A főiskolai geometria anyag egy lehetséges megalapozása III. rész

SASHALMINÉ KELEMEN ÉVA

Abstract. (One of the possible establishments of the academic geometrical subject. Part. II.) This paper continues the theme that was published in the latest issue of Acta Academiae Paedagogicae Agriensis (Vol. XXI. 199). It contains the marks of the central symmetry and the translation and characterization of the coincidental transformations on plane.

Ez a cikk az előző kötetben megjelent anyag folytatása (Acta Academiae Paedagogicae Agriensis tom. XXI.). Tartalmazza a centrális szimmetria, eltolás tulajdonságait és a síkbeli egybevágósági transzformációk jellemzését.

5.11. Értelmezés. Két merőleges egyenesre történő tükrözések szorzatát az O pontra vonatkozó **centrális szimmetriának** vagy **centrális tükrözésnek** nevezzük, ahol O a két egyenes metszéspontja. Jele: S_0 vagy T_0.

5.13. Következmény.

Tulajdonságok. Legyen $T_0(A) = A'$ és $A \neq O$.

1. Az 5.15 tétel alapján az A, OA' ponthármas kollineáris, s O az $[A, A']$ felezési pontja.

2. Az O pontra illeszkedő egyenesek invariánsak, s az O ponton kívül a leképezésnek nincs más fixpontja.

3. A centrális tükrözést egy megfelelő pontpár vagy a centrum egyértelműen meghatározza.

Ha az A, A' pontpár adott, az $[A, A']$ felezési pontja az O. Ha az O adott, tetszőleges P pont képe egyértelmüen meghatározható az $\overline{O,P}$ egyenesen.

4. Az O pontra vonatkozó szimmetria minden egyenest vele egyállású egyenesbe visz át.

Ha $O \in e$, akkor e invariáns.

Ha $O \notin e$, akkor legyen O e-re való merőleges vetülete T. Az 5.10. következmény alapján az e és $\overline{O,T}$ merőleges egynesek e' és $\overline{O,T'}$ képe is merőleges lesz. Mivel T, O, T' kollineáris, az 5.10. tétel alapján $e \parallel e'$.

5. $T_0 \circ T_0 = I$. A centrális tükrözés involutórikus leképezés.

Az 5.15. tétel és a tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt: Ha $T_0 = T_b \circ T_a$, akkor $T_0 \circ T_0 = T_b \circ T_a \circ T_b \circ T_a = T_a \circ T_b \circ T_b \circ T_a = T_a \circ I \circ T_a = T_a \circ T_a = I$.

5.12. Értelmezés. Egy geometriai alakzatot **középpontosan** vagy **centrálisan szimmetrikus**nak nevezünk, ha van olyan pont, amelyre tükrözve az alakzat önmagába megy át.

6. Szakasz, szög

6.11. Értelmezés. Két geometriai alakzatot **egybevágó**nak nevezünk,ha létezik olyan egybevágóság, amely egyiket a másikba viszi át. Jele: $\cong$

6.1. Tétel. Az alakzatok egybevágósága ekvivalenciareláció.

BIZONYÍTÁS.

1. Reflexív — $H \cong H$. Az identitás az az egybevágóság amely a H alkazat minden pontját fixen hagyva teljesíti az előző értelmezés feltételét.

2. Szimmetrikus — Ha a H_1 akazatot az F egybevágóság viszi át H_2-be, akkor a 4.9. következmény alapján az F inverze H_2-t H_1-be képezi le. Így ha $H_1 \cong H_2$, akkor $H_2 \cong H_1$.

3. Tranzitív — ha az F_1 egybevágóság H_1-t H_2-be, az F_2 a H_2-t a H_3-ba viszi át, akkor ismét a 4.9 következményre hivatkozva, az $F_2 \circ F_1$ a H_1-t a H_3-ba viszi át. Így ha $H_1 \cong H_2$ és $H_2 \cong H_3$ akkor $H_1 \cong H_3$.

Megjegyzés. A 3. fejezetben definiált szakaszra is érvényes az előző tétel, mert a 4.5 következmény alapján az egybevágóság szakaszt szakaszba viszi át. A továbbiakban a távolságfogalom és a valós számok tulajdonságainak felhasználásával néhány, szakaszokra vonatkozó összefüggést vizsgálunk meg.

6.2. Értelmezés. Az $[A, B]$ hosszán a $d(A, B)$-t értjük.

6.3. Értelmezés. Két szakasz közül azt mondjuk **nagyobb**nak, illetve **kisebb**nek, amelyikhez hosszként nagyobb, illetve kisebb szám tartozik.

6.1. Következmény.

1. Egybevágó szakaszok hossza egyenlő.

2. Két szakaszra az $=, >, <$ relációk közül egyszerre csak az egyik teljesülhet.

3. Ha egy szakaszt belső pontokkal véges sok szakaszra osztunk, akkor a szakaszok hosszának összege az eredeti szakasz hosszát adja.

A X. axióma alapján $d(A,B) = d(A_1,A_2) + d(A_2,A_n) = d(A_1,A_2) + d(A_2,A_3) + d(A_3,A_n) = d(A_1,A_2) + d(A_2,A_3) + \cdots + d(A_{n-1},A_n)$, ahol $A = A_1$, $B = A_n$, $A_2 \cdots A_{n-1}$ az $[A,B]$ belső pontjai.

4. Ha egy $[A,B]$-nak valódi részhalmaza egy $[C,D]$, akkor az $[A,B]$ hossza nagyobb a $[C,D]$ hosszánál.

5. Ha egy $[A,B]$-t az A,B félegyenesre n-szer egymás után felmérünk, és a C pontot kapjuk, akkor az $[A,C]$ hossza egyenlő az $[A,B]$ hosszának n-szeresével. (A felmérés a X. axióma alapján azt jelenti, hogy az A,B félegyenesen megjelöljük a $d(A,B)$ távolságú pontokat.)

