ZAY BÉLA

EGY REKURZÍV SOROZATRÓL*

Abstract: (On a recursive sequence). Let k and t be fixed positive integers. Define a sequence $G_{k,t}(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, by

$$G_{k,t}(n)=\begin{cases} n & \text{if } n=0,1\ldots,t-1 \\ n-G_{k,t}^{(k)}(n-t) & \text{if } n\geq t \end{cases}$$

where

$$G_{k,t}^{(1)}(n-t)=G_{k,t}(n-t)$$

and

$$G_{k,t}^{(j)}(n-t)=G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(j-1)}(n-t)\right)$$

for $j>1$. In this paper we investigate the properties of the sequence $G_{k,t}$. Among others we show that the terms of our sequence can be determined by the terms of the sequence $G_{k,1}$ and prove a connection between the sequence $G_{k,t}$ and the Zeckendorf representation of natural numbers.

Legyenek k és t rögzített pozitív egészek, és definiáljunk egy $G_{k,t}(n)$, $n=0,1,2,\ldots$, sorozatot a következőképpen:

---

* Az OTKA 1641. sz. pályázat támogatásával készült.

(1) $G_{k,t}(n)=\begin{cases} n, & \text{ha } n=0,1,\dots,t-1, \\ n-G_{k,t}^{(k)}(n-t), & \text{ha } n\geq t, \end{cases}$

ahol $G_{k,t}^{(1)}(n-t)=G_{k,t}(n-t)$ és $G_{k,t}^{(j)}(n-t)=G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(j-1)}(n-t)\right)$, ha $j>1$.

A $k=2$, $t=1$ speciális esettel V. Granville és J. P. Rasson [2] foglalkoztak, és bebizonyították, hogy:

(2) $G_{2,1}(n)=\left[(n+1)\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ $\quad n=0,1,2,\dots,$

(Itt, és a továbbiakban is [ ] az "egészrész" függvényt jelenti.)

Az alábbiakban az általános $G_{k,t}$ sorozat tulajdonságait vizsgáljuk. Megmutatjuk a sorozat néhány tulajdonságát (1–4. Lemma), bebizonyítjuk, hogy az általános sorozat visszavezethető a $t=1$ speciális esetre (1. Tétel), továbbá a természetes számok úgynevezett Zeckendorf reprezentációjával kapcsolatban bizonyítunk egy tételt (2. Tétel).

1. Tétel:

$$G_{k,t}(n)=\begin{cases} t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right), & \text{ha } G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)=G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}+1\right]\right) \\ t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)+n-t\cdot\left[\frac{n}{t}\right], & \text{különben.} \end{cases}$$

A (2) és a tétel alapján, a $G_{2,t}$ sorozatra a következő adódik:

1. Következmény:

$$G_{2,t}(n)=\begin{cases} t\cdot\left[\left[\frac{n}{t}+1\right]\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right], & \text{ha } \left[\left[\frac{n}{t}+1\right]\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]=\left[\left[\frac{n}{t}+2\right]\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right], \\ t\cdot\left[\left[\frac{n}{t}+1\right]\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+n-t\left[\frac{n}{t}\right], & \text{különben.} \end{cases}$$

Az 1. Tételből adódik a következő eredmény is.

2. Következmény: Ha n_1, n_2, m pozitív egészek, n_1, n_2, $n_2 \geq m^2$, és $n_1 \equiv n_2 \pmod m$ akkor:

$$G_{k,t_1}(n_1) - G_{k,t_2}(n_2) = \frac{n_1 - n_2}{m} \cdot G_{k,1}(m)$$

ahol $t_i = \left[\frac{n_i}{m}\right]$, $i = 1,2$-re.

