Geometriai transzformációk az általános iskolában

DR. PELLE BÉLA

RESÜMEE: „Geometrische Transformationen in der Schule, Teil 3." Seit einiger Zeit verstarken sich die Versuche, den geometrischen Unterricht in den Prozeß der Umgestaltung und Modernisierung des mathematischen Unterrichts dadurch einzubeziehen, daß den eindeutigen (geometrischen) Abbildungen der Ebene auf sich, den Transformationen, der ihnen gebührende zentrale Platz eingeraumt wird. Dem Vorschlag liegt ein axiomensystem zugrunde, das aus dem Hilbertschen durch gewisse Änderungen entsteht. Die Hilbertschen Kongruenzaxiome werden durch solche der Spiegelung ersetzt, durch Zusammensetzung von Spiegelungen die Bewegungen (Kongruenztransformationen) gewonnen. Mit diesen Transformationen untersucht man die Eigenschaften von Figuren der Ebene. Diese Verhandlung muß in der Grundschule gegründet werden. Der propädeutische Unterricht erarbeitet wessentliche Inhalte der Hilbertschen Axiomengruppen der Verknüpfung, Anordnung, Parallelitat sowie Sachverhalte der Kungruenzlehre (gleichlange Strecken, gleichgroße Winkel, Spiegelungen an Geraden).

Im Teil 1—2. habe ich über die Lehrstoffe der Klassen 1—6. der Grundschule geschrieben. Im Teil 3. fasse ich die Lehrstoffe der Klassen 7. zusammen.

Általános megjegyzés:

A geometria tárgyalásánál a sík ponthalmazához olyan transzformációkat rendelünk, amelyek a síkot önmagára képezik le. Az alakzatokat a sík ponthalmazának részhalmazaként fogjuk fel. Az alakzatok tulajdonságait a sík ponthalmazához rendelt transzformációk segítségével állítjuk össze. A tárgyalás során tehát először megismerjük az egyes transzformációkat, ezek alkalmazását feladatokon gyakoroljuk, majd az alakzatok tulajdonságait a transzformációk segítségével megvizsgáljuk.

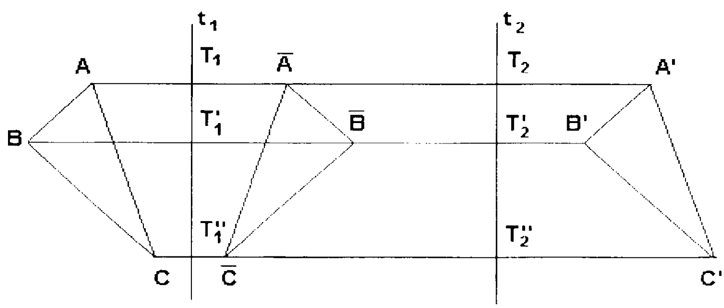
Geometriai transzformációk a 7. osztályban
Eltolás és forgás a síkon

6. osztályban megtanultuk az egy tengelyre történő tükrözést. 7. osztályban ezt folytatjuk. Két tengelyre fogunk egymásután tükrözni. A két tengely kölcsönös helyzete párhuzamos és metsző lehet. Tehát két párhuzamos és két metsző tengelyre történő tükrözéssekkel fogunk megismerkedni.

6. osztályban az alakzatok egyes tulajdonságait a tükrözés segítségével állapítottuk meg. A tulajdonságok megállapításánál gyakran mérőeszközöket (körző, vonalzó) használtunk. Ezek azonban nem mindig pontosak. A geomatriában az alakzatok tulajdonságait **bizonyítással** szoktuk megállapítani. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy egy új tulajdonságra már ismert tulajdonságok teljesüléséből következtettünk. Ezek után új tulajdonságok felfedezéséhez úgy jutunk el, hogy megmutatjuk, bizonyos tulajdonságok együttes teljesüléséből új tulajdonság jön létre.

Az eltolás a síkon

Tükrözzünk az ABC háromszöget a t_1 tengelyre, majd a t_2 tengelyre!



1. ábra

Vizsgáljuk az eredeti ABC háromszöget és a kétszeri tükrözéssel kapott $A'B'C'$ háromszöget!

1. **Az ABC eredeti háromszög és az $A'B'C'$ képháromszög körüljárása megegyezik.**
   Indokoljuk meg! A t_1 tengelyre történő tükrözés az ABC háromszög körüljárását ellenkezőjére változtatja a t_2-re történő tükrözés az $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ képháromszög körüljárását ismét ellenkezőjére változtatja, tehát ABC és $A'B'C'$ háromszögek körüljárása megegyezik.

2. **A megfelelő pontokat összekötő szakaszok egyenlők és párhuzamosak.**
   Ellenőrizzük méréssel!
   A tükrözés tulajdonságainak felhasználásával igazoljuk az állításunkat!

$$AT_1 = T_1\overline{A}, \quad \overline{A}T_2 = T_2A'; \quad \text{tehát} \quad AA' = 2T_1\overline{A} + 2\overline{A}T_2 = 2T_1T_2$$

$$BT_1' = T_1'\overline{B}, \quad \overline{B}T_2' = T_2'B'; \quad \text{tehát} \quad BB' = 2T_1'T_2'$$

$$CT_1'' = T_1''\overline{C}, \quad \overline{C}T_2'' = T_2''C'; \quad \text{tehát} \quad CC' = 2T_1''T_2''$$

Így: $AA' = BB' = CC'$ **és a tengelyek távolságának kétszeresei.**

továbbá AA' merőleges a t_1 és a t_2 tengelyekre, BB' és CC' szintén merőleges mindkét tengelyre. Így AA', BB', CC' szakaszok párhuzamosak.