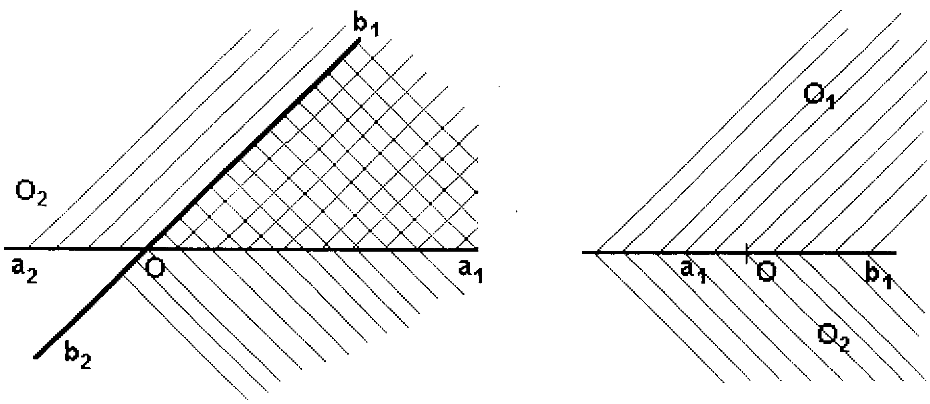
6.4. Értelmezés. Ha egy szakasz határpontjainak egyikét kezdő, másikat végpontnak nevezzük, irányított szakaszról beszélünk.

6.5. Értelmezés. Ha A,B az e irányított egyenes két tetszőleges pontja, a kitüntetett pontja pedig O, akkor az $[A,B]$ **irányított szakasz hosszának** nevezzük és $\underline{AB}$-vel jelöljük a következő számot:

$$\underline{AB} = f(B) - f(A).$$

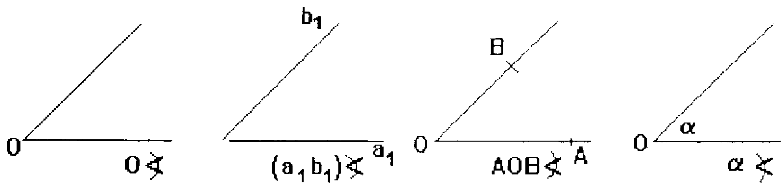
Megjegyzés. $\underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA}$, s ez az érték $d(A,B)$-vel, vagy $-d(A,B)$-vel egyenlő, attól függően, hogy $A \leq B$ vagy $B \leq A$, így nem függ az O választásától. Ha az egyenesen levő rendezést a vele ellentétes rendezésre cseréljük, az előjel megváltozik. Ha O-t rögzítjük, $\underline{AB} = a - b$, ahol a és b az A,B pontok abszcisszáját jelenti.

6.6. Értelmezés. Tekintsük az α síkbeli közös O kezdőpontú, különböző a_1, b_1 félegyeneseket, s legyen az a_1-t tartalmazó egyenes a, a b_1-t tartalmazó b. Ha $a \neq b$, akkor jelölje az a által meghatározott b_1-t tartalmazó nyílt félsík és a b által meghatározott a_1-t tartalmazó nyílt félsík metszetét O_1, s legyen $\alpha \setminus \{O_1 \cup a_1 \cup b_1\} = O_2$. Ha $a = b$, akkor O_1 és O_2 jelölje az így adódó egyenes által meghatározott két nyílt félsíkot. (7. ábra) Az O_1 és O_2 ponthalmazokat az a_1 és b_1 félegyenesekkel együtt **szögeknek (szögtartományoknak)** nevezzük. Az a_1 és b_1 félegyenesek a **szög szárai**, O a **szög csúcsa**, $a_1 \cup b_1$-**szögvonal**.



7. ábra

Megjegyzés. Az értelmezés alapján egy szögvonalhoz két szög tartozik, s ezek közül az egyik, az O_1-t tartalmazó, konvex alakzat. A továbbiakban, ha olyan szög szárait adjuk meg, amelyek nem alkotnak egy egyenest, és nem utalunk a szögtartományra, akkor a konvex alkazatot tekintjük adottnak.
Jelölések.



8. ábra

6.7. Értelmezés. ha $a_1 = b_1$, akkor az O_1 üres halmaz, az így keletkezett szög a **nullszög**. Az O_2 ekkor — az a_1, b_1 kivételével — a sík pontjai az a_1, b_1-el együtt: **teljesszög.**

6.2. Következmény. Az egybevágóság szöget szögbe visz át. (Félsíkot félsíkba, félegyenest félegyenesbe visz át, s mivel a szög az értelmezés alapján ezek közös része, a szög képe is szög lesz.)

6.8. Értelmezés. Azt a szöget, amelynek két szára nem esik egybe, de egy egyenest alkot, **egyenesszögnek**, amelynek szárai merőlegesek, **derékszögnek** nevezzük.

X.* axióma. Minden szöghöz hozzárendelhető egy nem negatív valós szám, amelyet a szög mértékszámának nevezünk. Ha a szögegység a fok, akkor a nullszöghöz a 0, az egyenesszöghöz 180 számot rendeljük. Adott, 0 és 180 közé eső mértékszám esetén bármely O kezdőpontú a_1 félegyeneshez a kijelölt nyílt félsíkban egy és csak egy olyan O kezdőpontú b_1 félegyenes található, hogy az $(a_1 b_1)\sphericalangle$ mértékszáma az adott mértékszám. Egybevágó szögek mértékszáma egyenlő. Bármely szöget a csúcsából kiinduló, szögtartományban haladó félegyenes két olyan szögre bont, amelyek mértékszámának összege az eredeti szög mértékszámával egyenlő.

Megjegyzés.

1. A szög mértékét megfogalmazó axióma állításai a X. axióma alapján, eléggé hosszadalmasan, igazolhatók.

2. Van rögzített szögegység, a fok. Jele: $^\circ$

3. Az egybevágóság szöget vele egyenlő mértékű szögbe visz át, ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy szögtartó leképezés.

4. A továbbiakban egybevágó szakaszok és szögek helyett egyenlőket is mondhatunk.

6.9. Értelmezés. Két szög közül azt tekintjük **nagyobb**nak, illetve **kisebb**nek, amelyikhez nagyobb, illetve kisebb mértékszám tartozik.

6.3. Következmény.

1. Két szögre az $=, >, <$, relációk közül egyszerre csak az egyik teljesül.

2. Ha két szög csúcsa közös, és az egyik tartalmazza a másikat, de nem egyenlő vele, akkor a tartalmazó szög a nagyobb.

3. Ha egy szöget a szög csúcsából kiinduló félegyenesekkel véges sok részre osztunk, akkor a részek mértékszámának összege az eredeti szög mértékszámával egyenlő.

Mindhárom állítás a valós számok tulajdonságainak és a X.* axiómának a segítségével, egyszerűen belátható.

6.4. Következmény. A derékszög mértékszáma 90°, a teljesszögé 360°.

Megjegyzés. A teljesszög 360-ad részének is tekinthetjük a szögegységet, a fokot. Az 1°60-ad része az 1 perc (1'), ennek a 60-ad része az 1 másodperc (1").

Ha az egyenesszöghöz a π valós számot rendeljük, akkor a szögmérés egysége a radián, de ennek bevezetésére ebben a felépítésben a kör tárgyalása után kerül sor.