A (2) alapján megmutatjuk a $G_{2,1}$ sorozatnak és a Fibonacci számoknak egy kapcsolatát. Ismert, hogy minden n természetes szám egyértelműen állítható elő $n = \sum_{i=1}^{r} F(n_i)$ alakban, ahol $n_1 < n_2 < \ldots < n_r$ természetes számok $n_{i+1} - n_i \geq 2$ feltétellel, és $F(n)$ az $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, (ha $n > 1$) feltételekkel definiált Fibonacci sorozat (lásd például [1]). A következő tételt bizonyítjuk:

2. Tétel: Tetszőleges n pozitív egész esetén,

ha $n = \sum_{i=1}^{r} F(n_i)$, ahol $n_1, n_2 \ldots n_r$ pozitív egészek, $n_1 > 1$

és $n_{i+1} - n_i \geq 2$ minden $i = 1,2,\ldots,r-1$-re

akkor

$$G_{2,1}\left(\sum_{i=1}^{r} F(n_i + 1)\right) = n$$

Megjegyzések:

1. A (2)-höz hasonló egyenlőség $k > 2$ esetén általában nem igaz. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan s_k egész szám és α_k valós szám, hogy $G_{k,1}(n) = \left[(n + s_k) \cdot \alpha_k\right]$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{k,1}(n)}{n} = \alpha_k.$$

De ha létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G_{k,1}(n)}{n} = \alpha_k$, akkor a definícióból adódó

$$\frac{G_{k,1}(n)}{n} = 1 - \frac{G_{k,1}^{(k)}(n-1)}{G_{k,1}^{(k-1)}(n-1)} \cdot \frac{G_{k,1}^{(k-1)}(n-1)}{G_{k,1}^{(k-2)}(n-1)} \cdot \ldots$$

$$\frac{G_{k,1}^{(2)}(n-1)}{G_{k,1}(n-1)} \cdot \frac{G_{k,1}(n-1)}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

egyenlőségből következnek, hogy α_k az $x^k + x - 1 = 0$ egyenlet pozitív valós gyöke. Numerikus számolással azonban igazolható, hogy például $k = 3$ esetén nincs a feltételeknek eleget tevő s_3 konstans. Ugyanis ekkor $\alpha_3 \sim 0{,}682328$ és

$[(2+1)\cdot\alpha_3] = 2 > 1 = G_{3,1}(2)$-ből $s_3 < 1$ következne, viszont

$[(18+1)\cdot\alpha_3] = 12 < 13 = G_{3,1}(18)$-ból $s_3 > 1$ adódna.

2. Az előzőekben említett határérték viszont létezik.

[3]-ban Kiss Péterrel közösen bizonyítottuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{k,1}(n)}{n} = \alpha_k,$$

ahol α_k az $x^k + x - 1 = 0$ egyenlet pozitív valós gyöke.

3. Könnyen bizonyítható, hogy a $G_{k,1}(n)$ sorozatban legfeljebb két egyenlő szomszédos tag van, ilyen pár viszont végtelen sok.

Az 1. Tétel bizonyítását 4 segédtétel segítségével végezzük el, s először ezeket bizonyítjuk.

1. Lemma: $G_{k,t}(n)$ definiálva van minden n természetes számra.

Bizonyítás: Elegendő belátni, hogy $0 \leq G_{k,t}(n) \leq n$ minden n természetes számra. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n = 0, 1, \ldots, t-1$-re $G_{k,t}(n)$ definíciója miatt nyilvánvalóan igaz az állítás, de $n = t$ esetén is igaz, mert (1) alapján $G_{k,t}(t) = t$. Legyen $n > t$ és tegyük fel, hogy minden $0 \leq i \leq n$ feltételt kielégítő i -re.

(3) $0 \leq G_{k,t}(i) \leq i.$.

Ekkor $1 \leq n+1-t \leq n$ és így $i = n+1-t$-re (3)-ból

$$0 \leq G_{k,t}(n+1-t) \leq n+1-t$$

következik, de ekkor

$$G_{k,t}^{(2)}(n+1-t) = G_{k,t}\left(G_{k,t}(n+1-t)\right) \leq G_{k,t}(n+1-t)$$

és folytatva az eljárást, a

$$\begin{aligned} &0 \leq G_{k,t}^{k}(n+1-t) \leq G_{k,t}^{k-1}(n+1-t) \leq \\ &\ldots \leq G_{k,t}(n+1-t) \leq n+1-t \leq n \end{aligned} \tag{4}$$

egyenlőtlenség adódik. Így

$$1 \leq n+1-G_{k,t}^{(k)}(n+1-t) \leq n+1$$

azaz az (1) alapján

$$1 \leq G_{k,t}(n+1) \leq n+1,$$

amiből már következik az állítás.