3. **A megfelelő szakaszok egyenlők és párhuzamosak**
Ellenőrizzük méréssel és igazoljuk az állítást!
A tengelyes tükrözés tulajdonságai alapján:

$$AB = \overline{A}\,\overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{A}\,\overline{B} = A'B', \quad \text{így} \quad AB = A'B'.$$

$$BC = \overline{B}\,\overline{C} \quad \text{és} \quad \overline{B}\,\overline{C} = B'C', \quad \text{így} \quad BC = B'C'.$$

$$AC = \overline{A}\,\overline{C} \quad \text{és} \quad \overline{A}\,\overline{C} = A'C', \quad \text{így} \quad AC = A'C'.$$

A párhuzamosság belátása: Ha az AB szakasz bármely pontját tükrözöm t_1-re és t_2-re egymás után az eredeti és képpont távolsága a 2. tulajdonság alapján egyenlő lesz $AA' = BB' = CC'$-vel. Tehát AB és $A'B'$ bármely pontja egyenlő távolságra van egymástól, vagyis $AB \parallel A'B'$. Hasonlóan látható be, hogy $BC \parallel B'C'$ és $AC \parallel A'C'$.

4. **A képegyenesek és az eredeti egyenesek párhuzamosak.**
Ez az állítás a 2. tulajdonságból következik. Ugyanis, ha megfelelő szakaszok párhuzamosak, akkor a szakaszok egyenesei is párhuzamosak.

5. **Az eredeti háromszög és a képháromszög fedésbe hozható, tehát egybevágó**
A tengelyes tükrözésekből ugyanis következik, hogy:

$$ABC\Delta \equiv \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\Delta \text{ és } \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\Delta \equiv A'B'C'\Delta \text{ így } ABC\Delta \equiv A'B'C'\Delta.$$

6. **Az eredeti és a képháromszög szögei egyenlők.**
A 4. tulajdonság alapján a két háromszög fedésbe hozható, így a megfelelő szögek fedik egymást, tehát egyenlők.

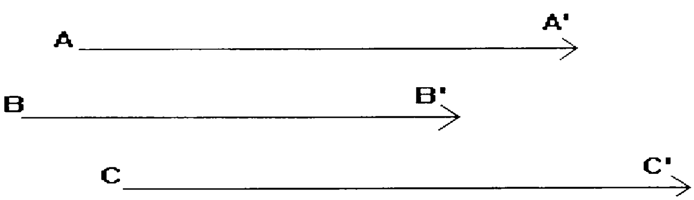
Hasonlítsuk össze az egy tengelyre történő tükrözéssel kapott tulajdonságokkal! A két tengelyre történő egymásutáni tükrözésnél vannak olyan tulajdonságok, amelyek nincsenek meg az egy tengelyre történő tükrözénél. Pl.:

— A két háromszög körüljárása két tengely esetén megegyező, egy tengely esetén ellentétes.
— Az eredeti és képpontok távolsága két tengelyre történő egymásutáni tükrözésnél egyenlők, egy tengelyre történő tükrözésnél nem egyenlők.

A két tengelyre történő egymásutáni tükrözést tehát nem nevezhetjük tengelyes tükrözésnek. Az új névhez a 2. tulajdonság kiemelése vezet el. Két tengelyre történő tükrözésnél az eredeti és a képpontok távolságai egyenlők és párhuzamosak. Tehát az ABC háromszögből az $A'B'C'$ háromszöget úgy is megkapjuk, hogy az ABC háromszög minden pontját a tengelyek távolságának kétszeresével a tengelyre merőleges irányban eltoljuk. **A két párhuzamos tengelyre történő egymásutáni tükrözés eredményét eltolásnak** nevezzük. Az eltolást tehát az eddigi tulajdonságok alapján megadhatjuk:

a) két párhuzamos tengellyel, vagy
b) az eredeti és képpont irányított távolságával.

Az eredeti pontból a képpontba húzott szakaszt elláthatjuk nyíllal és **eltolási nyílnak** vagy **vektornak** nevezhetjük. Az előző ábrából látható, hogy adott eltolásnál az AA', BB', CC' eltolási nyílak egyenlők párhuzamosak és egyirányúak.



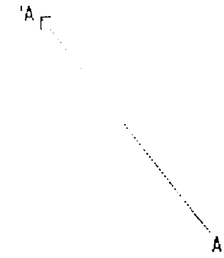
2. ábra

Akkor ezek közül elegendő egyet megadni, és egy eltolási nyíl (vektor) az eltolást ugyanúgy meghatározza, mint két párhuzamos tengelyre történő egymásutáni tükrözés.

Az eltolás megadása vektorral egyszerűbbnek tűnik, mint két párhuzamos tengellyel, ezért általában vektorral adjuk meg az eltolást.

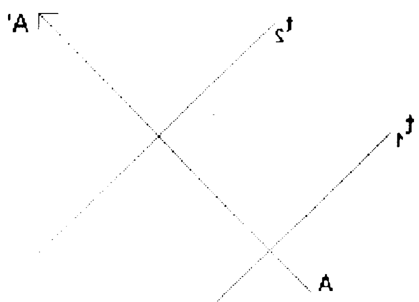
Gyakorlás

1. Adott a síkban egy AA' eltolási nyíl. Szerkesszük meg a sík tetszőleges pontjainak az eltolt képeit!



3. ábra

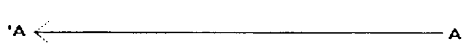
2. Szerkesszük meg az 1-es feladathoz a t_1, t_2 párhuzamos tengelyeket úgy, hogy a sík pontjainak a képei ugyanazok legyenek, mint az AA' nyíllal (vektorral) megadott képei!
Ügyeljünk a következőkre:
— az eltolási nyíl a tengelyek távolságának kétszerese;
— a vektorok merőlegesek a tengelyekre.
A tengelyeket az előírás szerint vegyük fel, bárhol!