6.10. Értelmezés.

Hegyesszög — a nullszögtől különböző, a derékszögnél kisebb szög.

Pótszögek — olyan két szög, melyek mértékszámának összege a derékszög mértékszámával egyenlő.

Kiegészítő szögek — két olyan szög, melyek mértékszámának összege az egyenesszög mértékével egyenlő.

Tompaszög — azon szög, melynek kiegészítő szöge hegyesszög.

Mellékszögek — két olyan szög melyeknek egyik szára egybeesik, a másik pedig ugyanannak az egyenesnek két különböző félegyenese. (Együtt egy egyenesszöget alkotnak — kiegészítő szögek.)

Konvex szög — mértékszáma az egyenesszög mértékszámánál nem nagyobb.

Konkáv szög — a nem egyenes konvex szög száraihoz tartozó másik szög. (Mértéke az egyenesszög és teljesszög mértéke között van.)

Csúcsszögek — olyan két szög, melyeknek szárai két metszőegyenes különböző félegyenesei.

6.11. Értelmezés. Félegyeneseket egyező irányúaknak nevezünk, ha párhuzamosak, és a kezdőpontjaikra illeszkedő egyenes által meghatározott ugyanazon félsíkban vannak, vagy egy egyenesre illeszkednek és az egyik tartalmazza a másikat.

Két félegyenest ellentétes irányúaknak nevezünk, ha párhuzamosak és a kezdőpontjaikra illeszkedő egyenes által meghatározott különböző félsíkokban vannak, vagy egy egyenesre illeszkednek és egyik sem tartalmazza a másikat.

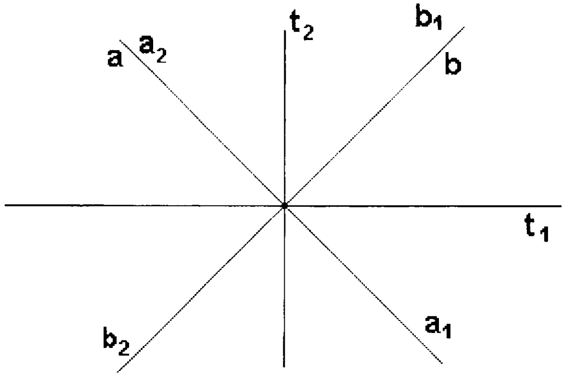
Ha két konvex szög szárai páronként egyirányúak, akkor azokat **egyállású szögek**nek nevezzük. **Váltószögek**en olyan konvex szögpárokat értünk amelyeknek szárai páronként ellentétes irányúak. **Társszögek**en olyan konvex szögpárokat értünk, amelyeknél az egyik pár szár egyező, a másik pár ellentétes irányú.

6.12. Értelmezés. A szöget meghatározó félegyenespárhoz tartozó szimmetriatengelyt a **szög felezőjének** nevezzük.

6.5. Következmény. Minden szögnek pontosan egy szögfelezője van.

6.2. Tétel. A csúcsszögek egyenlők.

BIZONYÍTÁS. A 9. ábra jelöléseit használva, az a, b egyenespárhoz az 5.12 tétel alapján két szimmetriatengely tartozik, t_1 és t_2.



9. ábra

$(a_1b_1)\sphericalangle = (b_2a_2)\sphericalangle$, mert a T_{t_2} a_1-t b_2-be, b_1-t a_2-be viszi át, s a két megfelelő félsík közös részét is a képek közös részébe viszi át. Hasonlóan belátható, hogy a másik csúcsszögpár, az $(a_2b_1)\sphericalangle, (b_2a_1)\sphericalangle$ is egybevágó, így mértékük egyenlő.

Megjegyzés. Két metsző egyenes négy konvex szöget határoz meg, s ezek közül 2-2 egyenlő (csúcsszögek).

Mivel $t_1 \perp t_2$, a centrális szimmetria értelmezése alapján a csúcsszögek a csúcspontra nézve tükrösek.

6.13. Értelmezés. Két metsző egyenes szögén a metszéspont által meghatározott félegyenesekhez tartozó nem tompaszöget értjük.

6.6. Következmény. A sík azon pontjainak mértani helye, amelyek a sík két metsző egyenesétől egyenlő távolságra vannak, az egyenesek szögfelezői.

A szögfelező értelmezése és az 5.13 tétel alapján igaz az állítás.

7. Eltolás, forgás

7.1. Értelmezés. Két egyállású egyenesre történő tükrözés szorzatát **eltolásnak** nevezzük. Jele: E. $E = (T_{t_2} \circ T_{t_1})$ (t_1 és t_2 a két egyállású egyenes).

7.1. Következmény. Az értelmezésből közvetlenül adódó tulajdonságok:

1. Kölcsönösen egyértelmű leképezés. Egybevágóság.

2. Ha a két tengely egybeesik, akkor az eltolás identitás. Létezik inverze: $E^{-1} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$.

3. Rendezéstartó, szakasz- és szögtartó transzformáció.

4. Legyen $t_1 \parallel t_2$, és $T_{t_1}(A) = A"$, $T_{t_2}(A") = A'$, ekkor az $A, A", A'$ pontok kollineárisak.

$\overline{A, A"}$ merőleges t_1-re, s ez 5.10 tétel miatt merőleges t_2-re is. $\overline{A", A'}$ merőleges t_2-re, s mivel $A"$-ből t_2-re csak egy merőleges állítható, ez egybeesik $\overline{A, A"}$-vel, s így $A, A", A'$ kollineáris.

5. A tengelyekre merőleges egyenesek invariánsak, s az ezen egyenesek által meghatározott félsíkok is invariánsak.

Legyen A, A' az előző pontban definiált pontpár. Az $\overline{A, A'}$ határegyenesű valamely félsíkban levő P pont P' képe az $\overline{A, A'}$-vel párhuzamos egyenesen van (az 5.10. tétel alapján), s így nem metszi a határegyenest; P' is P-vel azonos félsíkban van.

7.1. Tétel. Legyen az A pont képet a t_1, t_2 párhuzamos egyenesekre történő tükrözések szorzatánál A'. Az $\overline{A, A'}$ egyenes kitüntetett pontja legyen O. Ha $T_1 = \overline{A, A'} \cap t_1$, $T_2 = \overline{A, A'} \cap t_2$, x az A pont abszcisszája, és $2d(T_1, T_2) = \mid a \mid$, akkor az $(\overline{A, A'}, O)$ rendszerben az $x \mapsto x + a$ leképezés azonos a t_1, t_2 tengelyek által meghatározott eltolással.