2. Lemma: Legyenek n és t pozitív egész számok és $1 \leq t \leq n$.

Tegyük fel, hogy minden $1 \leq i < n$. feltételt kielégítő i -re

(5') $G_{k,t}(i+1) = G_{k,t}(i)$

vagy

(5") $G_{k,t}(i+1) = G_{k,t}(i)+1$.

Ekkor minden j pozitív egész számra

(6') $G_{k,t}^{(j)}(n+1-t) = G_{k,t}^{(j)}(n-t)$

vagy

(6") $G_{k,t}^{(j)}(n+1-t) = G_{k,t}^{(j)}(n-t)+1$

teljesül.

Bizonyítás: j-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

$j=1$-re a (6') az (5')-ből, a (6") az (5")-ből adódik $i=n-t$ helyettesítéssel.

Tegyük fel, hogy $j=r$-re (6') vagy (6")!

Ha $G_{k,t}^{(r)}(n+1-t) = G_{k,t}^{(r)}(n-t)$, akkor

$$G_{k,t}^{(r+1)}(n+1-t) = G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n+1-t)\right) =$$
$$= G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n-t)\right) = G_{k,t}^{(r+1)}(n-t).$$

Ha pedig $G_{k,t}^{(r)}(n+1-t) = G_{k,t}^{(r)}(n-t)+1$, akkor a

(7) $G_{k,t}^{(r+1)}(n+1-t) = G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n+1-t)\right) = G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n-t)+1\right)$

egyenlőség teljesül.

Az 1. Lemma bizonyításából

$0 \le G_{k,t}^{(r)}(n-t) \le n-t$ adódik,

ezért $i = G_{k,t}^{(r)}(n-t)$-re, az (5'), illetve (5") feltételekből

$$G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n-t)+1\right) = G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n-t)\right) = G_{k,t}^{(r+1)}(n-t)$$

vagy

$$G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n-t)+1\right) = G_{k,t}\left(G_{k,t}^{(r)}(n-t)\right)+1 = G_{k,t}^{(r+1)}(n-t)+1$$

adódik. Összevetve ezeket a (7) egyenlőséggel, azt kapjuk, hogy

$$G_{k,t}^{r+1}(n+1-t)=G_{k,t}^{r+1}(n-t)$$

vagy

$$G_{k,t}^{r+1}(n+1-t)=G_{k,t}^{r+1}(n-t)+1,$$

ami a teljes indukció gondolatmenete miatt bizonyítja az állítást.

3. Lemma: A $G_{k,t}(n)$ sorozat növekvő és szomszédos tagjainak a különbsége 0 vagy 1, azaz

(8') $\quad G_{k,t}(n+1)=G_{k,t}(n)$

vagy

(8") $\quad G_{k,t}(n+1)=G_{k,t}(n)+1$

minden $n\geq 0$ esetén.

Bizonyítás: Ismét teljes indukcióval bizonyítunk.
$n=0,1,\ldots,t-1$ esetén az (1) definíció szerint:

$$G_{k,t}(n)=n,$$

így $n=0,1,\ldots,t-2$re a (8") teljesül.
Szintén az (1) alapján $G_{k,t}(t)=t-G_{k,t}^{(k)}(0)=t$ és

$$G_{k,t}(t+1)=t+1-G_{k,t}^{(k)}(1)=t,$$

tehát $n=t-1$-re (8"), $n=t$-re pedig (8') áll fenn.

Legyen $n>t$ és tegyük fel, hogy minden i természetes számra, amelyre $0\leq i<n$, teljesül a 3. Lemma állítása, azaz

$$G_{k,t}(i+1)=G_{k,t}(i),$$

illetve

$$G_{k,t}(i+1)=G_{k,t}(i)+1$$

egyike fennáll. Így teljesülnek a 2. Lemma feltételei.