4. ábra

Megoldáshoz: t_1 tengelyt AA'-re merőlegesen bárhol felvesszük. Az $\frac{AA'}{2}$ távolságot AA' irányban felmérjük és megrajzoljuk a t_2 tengelyt.

3. Szerkesszük meg adott vektor esetén egy egyenes eltolt képét!



5. ábra

a) Az egyenes párhuzamos a vektorral.
b) Az egyenes merőleges a vektorra.
c) Az egyenes tetszőleges.

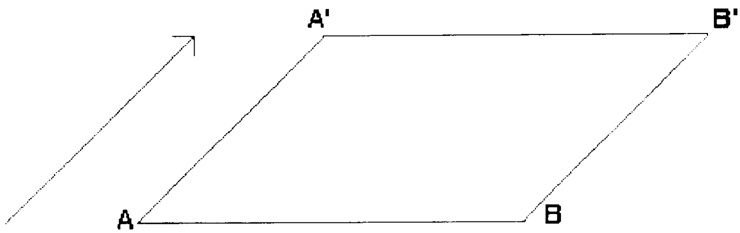
Azt az egyenest, amelynek képe önmaga, **invariáns** egyenesnek nevezzük.

4. Szerkesszük meg adott vektor esetén egy félegyenes eltolt képét!

5. Szerkesszük meg egy kör képét adott vektor esetén!
Megoldáshoz: Elég a kör középpontjának a képét megszerkeszteni, mert az eltolás szakasztartó, a kör sugara nem változik.

Alakzatok tulajdonságainak vizsgálata az eltolás segítségével

1. Szerkesszük meg az AB szakasz képét adott eltolás nyíl esetén!

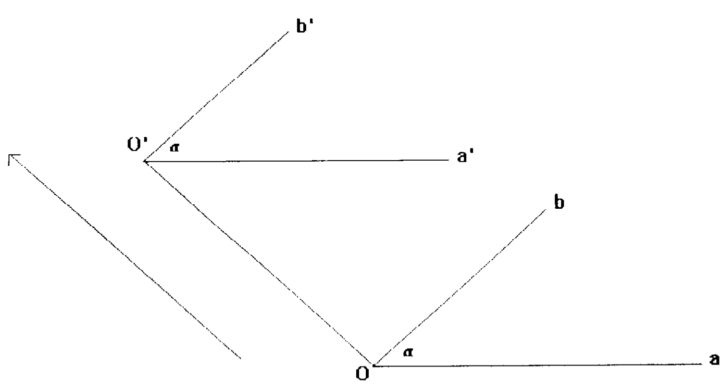


6. ábra

Megoldás: A szakasz végpontjaiból párhuzamosokat húzunk az eltolási nyíllal, és annak hosszát felmérjük a párhuzamosokra. Így kapjuk az A', B' pontokat.

Olyan négyszszöget kaptunk, amelyben AA' párhuzamos BB'-vel és AB párhuzamos $A'B'$-vel. **Azt a négyszöget, amelyben a szemközti oldalak párhuzamosak, paralalogrammának nevezzük.**
Mivel az eltolási nyílak egyenlők, továbbá egy szakasz és eltolással kapott képe egyenlő, a **paralelogramma szemközti oldalai egyenlők**.

2. Szerkesszük meg egy szög eltolással kapott képét adott vektor esetén!

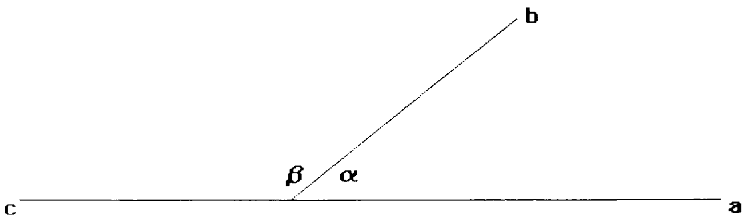


7. ábra

Megoldás: A szög 0 csúcsából párhuzamost húzunk az adott vektorral és ráмérjük a vektor hosszát, így kapjuk a szög 0 csúcsának 0′ képét. 0′-ből párhuzamosokat húzunk a szög száraival megegyező irányba. Így kapjuk az α szög α' képet.

Azokat a szögeket, amelyeknek szárai párhuzamosak és egyező irányúak, egyállású szögeknek nevezzük.

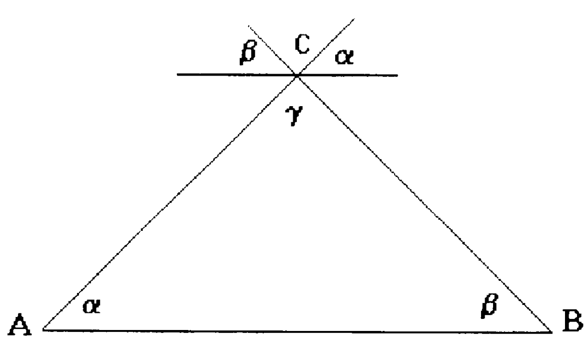
Mellékszög: Két szöget, amelyeknek a csúcsuk és egyik száruk közös, és egymást 180°-ra egészítik ki, mellékszögeknek nevezzük.