BIZONYÍTÁS. Az $A", A', T_1, T_2$ pontok abszcisszái legyenek rendre $x"$, x', y_1, y_2. A T_1 az $[A, A"]$ felezési pontja, ezért a 6.5. értelmezés utáni megjegyzés alapján $y_1 - x = x" - y_1$, s ugyanígy $y_2 - x" = x' - y_2$. Átrendezve: $x" = 2y_1 - x$, $x' = 2y_2 - x" = 2y_2 - 2y_1 + x = 2(y_2 - y_1) + x$. Az $(\overline{A, A'}O)$ rendszerben az $x \mapsto 2(y_2 - y_1) + x$ hozzárendelés a tétel állításának megfelelő eltolás, mivel $\mid y_2 - y_1 \mid = d(T_1, T_2)$.

7.2. Következmény.

1. Ha a tükrözések sorrendjét felcseréljük, akkor az a előjele megváltozik. $x' = 2(y_1 - y_2) + x$.

2. Ha az $\overline{A, A'}$ egy rendezésében $T_1 < T_2$, akkor $A < A'$, de ha $T_2 < T_1$, akkor $A' < A$.

Ha ugyanis $T_1 < T_2$, akkor $x' = x + a = x + 2d(T_1, T_2)$, mert $y_2 - y_1 > 0$, s így A is megelőzi A'-t. (Ha $T_1 < T_2$, az O helyzetétől függetlenül az $y_2 - y_1$ mindig pozitív.)

Ha $T_1 > T_2$, akkor $x' = x + a = x - 2d(T_1, T_2)$, mert $y_2 - y_1 < 0$.

7.3. Következmény. Az előző tétel jelöléseit megtartva; egy A pontra és az $E = T_{t_2} \circ T_{t_1}$ eltolással kapott A' képére teljesül, hogy $\overline{A, A'}$ merőleges a tengelyekre, $d(A, A') = 2d(T_1, T_2)$, s ha $T_1 < T_2$, akkor $A < A'$.

7.4. Következmény. A tetszőleges A pontot A'-be ($A \neq A'$) vivő eltolás végtelen sok olyan párhuzamos egyenespárra történő tükrözéssel megvalósítható, melyek merőlegesek $\overline{A, A'}$-re, és ha az $\overline{A, A'}$-vel való metszéspontjuk T_1, T_2, akkor $2d(T_1, T_2) = d(A, A')$; ha $A < A'$, akkor $T_1 < T_2$, ha $A > A'$, akkor $T_1 > T_2$ is teljesül.

Az előző következményből adódik az állítás.

7.5. Következmény.

1. Az eltolásnak, ha nem azonosság, nincs fixpontja. Ha $E \neq I$, akkor $t_1 \neq t_2$, s így $d(T_1, T_2) \neq 0$. Ha lenne egy P fixpont, akkor $d(P, P') = 0 = 2d(T_1, T_2)$ — ez utóbbi viszont nem egyenlő nullával.

2. Az eltolás invariáns egyenesei párhuzamosak, s a tengelyekre merőleges egyeneseken kívül nincs más invariáns egyenese az eltolásnak.

A 7.1. következmény utolsó pontja alapján a tengelyekre merőleges egyenesek invariánsak, s egymással párhuzamosak. Ha létezne olyan invariáns egyenes, mely nem merőleges a tengelyekre, akkor ennek egy tetszőleges P pontjából a tengelyekre állított merőleges is invariáns egyenese lenne az eltolásnak. Mivel két invariáns egyenes metszéspontja fixpont, így P az eltolás fixpontja lenne, ami a következmény első része miatt lehetetlen.

7.6. Következmény. Tetszőleges e egyenes és eltolással kapott e' képe egyállású egyenespár.

Ha e merőleges a tengelyekre, akkor $e = e'$. Ha e nem merőleges a tengelyekre, akkor $e \parallel e'$. A második eset bizonyítása indirekt.

Tegyük fel, hogy létezik $e \cap e' = P$. Mivel $P \in e$, így $P' \in e'$. Az előző következmény miatt $P \neq P' (E \neq I)$. Ekkor viszont $\overline{P, P'} = e' = e$, ami azt jelenti, hogy e invariáns, így merőleges a tengelyekre, ami ellentmond a feltételnek.

7.2. Értelmezés. Ha egy eltolásnál A képe A', akkor a $\delta(A, A')$ irányt és az $A \leq A'$ rendezést az **eltolás irányának** a $d(A, A')$-t az **eltolás nagyságának** nevezzük.

7.7. Következmény. Az eltolást egy megfelelő pontpár egyértelműen meghatározza.

7.8. Következmény. Minden egyes eltoláshoz egyenlő hosszúságú, irányított szakaszok tartoznak. Az eltolás a sík irányított szakaszain osztályozást létesít: egy ekvivalenciaosztályba tartoznak az adott eltoláshoz tartozó szakaszok.

7.3. Értelmezés. Egy adott eltoláshoz tartozó irányított szakaszok ekvivalenciaosztályát **szabad vektornak** nevezzük. Jele: $\overrightarrow{AB}$, ahol A a vektor egy reprezentánsának kezdőpontja, B a végpontja. Az indentitást jellemző vektor, azaz amelynél $A = B$, a **nullvektor**.

7.9. Következmény. Minden ekvivalenciaosztályt reprezentáló vektor meghatároz egy eltolást.

7.2. Tétel. Két centrális szimmetria szorzata eltolás, és bármely eltolás előállítható két centrális szimmetria szorzataként.

BIZONYÍTÁS.

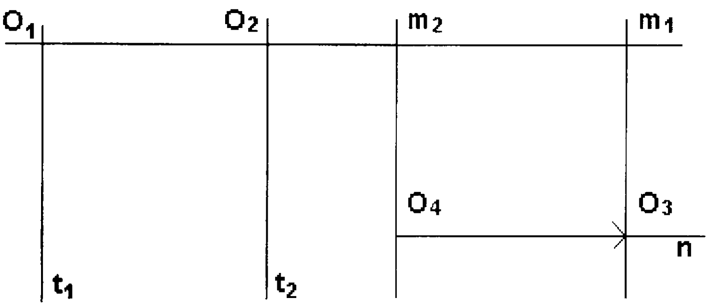
1. Az 5.15 tételből következik, hogy az O centrumu szimmetriát bármely olyan merőleges egyenespár, melynek metszéspontja O, egyértelműen meghatározza. Így az O_1, O_2 centrumu szimmetriáknál is tekinthetünk olyan tengelypárokat, melyeknek egyike a két centrumra illeszkedő egyenes, a másik pedig az erre merőleges, az egyes centrumokra illeszkedő egyenes. A tengelyek így $\overline{O_1, O_2} = e$ és $t_1(O_1 \in t_1)$, valamint $t_2(O_2 \in t_2)$ $T_{O2} \circ T_{O1} = (T_{t_1} \circ T_e) \circ (T_e \circ T_{t_2}) = T_{t_1} \circ T_e \circ T_e \circ T_{t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2} = E$.