Alkalmazzuk $j=k$-ra a 2. Lemmát! Ha

$G_{k,t}^{(k)}(n+1-t)=G_{k,t}^{(k)}(n-t)$ teljesül, akkor (1) alapján

$$G_{k,t}(n+1)=n+1-G_{k,t}^{(k)}(n+1-t)=$$
$$n+1-G_{k,t}^{(k)}(n-t)=G_{k,t}(n)+1$$

adódik. Ha pedig

$$G_{k,t}^{(k)}(n+1-t)=G_{k,t}^{(k)}(n-t)+1,$$

akkor

$$G_{k,t}(n+1)=n+1-G_{k,t}^{(k)}(n+1-t)=$$
$$=n+1-G_{k,t}^{(k)}(n-t)=G_{k,t}(n)+1=$$
$$=n-G_{k,t}^{(k)}(n-t)=G_{k,t}(n).$$

4. Lemma: Minden $n\geq 0$ egész szám esetén

(9) $\quad G_{k,t}(n\cdot t)=t\cdot G_{k,1}(n).$

Bizonyítás: $n=0$-ra nyilván igaz, hiszen $G_{k,t}(0\cdot t)=0=t\cdot G_{k,1}(0)$

Tegyük fel, hogy minden $0\leq m\leq n$-re teljesük (9), azaz

(9') $\quad G_{k,t}(m\cdot t)=t\cdot G_{k,1}(m).$

Mint ahogyan az 1. Lemma bizonyításában is láttuk:

$$0\leq G_{k,1}^{(j)}(n)\leq n \qquad (j=1,2,\dots,k)$$

Így $m=G_{k,1}^{(j)}(n)$-re is teljesül a (9') egyenlőség, amit rendre $j=k-1,k-2,\dots m\,2,1$-re alkalmazva:

$$t\cdot G_{k,1}^{(k)}(n)=t\cdot G_{k,1}\left(G_{k,1}^{(k-1)}(n)\right)=G_{k,1}\left(t\cdot G_{k,1}^{(k-1)}(n)\right)=$$
$$=G_{k,t}\left(t\cdot\left(G_{k,1}^{(k-2)}(n)\right)\right)=G_{k,t}^{2}\left(t\cdot G_{k,1}^{(k-2)}(n)\right)=$$
$$=\dots=G_{k,t}^{(k-1)}\left(t\cdot G_{k,1}(n)\right)=G_{k,1}^{(k)}(n\cdot t)$$

adódik, amiből pedig (1) miatt

$$G_{k,t}((n+1)\cdot t)=(n+1)\cdot t-G_{k,t}^{(k)}((n+1)\cdot t-t)=(n+1)\cdot t-G_{k,t}^{(k)}(n\cdot t)=$$
$$=(n+1)\cdot t-t\cdot G_{k,1}^{(k)}(n)=t\cdot\left(n+1-G_{k,1}^{(k)}(n)\right)=t\cdot G_{k,1}(n+1)$$

következik, s ezzel a lemmát igazoltuk.

Az 1. Tétel bizonyítása: Tegyük fel először, hogy egy n természetes szám esetén

$$G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)=G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}+1\right]\right).$$

Ekkor a 4. Lemma alapján

(10)

$$G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t\right)=t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)=t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}+1\right]\right)=G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}+1\right]\cdot t\right).$$

Mivel $\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t\le\frac{n}{t}\cdot t<\left[\frac{n}{t}+1\right]\cdot t$, és a 3. Lemma szerint $G_{k,t}(n)$ monoton növekvő, ezért

(11) $G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t\right)\le G_{k,t}(n)\le G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}+1\right]\cdot t\right)$

A (11) egyenlőtlenséget (10) egyenlettel összevetve

$$G_{k,t}(n)=t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)$$

adódik, ami az állítást első felét igazolja.

Ha

$$G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)\neq G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}+1\right]\right)=G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]+1\right)$$

akkor a 3. és 4. Lemmák alapján

$$G_{k,t}\left(\left(\left[\frac{n}{t}\right]+1\right)\cdot t\right)=t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]+1\right)=$$

$$=\left(G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)+1\right)=t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right)+t=$$

$$=G_{k,t}\left(t\cdot\left[\frac{n}{t}\right]\right)+t.$$

Tehát teljesül a

$$t = G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t + t\right) - G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t\right)$$

egyenlőség. Ez a 3. Lemma alapján azt jelenti, hogy minden olyan m természetes számra, melyre

$$\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t \leq m < m+1 \leq \left[\frac{n}{t}\right]\cdot t + t,$$