8. ábra

$\alpha + \beta = 180°$, vagyis összegük egyenes szög. Így a és c szárak egy egyenesre illeszkednek.

3. Metszünk el egy párhuzamos egyenespárt egy egeyenessel!
   Az így akpott alakzaton keressünk egyenállású szögeket és mellékszögeket!
4. Keressünk a következő ábrán egyállású és mellékszögeket!



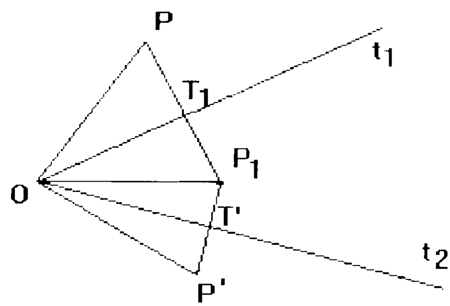
9. ábra

Forgás a síkon

Két egyenes kölcsönös helyzete a síkban párhuzamos vagy metsző. A párhuzamos egyenesekre történő egymásutáni tükrözések eredményét **elto-**

lásnak neveztük. Az eltolás tulajdonságait a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból állapítottuk emg. A következőkben két metsző egyenesre történő egymásutáni tükrözéssel foglalkozunk.

Jelöljük a két metsző egyenest t_1-gyel és t_2-vel, metszéspontjukat 0-val. A sík tetszőleges P pontját tükrözzük előbb a t_1 egyenesre, majd a t_2 egyenesre. A tükörképeket jelöljük P_1-gyel és P'-vel, az egyeneseken lévő metszéspontokat T_1-gyel és T'-vel.



10. ábra

A tükrözés tulajdonságai alapján írjuk le a két metszőegyenesre mint tengelyre történő tükrözés tulajdonságait!

— P pont képe P' pont.

— OP szkasz képe t-re történő tükrözéssel OP_1, OP_1 képe t_2-re történő tükrözésnél OP'. Tehát: $OP = OP_1 = OP'$ vagyis $OP = OP'$.

Igy a **két metszőegyenesre** történő egymásutáni tükrözés eredménye **szakasztartó transzformáció.**

— Mivel $OP = OP_1 = OP'$, **a** PP_1P' **az** O **középpontú,** OP **sugarú körön vannak.** A két tengelyre történő egymásutáni tükrözésnél a tetszőleges P pont az O középpontú, OP sugarú körön fordul el t_1t_2 irányában POP' szöggel.

— OPP_1 háromszög egyenlőszárú háromszög és ennek a t_1 egyenes alapfelező merőlegese illetve szögfelezője. Tehát $POT_1\sphericalangle = T_1OP_1\sphericalangle$-gel. OP_1P' háromszög szintén egyenlőszárú háromszög és ennek a t_2 egyenes a szögfelezője. Tehát $P_1OT'\sphericalangle = T'OP'\sphericalangle$.

A szögek összege:

$$POT_1\sphericalangle + T_1OP_1\sphericalangle + P_1OT'\sphericalangle + T'OP'\sphericalangle = 2t_1t_2\sphericalangle.$$

Tehát $POP'\sphericalangle = 2(t_1t_2)\sphericalangle$.

A megállapított tualjdonságok alapján két metsző egyenesre történő tükrözésnél a sík tetszőleges P pontjának aképét úgy is megkaphatjuk, hogy az egyenesek O metszéspontja körül OP sugárral, $2(t_1 t_2)$ szöggel, $t_1 t_2$ forgásirányban elforgatjuk. A két megsző egyenesre történő egymásutáni tükrözés tehát elforgatással heleyttesíthető.

Vizsgáljuk meg, hogy a leírt tulajdonságok a sík bármennyi pontjának két metszőegyenesre történő egymásutáni tükrözésénél igazak-e?

Vegyük fel a síkban pl. három tetszőleges pontot. Jelöljük ezeket A-, B-, C-vel. tükrözzük egymásután a t_1 és t_2 tengelyekre. Ellenőrizzük, hogy az előző tualjdonságok igazak?

Hasonlítsuk össze megállapításainkat a tengelyes tükrözés és az eltolás tulajdonságaival! Lehet a két metsző egyenesre történő tükrözések sorozatának eredménye tengelyes tükrözés vagy eltolás? - Nem. Ennek a transzformációnak új nevet adunk: **forgás.**

Foglaljuk össze a forgás tulajdonságait!

1. Egy fixpontja van, a tengelyek metszéspontja.
2. A sík pontjaihoz a síkpontjait rendeli, kölcsönösen egyertelműen.
3. Távolságtartó és szögtartó.
4. A tengelyek szögének kétszerese az elforgatás szöge.
5. A forgás az alakzatok körüljárását megtartja.

Ezek után definiáljuk a **forgást**: Egy síknak olyan önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezése, amely két metsző egyenesre való, egymás után végrehajtott tükrözésből áll.
A forgás egyértelműen adott:

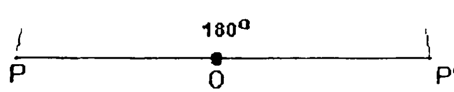
1. két metszőegyenessel;
2. egy fixponttal, az elforgatás szögével és a forgás irányával.

Az előzőekben megfigyelés alapján írtuk le a forgás tualjdonságait. A megfigyelést mellőzve, konkrét mérés nélkül, próbáljuk igazolni a forgás tualjdonságait a tükrözés ismert tualjdonságai alapján.