2. Legyen $T_{t_1} \circ T_{t_2} = E$, $a \perp t_1$, valamint $a \cap t_1 = O_1$ és $a \cap t_2 = O_2$. $E = T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_2} \circ T_a \circ T_a \circ T_{t_1} = T_{O2} \circ T_{O1}$.

7.3. Tétel. Három különböző centrális tükrözés szorzata mindig helyettesíthető egyetlen centrális tükrözéssel.

BIZONYÍTÁS. Legyen a három centrum O_1, O_2, O_3. Az előző tétel szerint $T_{O2} \circ T_{O1} = E$, valamint $E = T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{m_2} \circ T_{m_1}$ (10. ábra), ahol t_2 és t_1 az O_2 és O_1-re illeszkedő, O_1, O_2-re merőleges egyenespár. m_1 az O_3-ra illeszkedő O_1, O_2-re állított merőleges, n az m_1-re O_3-ban állított merőleges. Az O_4 legyen az n egyenesnek olyan pontja, melyre $\underline{O_1O_2} = \underline{O_4O_3}$ O_4-ben az O_1, O_2-re merőleges egyenes legyen m_2.

Az előző tétel bizonyítása alapján $T_{m_2} \circ T_{m_1} = T_{0_3} \circ T_{0_4}$, azaz $T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_3} \circ T_{0_4}$. Szorozzunk balról T_{0_3}-mal $T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_3} \circ T_{0_3} \circ T_{0_4} = T_{0_4}$.



10. ábra

7.10. Következmény. Két eltolás szorzata mindig egyetlen eltolás.

$$E_2 \circ E_1 = T_{0_4} \circ T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_5} \circ T_{0_1} = E_3$$

7.11. Következmény. Véges számú eltolások szorzata egyetlen eltolással helyettesíthető.

7.12. Következmény. Háromnál több centrális tükrözés szorzata páros szám esetén eltolásra, páratlan szám esetén centrális tükrözésre vezethető vissza.

Ha páratlan számú centrális szimmetria szerepel, akkor előállítható $E \circ T_{0k}$ alakban, azaz felírható, hogy $T_{0i} \circ T_{0j} \circ T_{0k} = T_{0l}$.

7.13. Következmény. Három centrális tükrözés szorzatánál a tényezők sorrendje felcserélhető. $T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_4}$ — négyzetre emelve

$$(T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1})^2 = (T_{0_4})^2 = I$$

— mivel a leképezés négyzete identitás, a 2.3. tétel alapján megegyezik az inverzével, azaz

$$T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_1} \circ T_{0_2} \circ T_{0_3}.$$

7.4. Értelmezés. Ha a t_1 és t_2 tengelyek egy O pontban metszik egymást, akkor az $F = T_{t_2} \circ T_{t_1}$ tükrözések szorzatát **O pont körüli forgás**nak vagy **forgatás**nak nevezzük.

7.14. Következmény. Az értelmezésből adódó tulajdonságok:

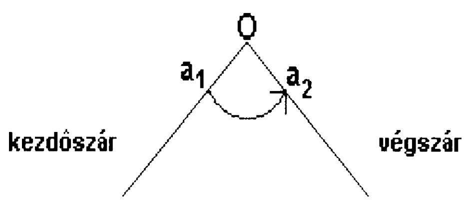
1. Kölcsönösen egyértelmű leképezés, egybevágóság.

2. Megengedve $t_1 = t_2$-t, a forgás azonosság. Az F inverze az $F^{-1} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$

3. A $t_1 \cap t_2 = O$ fixpont. Ha A képe A', akkor $d(O, A) = d(O, A')$.

4. Rendezéstartó, szakasz és szögtartó transzformáció.

7.5. Értelmezés. Ha egy szög szárainak a sorrendjét megadjuk, **irányított szögről** beszélünk. Jelölése:



11. ábra

Az irányított szög mértéke előjeles mennyiség, általában ha az ábrázolás során a kezdő és végszár sorrendje az óramutató járásával ellentétes irányú, akkor pozitív, ha megegyező, akkor negatív a szög mértéke. Két irányított szög mértéke akkor egyenlő, ha előjeles mértékük egyenlő. Ha n irányított szög ($n \geq 2$) összege abszolút értékben nagyobb mint 360°, akkor ez az összeg reprezentálható egy megfelelő irányú, 360°-nál kisebb szöggel.

Ha adott egy teljesszögnél kisebb irányított szög, akkor az reprezentálja az összes $\alpha = \alpha_1 + k360°$ szöget is, ahol α_1 a tekintett szög előjeles mértéke, s $k \in Z$. Ebben az esetben α_1-t szokás **forgásszögnek** is nevezni.

7.4. Tétel. Ha az O pont körüli forgás az O-ból kiinduló tetszőleges a_1 félegyenest az a_1' félegyenesbe viszi át, akkor, irányított szögeket tekintve, $(a_1 a_1')\sphericalangle = 2(t_1 t_2 \sphericalangle)$.

BIZONYÍTÁS. A szög nagyságára vonatkozó állítás bizonyításánál két lehetséges esetet vizsgálunk meg, (12.a. ábra) a gondolatmenet más esetekben is hasonló.

A tükrözés szögtartó, így $(a_1 t_1)\sphericalangle = (t_1 a_1'')\sphericalangle$ és $(a_1'' t_2)\sphericalangle = (t_2 a_1')\sphericalangle$. $(a_1 a_1')\sphericalangle = (a_1 t_1)\sphericalangle + (t_1 a_1''\sphericalangle \pm (a_1'' t_2)\sphericalangle \pm (t_2 a_1')\sphericalangle$. $(t_1 a_1''\sphericalangle \pm (a_1'' t_2)\sphericalangle = (t_1 t_2)\sphericalangle$. Az első egyenlőségsorozatot felhasználva: $(t_1 t_2)\sphericalangle = (a_1 t_1)\sphericalangle \pm (t_2 a_1')\sphericalangle$, így $(a_1 a_1')\sphericalangle = 2(t_1 t_2)\sphericalangle$.

