2,w_3,\dots,w_i)B_i(w_2,w_3,\dots,w_{i+1})w_1!$

A definícióból az $i=2$ és $i=3$ esetben például

$$B_2(w_1,w_2)=B_1^I B_1(w_2)w_1=w_2w_1$$

és

$$B_3(w_1,w_2,w_3)=B_1^I(w_2)B_2(w_2,w_3)w_1=w_2w_3w_2w_1$$

adódik.

A $P_{n,1}$ és B_i leképzések között a következő összefüggések állnak fenn:

4. Tétel: Minden $i(1\le i\le k)$-re, $n(n\ge i+1)$-re és tetszőleges $\bar{v}\in W^k(X)$-re, teljesül a

(11) $P_{n,1}(\bar{v})=B_i\left(P_{n-1,k}(\bar{v}),P_{n-2,k}(\bar{v}),\dots,P_{n-i,k}(\bar{v})\right)$

egyenlőség.

5. Tétel: A $P_{n,i}(\bar{v})=B_i\left(P_{n-1,k}(\bar{v}),P_{n-2,k}(\bar{v}),\dots,P_{n-i,k}(\bar{v})\right)$ szóban, tetszőleges $\bar{v}\in W^k(X)$ esetén, $j(1\le j\le i)$-re a $P_{n-j,k}(\bar{v})$ szó pontosan $\binom{i-1}{j-1}$-szer fordul elő.

Megjegyezzük, hogy (2)-ből és (9)-ből következik, hogy minden n pozitív egészre

$P_n(\bar{v})=P_{n,1}(\bar{v})P_{n,2}(\bar{v})\dots P_{n,k}(\bar{v})=f_k\left(P_{n,1}(\bar{v}),\dots,P_{n,k}(\bar{v})\right)=P_{n+1,k}(\bar{v})$,

így a (11)-ből adódóan

$$P_n(\bar{v})=B_k\left(P_{n-1}(\bar{v}),P_{n-2}(\bar{v}),\dots,P_{n-k}(\bar{v})\right)$$

is teljesül minden $n\ge k+1$-re. Továbbá a $k=2$ speciális esetben a (11)-ből a $B_1(w_1)=w_1$ és egyenlőségek felhasználásával a

$$P_{n,2}(\overline{v}) = B_2\left(P_{n-1,2}(\overline{v}), P_{n-2,2}(\overline{v})\right) = P_{n-2,2}(\overline{v})P_{n-1,2}(\overline{v})$$
$$P_{n,1}(\overline{v}) = B_1\left(P_{n-1,2}(\overline{v})\right) = P_{n-1,2}(\overline{v})$$
összefüggések következnek, ami azt jelenti, hogy a $\{P_{n,2}(\overline{v})\}_{n=1}^{\infty}$, $\{P_{n,1}(\overline{v})\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{P_n(\overline{v})\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok Fibonacci szósorozatok, és

$$\{P_{n,1}(v_1,v_2)\}_{n=1}^{\infty} = F\left(P_{1,1}(v_1,v_2), P_{2,1}(v_1,v_2)\right) = F(v_1,v_2)$$
$$\{P_{n,2}(v_1,v_2)\}_{n=1}^{\infty} = F\left(P_{1,2}(v_1,v_2), P_{2,2}(v_1,v_2)\right) = F(v_2,v_1v_2)$$
$$\{P_n(v_1,v_2)\}_{n=1}^{\infty} = \{P_{n+1,2}(v_1,v_2)\}_{n=1}^{\infty} = \tag{12}$$
$$= F\left(P_{2,2}(v_1,v_2)P_{3,2}(v_1,v_2)\right) = F(v_1v_2, v_2v_1v_2).$$

1. Tétel bizonyítása: $n=1$-re (2)-ből következik (4).

Tegyük fel, hogy $n=m-1$-re, ahol $m>1$, teljesül (4)! Ekkor a (2)-őt felhasználva

$$P_{m,i}\left(P_{t,1}(\overline{w}),\ldots,P_{t,k}(\overline{w})\right) =$$
$$= f_i\left(P_{m-1,1}\left(P_{t,1}(\overline{w}),\ldots,P_{t,k}(\overline{w})\right),\ldots,P_{m-1,k}\left(P_{t,1}(\overline{w}),\ldots,P_{t,k}(\overline{w})\right)\right) =$$
$$= f_i\left(P_{m-2+t,1}(\overline{w}),\ldots,P_{m-2+t,k}(\overline{w})\right) = P_{m-1+t,i}(\overline{w})$$

adódik minden $i(1 \le i \le k)$ és $t \ge 1$-re. Ezzel (4)-et igazoltuk, amiből (3) alapján (5) is következik.