Középpontos szimmetria a síkon

Az előzőekben két metszőegyenesre történő tükrözést forgásnak neveztünk. Ha a metszőegyenesek merőlegesek egymásra, akkor a forgás szöge $2 \cdot 90° = 180°$, a forgás speciális forgás.

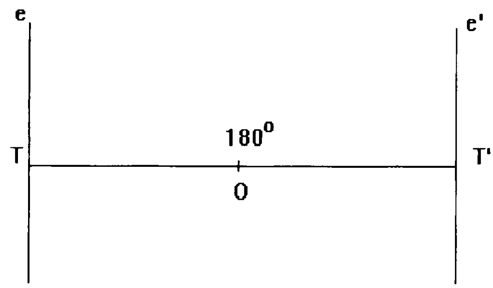
1. Szerkesszük meg egy P pont képét, ha a forgásszög $180°$!



11. ábra

P képe az OP sugarú kör PP' átmérőjének a másik végpontja, vagyis az O-n átmenő egyenesen $OP = OP'$ és P_1P' szimmetrikusan helyezkedik el O-hoz. A leképezést **középpontos szimmetriának** vagy **középpontos tükrözésnek** nevezzük.

2. Szerkesszük meg egy egyenes középpontos szimmetrikus képét!

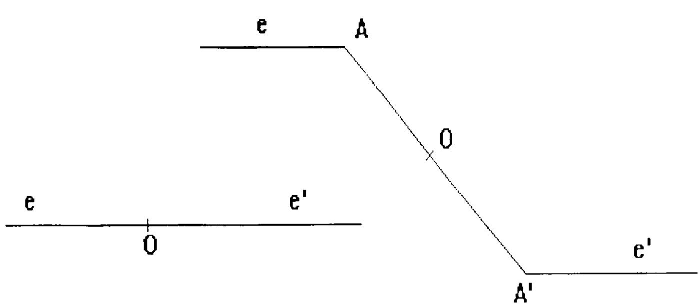


12. ábra

A forgásnál tanultak szerint megszerkesztjük az egyenes 180°-kal elforgatott képét, $OT = OT'$, $eTO\sphericalangle = OTe'\sphericalangle = 90°$, $TOT'\sphericalangle = 180°$. A TT' szakaszra merőleges egyenesek nem metszik egymást, párhuzamosok. Középpontos tükrözésnél egyenes és képe párhuzamos.

Ne felejtsük el, hogy a középpontos szimmetria, a középpontos tükrözés, a 180°-os forgás, a két merőleges egyenesre történő egymásutáni leképezés ugyanazt a leképezést jelenti.

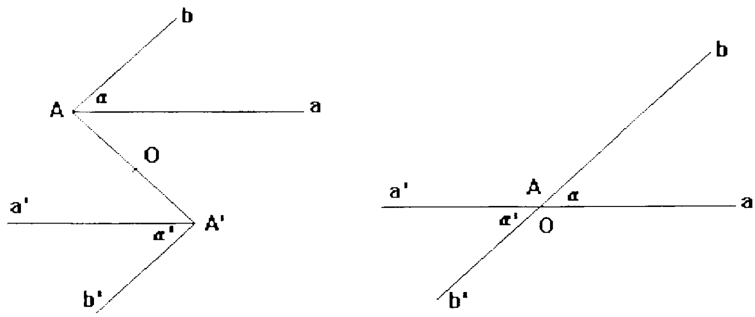
3. Vizsgáljuk meg egy félegyenes centrális tükrözéssel kapott képét!



13. ábra

A félegyenes és képe egy egyenesre illeszkedik, vagy párhuzamos (egyállású), és ellentétes irányú.

4. Elemezzük egy szög centrális tükrözéssel kapott képét!



14. ábra

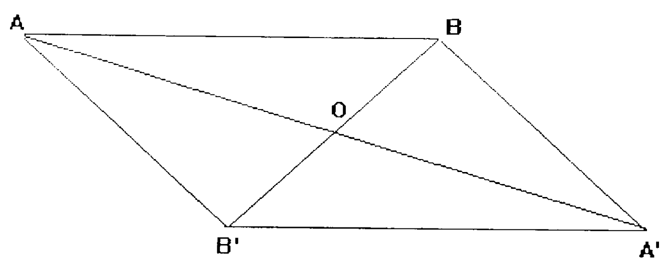
Két merőleges egyenesre történő tükrözés vagyis a 180°-os forgás szögtartó transzformáció, tehát a szög és centrális tükrözéssel kapott képe egyenlő. Szárai ellentétes irányúak.

Azokat a szögeket, amelyeknek szárai párhuzamosak és ellentétes irányúak, **váltószögeknek** nevezzük.

Azokat a szögeket, amelynek csúcsai egybeesnek, szárai egy egyenesre illeszkednek és ellentétes irányúak, **csúcsszögeknek** is nevezzük.

A csúcsszögek és váltószögek egyenlők, ugyanis egymásból centrális tükrözéssel származtathatók.

5. Szerkesszük meg egy szakasz centrális tükrözéssel kapott képét!



15. ábra

Szakasz és képe egyenlő és párhuzamos.
Az AB' szkasz képe $A'B$, tehát ezek is egyenlők és párhuzamosak.
A kapott alakzat paralelogramma.

6. Foglaljuk össze a **centrális tükrözés tulajdonságait!**
   Mivel a centrális tükrözés speciális forgás, a centrális tükrözés tulajdonságainak egy része megegyezik a forgás tulajdonságaival.