Az irányra vonatkozó állítás igazolásánál tegyük fel, hogy $(t_1 t_2)\sphericalangle < 90°$, s az iránya negatív. (12. b, c ábra)

1. Az a_1 félegyenest a t_1, t_2 egyenesek által meghatározott hegyesszögtartomány tartalmazza. (12.b ábra) t_1, t_2 jelölje az a_1-t tartalmazó szög szárait, t_1', t_2' a tengelyek O kezdőpontú másik félegyeneseit, az a_1 egyenesének O kezdőpontú kiegészítő félegyenesét $\overline{a_1}$. Legyen: $T_{t_1}(t_2) = t_2^*, T_{t_1}(a_1) = a_1$".

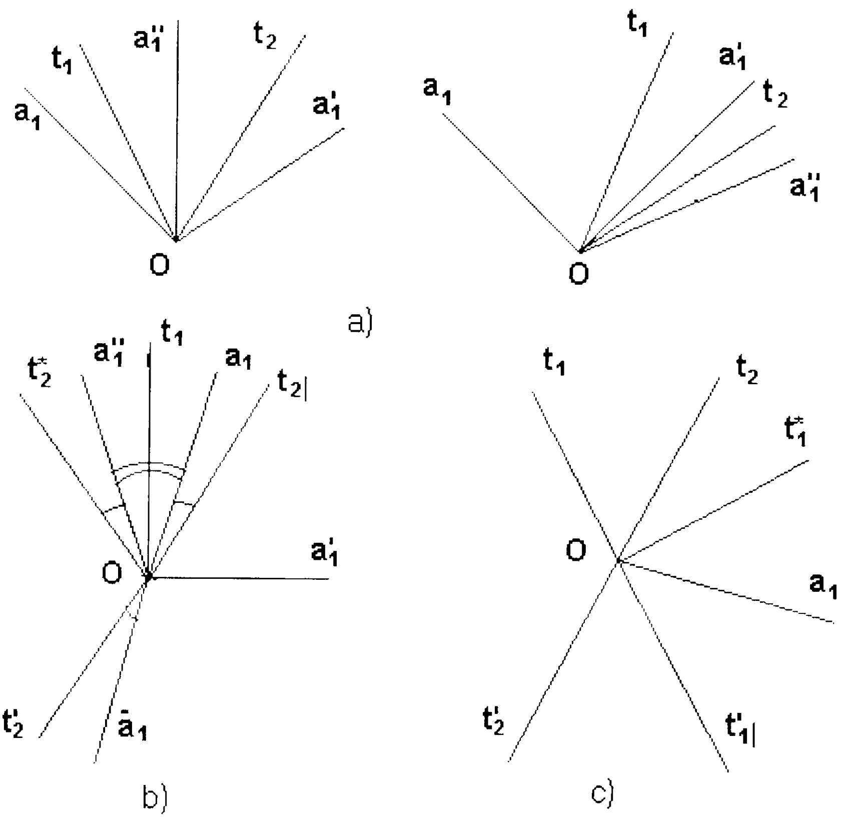
A tükrözés és a csúcsszögek egyenlősége miatt $(a_1 t_2)\sphericalangle = (t_2^* a_1")\sphericalangle = (t_2' \overline{a_1})\sphericalangle$. $(t_2^* t_2)\sphericalangle = 2(t_1 t_2)\sphericalangle$ és ez kisebb mint 180°. $(a_1" t_2')\sphericalangle > (a_1" t_2^*)\sphericalangle$, azaz $(a_1" t_2')\sphericalangle > (t_2' \overline{a_1})\sphericalangle$.

Az a_1"-nek a t_2 egyenesére való tükörképe, az a_1', a t_2 egyenese által meghatározott másik félsíkban van, mint a t_2^*, s az $a_1", a_1'$ azon szögtartományára, mely tartalmazza a t_2' félegyenest, teljesül, hogy $(a_1" a_1')\sphericalangle = 2(a_1" t_2')\sphericalangle = 2(a_1" t_2^*)\sphericalangle + 2(t_2^* t_2')\sphericalangle$. $(a_1" \overline{a_1})\sphericalangle = 2(a_1" t_2^*) + (t_2^* t_2')\sphericalangle$, ez az összeg viszont kisebb mint az $(a_1" \overline{a_1'})\sphericalangle$, s így az a_1' az a egyenes ugyanazon félsíkjában van mint a t_2. Így az $(a_1 a_1')\sphericalangle$ iránya is negatív.

2. Az a_1 félegyenest a t_1, t_2 egyenesek által meghatározott tompaszögtartomány tartalmazza. (12.c ábra)

Legyen $T_{t_2}(t_1) = t_1^*$. a_1 vagy a t_2, t_1^* félegyenesek, vagy a t_1^*, t_1' félegyenesek szögtartományában van. (A t_1, t_2' félegyenesek által bezárt tompaszögtartomány esetén a gondolatmenet hasonló lehet.) Mindkét szög iránya megyegyezik a $(t_1 t_2)\sphericalangle$ irányával. Az 1.-ben leírtak alapján viszont az $(a_1 a_1')\sphericalangle$ iránya azonos a $(t_2 t_1^*$, illetve a $t_1^* t_1')$ hegyesszögek irányával.

3. Ha $t_1 \perp t_2$, akkor az $(a_1 a_1')$ egyenesszög tartománya az a félsík, amely a tengelyeket tartalmazza, s ekkor az irányítás szintén egyenlő.



12. ábra

7.6. Értelmezés. Forgásnál a tengelyek szögének a kétszeresét a **forgás mértékének**, a tengelyek forgásszögének irányát a **forgás irányának** nevezzük.

Megjegyzés. A bizonyítás során nem használtuk ki a tengelyek helyzetét. A $(t_1t_2)\sphericalangle$ nem tompaszög, így $2(t_1t_2)\sphericalangle \leq 180°$. Az a_1 átvihető az a_1'-be $360° - 2(t_1t_2)$ szögű és ellentétes irányú forgással is. Forgásszögként egyenesszögnél nagyobb szög is megadható, de ez mindig helyettesíthető az azt $360°$-ra kiegészítő szögű és ellentétes irányú forgással. Gyakran hasznos, ha az elforgatás szöge alatt mindazokat az irányított szögeket értjük amelyeknek kezdőszára a_1, végszára a_1', tehát az $(a_1a_1')\sphericalangle + k360°$-t $(k \in Z)$. Az elforgatás szöge eszerint egy szöghalmaz, amelyet tetszőleges elemével reprezentálhatunk.

7.15. Következmény. Minden $F = T_{t_2} \circ T_{t_1}$ forgáshoz és $2(t_1t_2)\sphericalangle$-höz végtelen sok O-ra illeszkedő egyenespár tartozik, amelyekre történő tükrözéssorozat az F forgást eredményezi.

