Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban

LIPTAI KÁLMÁN*

Abstract. (On common terms of linear recurrences) In the paper we investigate the common terms of linear recurrences $G(2u_0, 1, 0, 1)$ and $R(2v_0, 1, 0, 1)$. We prove that these recurrences have finite common terms if $u_0 < v_0$ and $u_0 \neq 1$.

Legyen $F(C, D, F_0, F_1) = \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ az egész számok egy másodrendű lineáris rekurzív sorozata, melyet az F_0, F_1 kezdő elemekkel és az

$$F_n = CF_{n-1} + DF_{n-2} \quad (n > 1)$$

rekurzióval definiálunk, ahol C és D adott egész számok.

A továbbiakban előforduló másodrendű lineáris rekurzív sorozatokat hasonlóan definiáljuk.

Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ és $R = R(A, B, R_0, R_1)$ két másodrendű lineáris rekurzív sorozat, amelyeket ugyanazok az A, B konstansok definiálják. Jelöljük α és β-val a sorozatok

$$x^2 - Ax + B$$

definiáló polinomjának gyökeit, ahol nyilván feltehetjük, hogy $|\alpha| \geq |\beta|$.

A két sorozat közös elemeinek halmaza végtelen, ha G és R ekvivalens sorozatok (vagyis ha $G_{n+r} = R_{n+s}$ minden $n \geq 0$ egész esetén, valamely rögzített r és s természetes számok mellett). Nem ekvivalens sorozatok esetén Kiss Péter [3] bizonyította, hogy $|\beta| < 1$ esetén, nincs olyan közös elemük, amelyek indexei nagyobbak egy meghatározott konstanstól.

J. Binz [1] a $G(6, 1, 0, 1)$ és az $R(10, 1, 0, 1)$ sorozatokról bebizonyította, hogy csak egy közös elemük létezik. A bizonyításban felhasználta a másodrendű rekurzív sorozatok és a Pell egyenletek kapcsolatát, többek között Edgar I. Emerson [2] azon eredményét, miszerint az

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

* A kutatást a Kereskedelmi Bank Rt. Universitas Alapítványa támogatta.

egyenlet x, y megoldásai másodrendű lineáris rekurziónak tesznek eleget. Ebben a cikkben J. Binz [1] eredményeit általánosítjuk Thue egy tétele segítségével.

Tétel. A $G(2u_0, 1, 0, 1)$ és az $R(2v_0, 1, 0, 1)$ másodrendű rekuzív sorozatoknak, ahol $u_0 < v_0$ pozitív egészek és $u_0 \neq 1$, véges sok közös tagja van.

A tételünk bizonyításában szükségünk lesz az $x^2 + Dy^2 = z^2$, ahol $D \geq 1$, egy rögzített pozitív egész, diofantikus egyenlet primitív megoldásaira. Akkor mondjuk, hogy egy x, y, z pozitív egész számhármas primitív megoldás, ha $(x, y, z) = 1$, vagyis ha x, y, z relatív prímek.

A következőkben egy p prímszám esetén $p_k \parallel D$ azt jelenti, hogy $p^k \mid D$, de $p^{k+1} \nmid D$. Négyzetmentes D esetén Nishi, Akiro [6] megadta az egyenlet megoldásainak explicit alakját. Az alábbiakban tetszőleges d-re általánosítjuk az eredményt.

Lemma. Legyen D egy pozitív egész szám. Irjuk fel D-t $D = d^2 d_1 d_2 = = d^2 D_1$ alakban, ahol $(d_1, d_2) = 1$. Továbbá $8 \mid D_1$ esetén legyen $D_1 = 4D_1' = = 4d_1' d_2'$. Az
$$x^2 + Dy^2 = z^2$$
egyenlet primitív megoldásait a következő kifejezések szolgáltatják: ha $2 \parallel D_1$ vagy $4 \parallel D_1$ akkor

$$\begin{aligned} x &= d(d_1 u^2 - d_2 v^2), \\ y &= 2uv \\ z &= d(d_1 u^2 + d_2 v^2), \end{aligned} \tag{1}$$

ha $8 \mid D_1$, akkor (1) alakúak vagy

$$\begin{aligned} x &= d(d_1' u^2 - d_2' v^2), \\ y &= uv \\ z &= d(d_1' u^2 + d_2' v^2), \end{aligned} \tag{2}$$

ha D_1 páratlan, akkor (1) alakúak vagy

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} d(d_1 u^2 - d_2 v^2), \\ y &= uv \\ z &= \frac{1}{2} d(d_1 u^2 + d_2 v^2), \end{aligned} \tag{3}$$

ahol d, d_1, d_2, d'_1, d'_2 befutja a D felbontásában szereplő összes lehetséges értéket és u, v tetszőleges egészek, melyekre $(u, v) = 1$, $(d_1 u, d_2 v) = 1$, $(d, u) = 1$, $(d, v) = 1$ teljesül, továbbá