1. Egy fixpontja van.

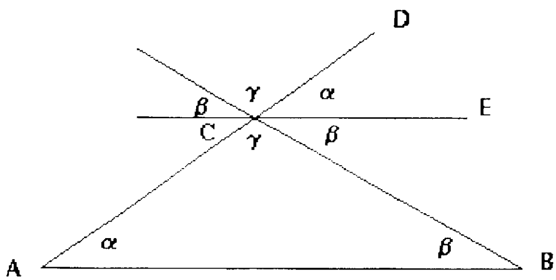
2. A sík pontjaihoz a sík pontjait rendeli kölcsönösen egyértelműen úgy, hogy $PO = OP'$ és P, P', az O kezdüpontú különböző félegyeneseken van.
3. Távolgásgtartó és szögtartó transzformáció.
4. Egyenes és képe párhuzamos.
5. Az alakzatok körüljárását megtartja.

A centrális tükrözés (centrális szimmetria) definíciója: A síknak olyan önmagára történő transzformációja, amely 180°-os forgásból áll.

Alkalmazások

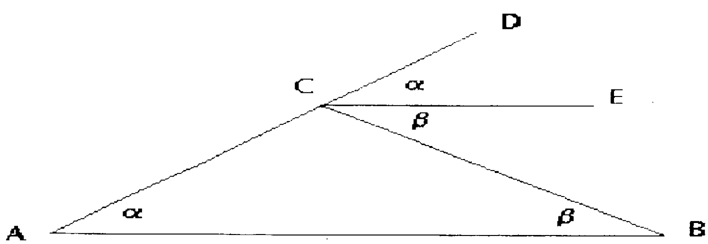
1. Keressünk a háromszögön az α és β szöghöz egyállású szöget, a szöghöz csúcsszöget!

Mutassuk meg, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°!



16. ábra

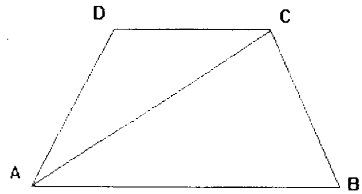
2. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével!



17. ábra

Bizonyítás: $\alpha = DCE\sphericalangle$, mert egyállású szögek. $\beta = ECB\sphericalangle$, mert váltószögek. $DCB\sphericalangle = \alpha + \beta$.

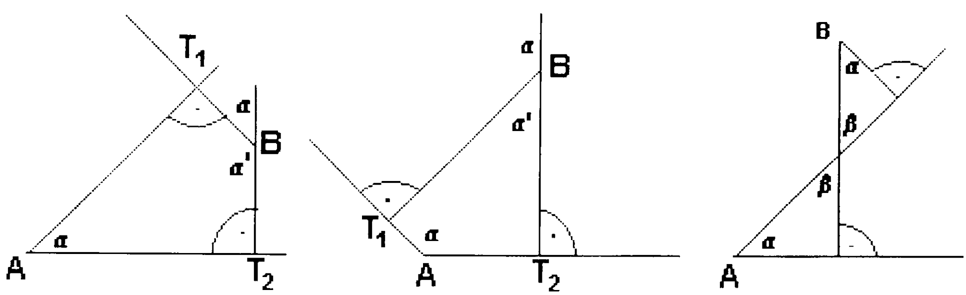
3. Bizonyítsuk, be hogy egy négyszög belső szögeinek összege 360°



18. ábra

Bizonyítás: A négyszög egy átlóval két háromszögre bontható. Egy háromszög belső szögeinek összege 180°. A két háromszög belső szögeinek összege 360°. Így a négyszög belső szögeinek összege 360°.

4. Az ábrán látható merőleges szárú szögek között keressünk összefüggést!

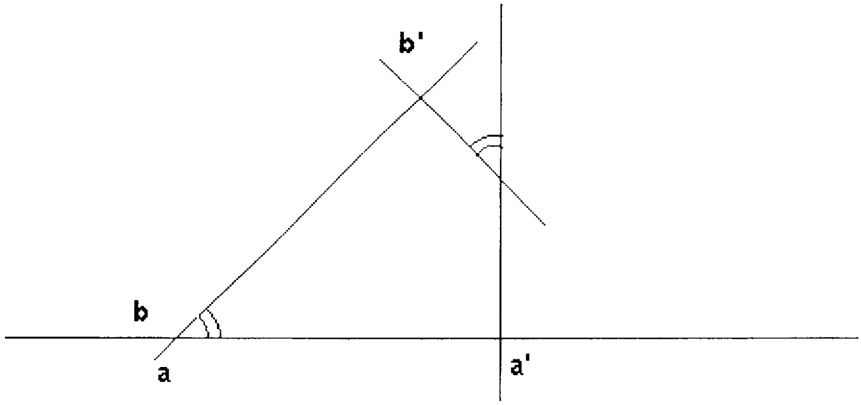


19. ábra

$\alpha + \alpha' = 180°$, mert ABT_1T_2 négyszögben két szög derékszög. Rajzoljuk be az α szög megfelelő szögeit!

A merőleges szárú szögek tehát vagy egyenlők, vagy egymást 180°-ra egészítik ki!

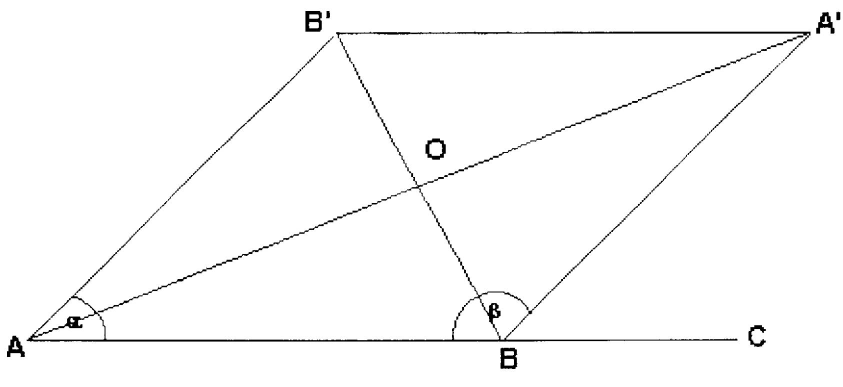
5. Bizonyítsuk be, hogy egymásra merőleges egyenespárok szögei egyenlők!