7.16. Következmény. A forgásnak, ha nem azonosság, csak egy fixpontja van, invariáns egyenese pedig csak akkor van, ha vagy azonosság, vagy a két tengely merőleges egymásra.

Ha A fixpont lenne, $(A \neq O)$ akkor az $(AOA')\sphericalangle = 0$, de $2(t_1t_2)\sphericalangle \neq 0$, s ez ellentmond a 7.4. tételnek.

Ha nincs fixpont, pontonként fix egyenes sincs.

Invariáns egyenes az azonosságnál és a $t_1 \perp t_2$ esetben létezik. Ha egy ezektől különböző forgásnak az $\overline{A, A'}$ invariáns egyenese lenne, akkor mivel $O \notin \overline{A, A'}$ és $d(O, A) = d(O, A')$, az $(AOA')\sphericalangle$ felezőjére tükrözve A képe A', így a szögfelező az $[A, A']$ felezőmerőlegese. Így az invariáns egyenes bármely pontpárja szimmetrikus lenne a felezőmerőlegesre, s ekkor annak $\overline{A, A'}$-vel való metszéspontja fixpont lenne.

7.17. Következmény. A forgást a fixpont, az elforgatás szöge és iránya egyértelműen meghatározza.

7.18. Következmény. A középpontos tükrözés speciális forgás, a forgás szöge $180°$.

8. A sík egybevágósági leképezései

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a sík egybevágósági leképezései hogyan állíthatók elő tengelyes szimmetriák szorzataként. Be fogjuk bizonyítani, hogy minden — egy α síkot önmagára leképező — egybevágóság vagy azonosság, vagy egy, vagy két, vagy három tengelyes szimmetria szorzata.

8.1. Tétel. Az α síkot önmagára leképező olyan F egybevágóság, amelynek van legalább három nem kollineáris fixpontja, azonosság.

BIZONYÍTÁS. Legyenek A_1, A_2, A_3 fixpontok, s tegyük fel, hogy $F \neq I$, azaz létezik olyan P pont, hogy $F(P) \neq P'$. F egybevágóság, így $d(P, A_1) = d(F(P), A_1)$, ami azt jelenti, hogy A_1 illeszkedik a $[P, F(P)]$ felezőmerőlegesére. Ez az A_2, A_3 pontokra is igaz, így A_1, A_2, A_3 kollineárisak, ami ellentmond a feltételnek.

8.2. Tétel. Minden olyan F egybevágóság, amely az α síkot önmagára képezi le és van legalább két különböző A_1, A_2 fixpontja, vagy azonosság, vagy $\overline{A_1, A_2}$ tenelyű tengelyes szimmetria.

BIZONYÍTÁS. Ha $F \neq I$, akkor van olyan $P \in \alpha$, hogy $F(P) \neq P$. Az előző tétel bizonyítása alapján A_1 és A_2 illeszkedik a $[P, F(P)]$ szakaszfelező merőlegesére, s így A_1, A_2, P nem kollineárisak. Legyen T_f az f szakaszfelező merőlegesre történő tükrözés. A $T_f \circ F$ leképezésnek A_1, A_2, P fixpontja, így a 8.1. tétel alapján $T_f \circ F = I$. Balról T_f-el megszorozva az előbbi egyenlőséget;

$$T_f \circ T_f \circ F = T_f \circ I, \quad \text{ebből} \quad F = T_f.$$

8.3. Tétel. Minden olyan az α síkot önmagára leképező egybevágóság, amelynek van legalább egy A fixpontja, vagy azonosság, vagy olyan tengelyes szimmetria, melynek tengelye tartalmazza A-t, vagy két, A-t tartalmazó tengelyű tengelyes szimmetria szorzata.

BIZONYÍTÁS. Ha $F \neq I$, akkor létezik olyan $Q \in \alpha$, hogy $F(Q) \neq Q$. Az előzőek alapján az $[F(Q), Q]$ m szakaszfelező merőlegese tartalmazza A-t. A és Q a $T_m \circ F$ leképezés különböző fixpontjai, így vagy $T_m \circ F = I$, amiből T_m-el balról szorozva $T_m \circ T_m \circ F = T_m \circ I$ innen $F = T_m$, vagy $T_m \circ F = T_f$, ahol $f = \overline{Q, A}$. T_m-el balról szorozva $T_m \circ T_m \circ F = T_m \circ T_f$, s így $F = T_m \circ T_f$.

8.4. Tétel. Minden olyan F egybevágóság, amely az α-t önmagára képezi le, legfeljebb három tengelyes szimmetria szorzataként áll elő.

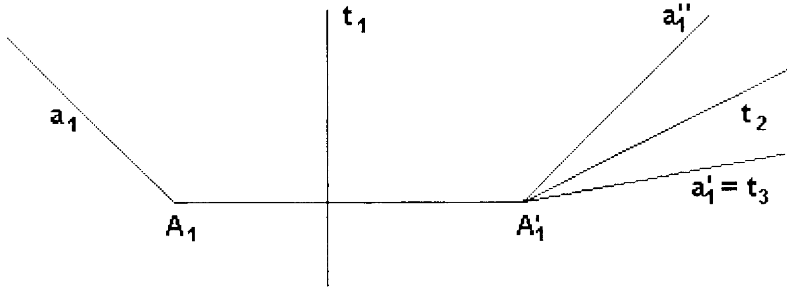
BIZONYÍTÁS. Ha $F \neq I$, akkor létezik $R \in \alpha$, hogy $R \neq F(R)$. Legyen g az $[R, F(R)]$ felező merőlegese. R a $T_g \circ F$ leképezés fixpontja. Az előző tétel alapján (a jelöléseket megtartva):
vagy $T_g \circ F = I$ ahonnan $F = T_g$,
vagy $T_g \circ F = T_m$ amelyből $F = T_g \circ T_m$,
vagy $T_g \circ F = T_m \circ T_f$ miből $F = T_g \circ T_m \circ T_f$,
(Mindhárom esetben balról szoroztunk T_g-vel, s így adódtak F-re az egyenlőségek.)

Megjegyzés. A sík önmagára történő egybevágósági leképezései: a tengelyes szimmetria; két tengelyre történő tükrözés szorzataként az identitás, az eltolás és forgás; valamint három tengelyes szimmetria szorzata.

A továbbiakban a bizonyítások során többször hivatkozunk majd a következő tételre.

8.5. Tétel. Létezik tengelyes tükrözéseknek olyan sorozata, amely egy adott kezdőpontú adott félegyenest, valamint ennek egyenese által meghatározott adott félsíkot egy adott kezdőpontú adott félegyenesbe és ezen utóbbi egyenese által meghatározott adott félsíkba visz át.