(1) típusú megoldásoknál $d_1 u$ és $d_2 v$ különböző paritású, d páratlan;

(2) típusú megoldásoknál u, v páratlanok, és

$$(d'_1, d'_2) = 1\,,\ (d'_1 u, d'_2 v) = 1\,;$$

(3) típusú megoldásoknál u, v páratlan.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az

$$x^2 + Dy^2 = z^2 \tag{4}$$

egyenletet. Elegendő olyan megoldásokat keresnünk, melyekre $(x, y, z) = 1$. Ha ugyanis $(x, y, z) = 1$, akkor $d_0 x, d_0 y, d_0 z$ is megoldás, ahol d_0 pozitív egész. Ha pedig $(x, y, z) = d' > 1$ egy megoldás, akkor $\frac{x}{d'}, \frac{y}{d'}, \frac{z}{d'}$ is megoldás.

További egyszerűsítést jelent, ha csak azokat a megoldásokat keressük meg, melyekre $(x, z) = 1$, ugyanis ha $(x, z) = d$ és $d \neq 1$, akkor x és z alakja $x = x_1 d$ és $z = z_1 d$, ahol $(z_1, x_1) = 1$, így a (4) egyenlet

$$(z_1 d)^2 + Dy^2 = (dz_1)^2$$

alakba írható. A megoldások primitívsége miatt $x_1 d, y, z_1 d$ relatív prímek, ezért $d^2 \mid D$ vagyis D alakja $D = d^2 D_1$. Így az egyenlet visszavezethető az

$$x^2 + D_1 y^2 = z^2 \tag{5}$$

egyenletre, melynek $(x, z) = 1$ feltételt kielégítő megoldásait kell keresnünk.

A fentiek miatt a továbbiakban az (5) egyenlettel foglalkozunk.

Először azon megoldásokat keressük, melyekben y páros.

Ekkor x, z nyilván páratlan és (5)-ből

$$D_1\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$$

következik, ahol $\frac{z+x}{2}$ és $\frac{z-x}{2}$ relatív prímek, hiszen összegük és különbségük (azaz z és x) relatív prímek.

Így $D_1 | \frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$-ből $d_1 | \frac{z+x}{2}$ és $d_2 | \frac{z-x}{2}$ következik, ahol $d_1 d_2 = D_1$ és $(d_1, d_2) = 1$ és (5) alakja

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2d_1}\frac{z-x}{2d_2}. \tag{6}$$

Abból, hogy $\left(\frac{x+z}{2}, \frac{z-x}{2}\right) = 1$, következik, hogy

$$\left(\frac{z+x}{2d_1}, \frac{z-x}{2d_2}\right) = 1.$$

Ekkor a (6) egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

$$\frac{x+z}{2d_1} = u^2 \quad \text{és} \quad \frac{z-x}{2d_2} = v^2,$$

ahol u, v pozitív egészek. Ebből

$$\begin{aligned} z &= d_1u^2 + d_2v^2, \\ x &= d_1u^2 - d_2v^2, \\ y &= 2uv \end{aligned}$$

adódik. Ezek után a (4) egyenlet x_0, y_0, z_0 azon megoldásai, melyekben y_0 páros, a következők:

$$\begin{aligned} x_0 &= d(d_1u^2 - d_2v^2), \\ y_0 &= 2uv, \\ z_0 &= d(d_1u^2 + d_2v^2), \end{aligned}$$

ahol $d^2d_1d_2 = D$ és $(d_1, d_2) = 1$.

Könnyű belátni, hogy ezek a megoldások primitívek, ha $(u, v) = 1$, $(d, u) = (d, v) = 1$, $(d_1u, d_2v) = 1$ és d_1u, d_2v különböző paritásúak. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy D minden $D = d^2d_1d_2$ alakú felbontása esetén x_0, y_0, z_0 megoldása (4)-nek.