20. ábra

Bizonyítás: Metszőegyenesek szögén a nem tompaszöget értjük. Mivel a merőleges szárú szögek vagy egyenlők, vagy egymást 180°-ra egészítik ki, így a szögszárak egyeneseinek szögei az egyenlő nem tompa szögek.

Alakzatok tulajdonságainak vizsgálata centrális tükrözéssel
Centrálisan (középpontosan) tükrös négyszögek



21. ábra

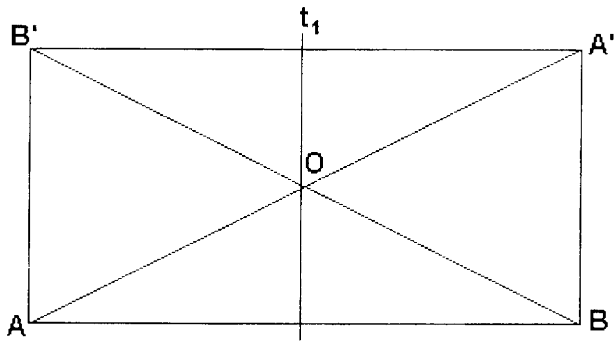
1. Tükrözzünk egy AB szakaszt centrálisan. A centrális tükrözés alapján az AB oldal és $A'B'$ képe párhuzamos. Az $A'B'$ oldal BA' képe is párhuzamos. Az alakzat paralelogramma. A paralelogramma centrálszimmetrikus alakzat.

A centrális tükrözés alapján írjuk le a paralelogramma tulajdonságait.

1. A szemközti oldalak egyenlők.

2. Átlói felezik egymást. (Ugyanis $AO = OA'$ és $BO = OB'$.)
3. Szemközti szögei egyenlők. (Ugyanis a $B'AB$ képe $BA'B'\sphericalangle$.)
4. A szomszédos szögek összege 180°. (Ugyanis pl.: $B'AB\sphericalangle = A'BC\sphericalangle$, mert egyállású szögek. Így $\alpha + \beta = 180°$.)

2. Ha a paralelogrammának mind a négy szöge egyenlő, akkor a paralelogramma neve **téglalap**.

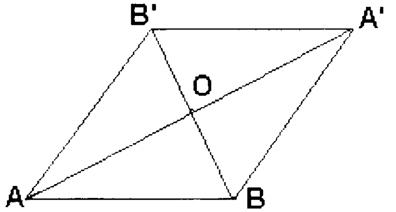


22. ábra

A téglalap tulajdonságainak egy része ugyanaz, mint a paralelogramma tulajdonságai, és még:

1. Szögei 90°-sak. (Ugyanis a négyszög belső szögeinek összege 360°. Ennek negyedrésze 90°.)
2. Két tükörtengelye felezi az oldalakat (A hurtrapéznál tanultuk.)
3. Átlói egyenlők. (Ugyanis az AA' átló t_1-re vonatkozó tükörképe BB'.)
4. A téglalap köré írható, aminek középpontja 0. (Ugyanis $OB = OB'$, $OA = = OA'$.)

3. Ha a paralelogramma minden oldala egyenlő, akkor a neve **rombusz**.



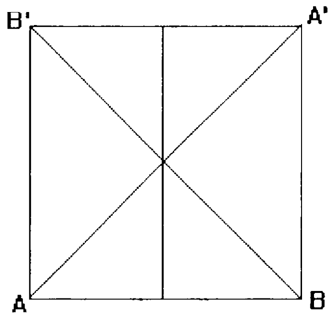
23. ábra

Foglaljuk össze a tulajdonságait:

1. Szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.
2. Szemközti szögei egyenlők.

3. A szomszédos szögek 180°-ra egészítik ki egymást.
4. Átlói felezik egymást.
5. Átlói felezik a szögeket, tehát tükörtengelyek.
6. Centrálszimmetrikus.

4. Ha a paralelogramma egyenlő oldalú és egyenlő szögű, akkor a neve **négyzet.**



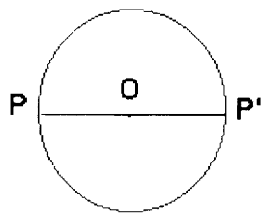
24. ábra

A négyzet tehát rombusz is és téglalap is.

Tulajdonságai:

1. Szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.
2. Minden szöge 90°-os.
3. Átlói egyenlők és merőlegesen felezik egymást.
4. Átlói felezik a szögeket.
5. Négy tükörtengelye van és centrálszimmetrikus.
6. A négyzet köré kör írható.

5. Bizonyítsuk be, hogy a kör középpontosan tükrös!



25. ábra

A körvonal tetszőleges pontját jelöljük P-vel. Húzzuk meg a P ponton átmenő átmérőt. Az átmérő másik végpontját jelöljük P'-vel A P pont P'-be O körüli 180°-os forgással vihető át, tehát P és P' középpontosan tükrös.