A 2. Tétel bizonyítása: $n=1$-re (2)-ből, (6)-ból és (7)-ből következik az állítás. Tegyük fel, hogy $n=m$ pozitív egészre és minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re

$$H_m(\overline{w}) = P_{m,i_1}(\overline{w})\ldots P_{m,i_r}(\overline{w})$$

teljesül! Ezt az egyenlőséget és a (7)-et felhasználva

$$H_{m+1}(\overline{w}) = H_m\left(f_1(\overline{w}), f_2(\overline{w}),\ldots,f_k(\overline{w})\right) =$$

$$= P_{m,i_1}\left(f_1(\overline{w}),\ldots,f_k(\overline{w})\right)\ldots P_{m,i_t}\left(f_1(\overline{w}),\ldots,f_k(\overline{w})\right)$$

adódik, amiből előbb az

$$f_i(\overline{w}) = P_{2,i}(\overline{w}) \quad , \quad (1 \le i \le k)$$

egyenlőtlenségeket, majd $n = m$, $t = 2$-re (4)-et alkalmazva

$$H_{m+1}(\overline{w}) = P_{m,i_1}\left(P_{2,1}(\overline{w}),\ldots,P_{2,k}(\overline{w})\right)\ldots P_{m,i_t}\left(P_{2,1}(\overline{w}),\ldots,P_{2,k}(\overline{w})\right) =$$
$$= P_{m+1,i_1}(\overline{w})P_{m+1,i_2}(\overline{w})\ldots P_{m+1,i_t}(\overline{w}) =$$
$$= h\left(P_{m+1,1}(\overline{w}),P_{m+1,2}(\overline{w}),\ldots,P_{m+1,k}(\overline{w}).\right)$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

A 3. Tétel bizonyítása: A H, $L_j(H)$, $D_m(H)$, $L(H)$ és $D(H)$ sorozatok definícióiból közvetlenül adódik, hogy

(13)

$$L_j(H_n(\overline{v}\ )) = \begin{cases} L_j(h(\overline{v})), & \text{ha} \quad n = 1, 1 \le j \le k \\ \sum_{i=1}^{k} L_j(f_i(\overline{v}))\cdot L_i(H_{n-1}(\overline{v}), & \text{ha} \quad n > 1, 1 \le j \le k \end{cases}$$

(14) $$D_m(H_n(\overline{v})) = \sum_{j=1}^{k} D_m(\overline{v}_j)\cdot L_j(H_n(\overline{v})), \text{ ha } n \ge 1, \ 1 \le m \le s$$

(15) $$L(H_n(\overline{v})) = \sum_{j=1}^{k} L_j(H_n(\overline{v})), \qquad \text{ha } n \ge 1,$$

(16) $$D(H_n(\overline{v})) = \sum_{m=1}^{k} D_m(H_n(\overline{v})), \qquad \text{ha } n \ge 1.$$

Ha alkalmazzuk az [5]-ben igazolt tételt a (13) lineáris rekurzív rendszerre, akkor azt kapjuk, hogy $L_j(H)$ rekurzív sorozat minden $j(1 \le j \le k)$-re, és karakterisztikus polinomja a (8)-ban definiált $F_k(x)$. Az $F_k(x)$ közös karakterisztikus polinommal rendelkező lineáris rekurzív sorozatok összege, illetve egész számszorosa is tekinthető $F_k(x)$ karakterisztikus polinommal rendelkező lineáris rekurzív sorozatnak, ezért

(14)-ből, (15)-ből és (16)-ból a $D_m(H)$, $L(H)$ és $D(H)$ sorozatokra is következik az állítás.

A 4. Tétel bizonyítása: A (2), (9) és B_1 definíciója alapján minden $n \geq 2$-re

$$P_{n,1}(\bar{v}) = f_1\left(P_{n-1,1}(\bar{v}), P_{n-1,2}(\bar{v}), \ldots, P_{n-1,k}(\bar{v})\right) =$$
$$= P_{n-1,k}(\bar{v}) = B_1\left(P_{n-1,k}(\bar{v})\right),$$

tehát $i = 1$-re igazoltuk az állítást.