BIZONYÍTÁS. Az előzőek alapján ez maximum három tükrözéssel megvalósítható. (13. ábra)



13. ábra

A $T_{t_2} \circ T_{t_1}$, illetve ha szükséges, még a t_3-ra való tükrözés a kívánt leképezés.

8.1. Következmény. Ha két tükrözéssorrozat az α sík adott α_1 félsíkját és annak határán adott félegyenest az α sík egy adott α_2 félsíkjába és annak határán adott félegyenesbe visz át, akkor a két leképezés egyenlő.

A szakasz- és szögtartást fölhasználva az állítás egyszerűen igazolható.

8.6. Tétel. Három különböző egyenesre történő tengelyes tükrözés szorzata mindig helyettesíthető egy egyenesre történő tükrözés és egy eltolás szorzatával.

BIZONYÍTÁS. A három egyenes felvételének lehetőségei alapján a következő eseteket vizsgáljuk.

a.) $t_1 \parallel t_2 \parallel t_3$. Ekkor $T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} = E \circ T_t$. (14. a ábra)

b.) $t_1 \cap t_2 \cap t_3 = O$. Ekkor a $T_{t_2} \circ T_{t_1}$ forgás helyettesíthető a $T_{t3} \circ T_{t4}$ forgással, ahol $O \in t_4$ és $(t_4 t_3)\sphericalangle = (t_1 t_2)\sphericalangle$, valamint a forgásszögek iránya is megegyezik. Így

$$T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_3} \circ T_{t_3} \circ T_{t_4} = I \circ T_{t_3}$$

Itt az eltolás az indentitás. (14. b ábra)

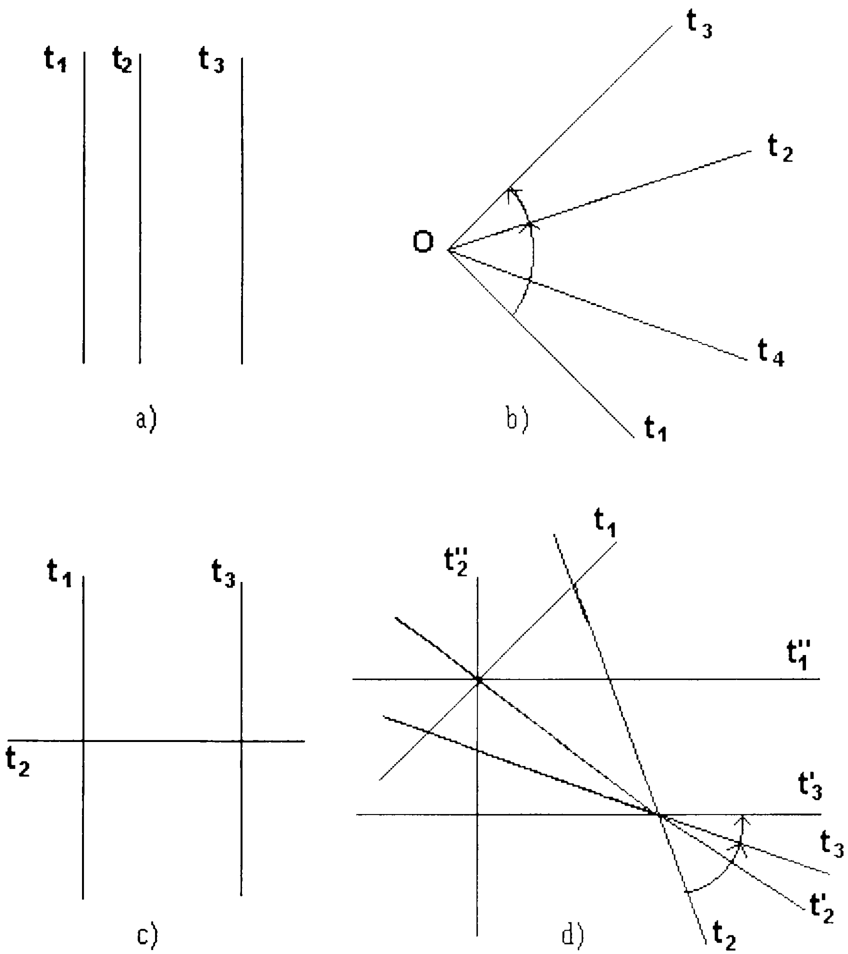
c.) $t_1 \perp t_2$ és $t_1 \parallel t_3$. Ekkor $T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t3} \circ T_{t_1} \circ T_{t_2} = E \circ T_{t_2}$ (14. c ábra)

d.) A három egyenes páronként metszi egymást. Megfelelő tengelyek választásával a c) esetre vezetjük vissza. (14. d ábra)

A t_2, t_3 tengelyekhez tartozó forgás helyettesíthető a t_2', t_3' tengelyekre vonatkozó forgással, ahol $t_2' \perp t_1$ és a forgásszögeik egyenlők. A $t_1 \perp t_2'$ tengelyekre történő tükrözés pedig megvalósítható a $t_1" \perp t_2"$ tengelyekre történő tükrözéssel, ahol még $t_2" \perp t_3'$ is teljesül. Így:

$$T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} == T_{t_3'} \circ T_{t_2'} \circ T_{t_1} = T_{t_3'} \circ T_{t_2"} \circ T_{t_1"}$$

s ez a c) esetnek felel meg.



14. ábra

Megjegyzés. A 7.4. következmény alkalmazásával igazolható, hogy az a) eset egy tengelyes tükrözéssel helyettesíthető, így jogos a következő értelmezés.

8.1. Értelmezés. Az egy egyenesre történő tükrözés és egy eltolás szorzatából előálló transzformációt **csúsztatva tükrözésnek** vagy **csúszó szimmetriának** nevezzük, ahol a tengely és az eltolás iránya egyállásúak.

Irodalom

[1] G. CHOQUET, Geometria, Mir (Moszkva), 1970.

[2] Dr. HAJÒS GYŐRGY, Bevezetés a geometriába, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1966.

[3] Dr. PELLE BÈLA, Geometria, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974.

[4] RADÒ FERENC—ORBÁN BÈLA, A geometria mai szemmel, *Dacia Könyvkiadó*, Kolozsvár, 1981.

[5] Dr. REDLINH ELEMÈR, Geometriai transzformációk, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1980.

[6] Dr. SZENDREI JÁNOS, Algebra és számelmélet, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974.

[7] VIGASSY LAJOS, Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1979.