Mivel P tetszőleges pontja a körvonalunk, a körvonal minden pontjának van szimmetrikus társa. Emellett a kör minden átmérőjére tengelyesen is tükrös. **A körnek végtelen sok tükörtengelye van és szimmetrikaközéppontja is van.**

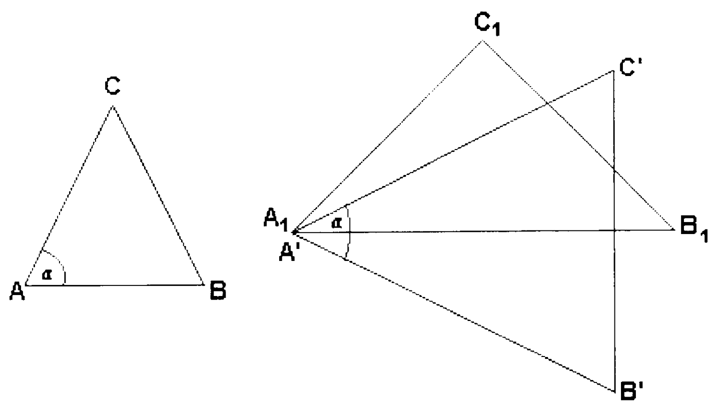
6. **Beszélgessünk a szabályos sokszögek tükrös tulajdonságairól!**

Háromszögek egybevágósága

Az előzőekben beláttuk, hogy a tengelyes tükrözés vagy a tengelyes tükrözések sorozata (pl.: eltolás, forgás, centrális tükrözés) távolságtartó és szögektartó transzformáció. **Ezeket a transzformációkat egybevágósági transzformációknak nevezzük.** Másképpen: a tengelyes tükrözésből és tengelyes tükrözések szorzatából előálló transzformációkat **egybevágósági transzformációnak** nevezzük. Két alakzatot egybevágónak nevezünk a síkban, ha tengelyes tükrözéssel vagy tengelyes tükrözések sorozatával egyik alakzat a másikba vigehtő át. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy két alakzat ha egybevágó, akkor egymással fedésbe hozhatók, ugyanis az egymásnak megfelelő oldalak és szögek egyenlők.

Egy háromszögben három oldal és hároms szög van. Így két háromszög egybevágóságához hat adatnak kell megegyezni. A háromszögek egybevágóságának eldöntéséhez azonban néha három adat is elegendő.

1. **Két háromszög egybevágó, ha két-két oldalának adatai és közbezárt szögük eygenlők.**



26. ábra

Legyen: $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $CAB\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle$.

Keressünk az ABC háromszöghöz olyan egybevágósági transzformációkat, amelyek az $A'B'C'$ háromszögbe viszik át.

Toljuk el az ABC háromszöget az AA' eltolási nyíllal. Ekkor az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Az $A_1B_1C_1$ háromszöget a közös A' pont körül forgassuk el úgy, hogy az A_1B_1 félegyenes az $A'B'$ félegyenesre kerüljön. Mivel $AB = A_1B_1 = A'B'$, ezért az AB oldal az $A'B'$ oldalra került. Továbbá: a $CAB\sphericalangle = C_1A_1B_1\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle$ miatt az AC szögszár az $A'C'$ szögszárra került, és az $AC = A_1B_1 = A'C'$ oldalegyenlőség miatt az AC oldal az $A'C'$ oldalra. Így az A csúcspont az A'-be a B csúcspont a B'-be és a C csúcspont a C'-be került, vagyis az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe vittük át. A két háromszög fedésbe került, vagyis egybevágó.

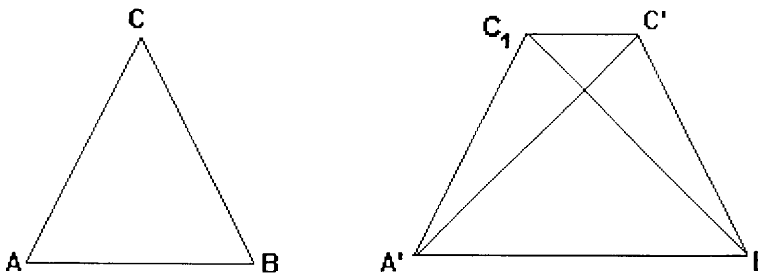
2. **Két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldalban és a rajta lévő két szögben.**

A bizonyítást az előzőhöz hasonlóan végezhetjük el.

3. **Két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalai egyenlők.**

Legyen: $AC = A'C'$; $AB = A'B'$; $BC = B'C'$.

Toljuk el, majd forgassuk el a háromszöget úgy, hogy az AB oldal az $A'B'$ oldalra kerüljön.



27. ábra

Hová kerül a C csúcs? Ha pl.: a C_1 pontba kerülne, akkor az ABC háromszög az $A'B'C_1$ háromszögbe kerülne és $AC = A'C' = A'C_1$ továbbá $BC = B'C' = B'C_1$ teljesülne. A C_1C' alapú $C_1C'A'$ és $C_1C'B'$ háromszögek egyenlő szárúak lennének és az alapfelező merőlegesük átmenne az A' és B' csúcsokon, vagyis egy szakaszhoz T — CC'-höz — két felezőmerőleges tartozna, ami nem lehet. Így a C_1 pont csak C'-be kerülhet.

4. **Két háromszög egybevágó, ha két-két oldalukban és a nagyobbikkal szemközti szögükben megegyeznek.**

Ennek az egybevágósági esetnek a bizonyítását tanulmányaink során később végezzük el.

A négy egybevágósági esetből következik, hogy az így megadott három adatból mindig egy háromszög szerkeszthető.

Alkalmazásként háromszögekkel kapcsolatos szerkesztési és bizonyítási feladatokat oldhatunk meg.