Ha valamely $i(1 \leq i \leq k)$-re és minden $n \geq i+2$ teljesül a (11), akkor

$$P_{n-1,i}(\bar{v}) = B_i\left(P_{n-2,k}(\bar{v}), P_{n-3,k}(\bar{v}), \ldots, P_{n-i-1,k}(\bar{v})\right)$$

és
$$B_i\left(P_{n-1,k}(\bar{v}), P_{n-2,k}(\bar{v}), \ldots, P_{n-i,k}(\bar{v})\right) = P_{n,i}(\bar{v}) =$$
$$= f_i\left(P_{n-1,1}(\bar{v}), P_{n-1,2}(\bar{v}), \ldots, P_{n-1,k}(\bar{v})\right) =$$
$$= P_{n-1,1}(\bar{v}) \ldots P_{n-1,i-1}(\bar{v}) P_{n-1,k}(\bar{v}) =$$
$$= B_i^I\left(P_{n-2,k}(\bar{v}), P_{n-3,k}(\bar{v}), \ldots, P_{n-i,k}(\bar{v})\right) P_{n-1,k}(\bar{v}),$$

így a (10)-et is felhasználva a (9) alapján

$$P_{n,i+1}(\bar{v}) = f_{i+1}\left(P_{n-1,1}(\bar{v}), P_{n-1,2}(\bar{v}), \ldots, P_{n-1,k}(\bar{v})\right) =$$
$$= P_{n-1,1}(\bar{v}) \ldots P_{n-1,i-1}(\bar{v}) P_{n-1,i}(\bar{v}) P_{n-1,k}(\bar{v}) =$$
$$= B_i^I\left(P_{n-2,k}(\bar{v}), \ldots, P_{n-i,k}(\bar{v})\right) B_i\left(P_{n-2,k}(\bar{v}), \ldots, P_{n-i-1,k}(\bar{v})\right) P_{n-1,k}(\bar{v}) =$$
$$= B_{i+1}\left(P_{n-1,k}(\bar{v}), P_{n-2,k}(\bar{v}), \ldots, P_{n-i-1,k}(\bar{v})\right),$$

és ezzel a tételt igazoltuk.

Az 5. Tétel bizonyítása: $i = 1$-re $B_1(w_1) = w_1$-ből, $i = 2$-re $B_1(w_1, w_2) = w_2 w_1$-ből adódik az állítás.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy valamely $i(2 \leq i < k)$-re teljesül a tétel, s ezt felhasználva igazoljuk $i+1$-re is! A 4. Tételből adódó

$P_{n,i+1}(\overline{v}) =$

$= B_i^I\left(P_{n-2,k}(\overline{v}),\ldots,P_{n-i,k}(\overline{v})\right)B_i\left(P_{n-2,k}(\overline{v}),\ldots,P_{n-i-1,k}(\overline{v})\right)P_{n-1,k}(\overline{v})$

egyenlőségből így az indukciós feltétel miatt, minden $j(1<j<i+1)$-re következik, hogy a $P_{n,i+1}(\overline{v})$ előállításában a $P_{n-j,k}(\overline{v})$

$$\binom{i-1}{j-2}+\binom{i-1}{j-1}=\binom{(i+1)-1}{j-1}\text{-szer}$$

fordul elő. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $P_{n,i+1}(\overline{v})$

előállításában a legnagyobb indexű $\left(P_{n-i-1,k}(\overline{v})\right)$ szó pontosan egyszer fordul elő, így az

$$\binom{(i+1)-1}{1-1}=1=\binom{(i+1)-1}{(i+1)-1}$$

egyenlőséget is felhasználva, minden $j(1\le j\le i+1)$-re azt kaptuk, hogy a $\left(P_{n,i+1}(\overline{v})\right)$ előállításában a $\left(P_{n-j,k}(\overline{v})\right)$ pontosan $\binom{(i+1)-1}{1-1}$-szer fordul elő, s ezzel az állítást igazoltuk.

IRODALOM

[1] P. M. Higgins, The Naming of Popes and a Fibonacci Sequence in Two Noncommuting Indeterminates, The Fibonacci Quarterly 25.1 (1987), 57—61.

[2] V. E. Hoggatt and M. Bicknell-Hohnson, Additiv Partition of the Positive Integers and Generalized Fibonacci Representations, The Fibonacci Quarterly 22.1 (1984), 2—21.

[3] J. C. Turner, Fibonacci Word Patterns and Bianry Sequences, The Fibonacci Quarterly, 26.3 (1988), 233—246.
[4] J. C. Turner, The Alpha and the Omega of the Wythoff Pairs, The Fibonacci Quarterly, 27.1 (1989), 76—86.
[5] B. Zay, Solutions of Linear Recursive Systems, Publ. Math. Debrecen 40. (1992), 127—134.