$$G_{k,t}(m+1) - G_{k,t}(m) = 1$$

azaz

$$(12) \qquad G_{k,t}(m) - G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t\right) = m - \left[\frac{n}{t}\right]\cdot t.$$

a (12)-ből $m = n$-re, felhasználva a 4. Lemmát

$$G_{k,t}(n) = G_{k,t}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\cdot t\right) + n - \left[\frac{n}{t}\right]\cdot t = t\cdot G_{k,1}\left(\left[\frac{n}{t}\right]\right) + n - \left[\frac{n}{t}\right]\cdot t$$

adódik, ami az állítás második részét igazolja.

Az 1. Következmény a (2) alapján triviálisan következik az 1. Tételből, ezért csak a 2. Következményt bizonyítjuk

A 2. Következmény bizonyítása:

$n_1 \equiv n_2 \pmod{m}$ miatt $n_i = m\cdot t_i + r$ $i = 1,2$-re, ahol r természetes szám és $0 \leq r < m$.

$$n_i \geq m^2 \text{miatt } t_i \geq m, \text{ így} \left[\frac{r}{t_i}\right] = 0.$$

Az 1. Tételből $t = t_i = \left[\frac{n_i}{m}\right]$, $n = n_i$, s így

$\left[\frac{n}{t}\right] = \left[\frac{n_i}{t_i}\right] = m + \left[\frac{r}{t_i}\right] = m$ helyettesítésekkel kapjuk a

$$G_{k,t_i}(n_i) = \begin{cases} t_i \cdot G_{k,1}(m) & \text{ha } G_{k,1}(m) = G_{k,1}(m+1) \\ t_i \cdot G_{k,1}(m) + r & \text{különben} \end{cases}$$

egyenlőséget, ami $i=1$-re és $i=2$-re alkalmazva, majd a kapott kifejezéseket egymásból kivonva, adódik az állítás, figyelembe véve, hogy $t_1 - t_2 = \frac{n_1 - n_2}{m}$.

A 2. Tétel bizonyítása:

A bizonyításban felhasználjuk a Fibonacci számok jól ismert

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

előállítását (lásd pl. [4]). Legyen n egy természetes szám és ennek

$$n = \sum_{i=1}^{r} F(n_i)$$

a 2. Tétel feltételeit kielégítő előállítása.

Mivel $n_{i+1} - n \geq 2$, $i = 1,2,\ldots,r-1$ és $n_1 \geq 2$, ezért $n_i \geq 2i > 2i-1$, így

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

miatt

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2i-1} < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i} \leq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2i},$$

ahonnan

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2i-1} < \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i} \leq \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2i}$$

következik. Ebből a geometriai sorozat összegképletét és az $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ egyenlőséget alkalmazva,

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^r - 1 < \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i} \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^r - 1\right)$$

adódik.

Innen pedig a

$$0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1+\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i}\right) \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^r - 1\right) + 1\right)\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{r+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$$

egyenlőtlenség következik.

Tehát

$$(13)\qquad 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i}\right) < 1.$$

Alkalmazzuk a $G_{2,1}(n)$ sorozatot (2)-beli előállítását az $n = \sum_{i=1}^{r} F(n_i)$ helyettesítéssel, és használjuk a Fibonacci számok explicit előállítását! Ekkor

$$G_{2,1}\left(\sum_{i=1}^{r} F(n_i+1)\right) = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{r} F(n_i+1)\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i+1}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{r} F(n_1) + \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_i} + \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n_1+2}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} F(n_i) + \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n_i} \right) \right].$$

A kifejezés utolsó tagja (13) miatt nulla, s ezzel az állítást igazoltuk.

IRODALOM

[1] J. L. Browin, Zeckendorf's theorem and some applications, Fibonacci Quart., 2 (1964), 163–168.

[2] V. Granville and J.P.Rasson, A strange recursive relation, J. Number Theory, 30(1988) 238–241.

[3] P. Kiss and B. Zay, On a generalization of a recurrence sequence, Fibonacci Quart., 30(1992), 103–109.

[4] Rényi A., Napló az információelméletről. Gondolat Kiadó, Budapest, 1976. 136–163.