A következőkben azon megoldásokat keressük, melyekben y páratlan. Legyen $2 \parallel D_1$. Ekkor, mivel D_1y^2 páros, x és z paritásának meg kell egyezni. Az $(x, z) = 1$ feltétel miatt x és z páratlan. Ebben az esetben

$$x^2 + D_1y^2 \equiv 3 \pmod 4,$$

és

$$z^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

tehát ebben az esetben y páratlan megoldás nem létezik.

Legyen $4 \parallel D_1$. Ekkor D_1 alakja $D_1 = 4k$, ahol k páratlan. Az (5) egyenlet a következő alakra hozható:

$$ky^2 = \frac{(x+z)(z-x)}{4}.$$

Mivel x és z most is páratlan, $z+x$ és $z-x$ közül az egyik osztható 4-el és mindkettő páros, így $2 \mid ky$, ami lehetetlen, mert k és y páratlan. Tehát ebben az esetben sincs primitív megoldása (5)-nek.

Ha $8 \mid D_1$, akkor D_1 alakja $D_1 = 4D_1'$, ahol D_1' páros. Az (5) egyenletet írjuk a következő alakba:

$$x^2 + D_1'(2y)^2 = z^2.$$

Ezen egyenlet megoldásai az előzőek miatt

$$\begin{aligned} x &= d_1'u^2 - d_2'v^2, \\ 2y &= 2uv, \\ z &= d_1'u^2 + d_2'v^2, \end{aligned}$$

ahol

$$d_1'd_2' = D_1'.$$

Így $y = uv$, amely páratlan, ha u, v páratlan. Ekkor tehát a megoldások (2) típusúak. A tételbeli feltételek mellett $(x, y, z) = 1$ is teljesül.

Most tekintsük a D_1 páratlan esetet.
Ekkor $D_1 y^2$ páratlan és x, y paritása különböző.
Az előzőekhez hasonlóan (5)-ből

$$y^2 = \frac{z+x}{d_1}\frac{z-x}{d_2}$$

adódik, ahol d_1, d_2 jelentése a szokásos. Könnyen belátható, hogy $\frac{z+x}{d_1}$ $\frac{z-x}{d_2}$ relatív prímek, és ezért

$$\frac{x+z}{d_1} = u^2 \quad \text{és} \quad \frac{z-x}{d_2} = v^2$$

adódik, ahol u, v páratlan és $(u, v) = 1$. Ekkor (5)-re

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(d_1u^2 + d_2v^2), \\ x &= \frac{1}{2}(d_1u^2 - d_2v^2) \\ y &= uv \end{aligned} \tag{7}$$

megoldások adódnak, amiből a (4) egyenletre megkapjuk a tételbeli (3) típusú megoldásokat, melyek a feltételek mellett primitívek. Megjegyezzük, hogy (7)-ben x páros és z páratlan, illetve fordítva, aszerint, hogy D_1 alakja $4k+1$, illetve $4k+3$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A Tétel bizonyítása. Tekintsük a $G(2u_0,1,0,1)$ másodrendű rekurzív sorozatot, amely $x_2-2u_0x+1=0$ karakterisztikus egyenletének gyökei α_u, β_u, illetve az $R(2v_0,1,0,1)$ sorozatot, amely karakterisztikus egyenletének gyökei α_v,β_v. Jól ismert, hogy ekkor a tagok explicit alakja

$$G_n=\frac{\alpha_u^n-\beta_u^n}{\alpha_u-\beta_u}\quad\text{illetve,}\quad R_n=\frac{\alpha_v^n-\beta_v^n}{\alpha_v-\beta_v}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\alpha_u-\beta_u=2\sqrt{u_0^2-1}=2\sqrt{D_u},$$

és

$$\alpha_v-\beta_v=2\sqrt{v_0^2-1}=2\sqrt{D_v}.$$

Belátjuk, hogy $y=G_n$, illetve $y=R_n$ valamely x-el, illetve z-vel az

$$(8)\qquad x^2-d_uy^2=1,\quad\text{illetve}\quad z^2-d_vy^2=1$$

egyenlet megoldásai.

Csak G_n-re bizonyítjuk, R_n-re a bizonyítás hasonló.

$$G_u=\frac{1}{2\sqrt{D_u}}(\alpha_u^n-\beta_u^n)$$

miatt,

$$\begin{aligned}1+D_uy^2&=1+D_uG_u^2=1+D_u\frac{1}{4D_u}\left(\alpha^{2n}-2\beta_u^n\beta_u^n+\beta_u^{2n}\right)=\\&=1+\left(\frac{\alpha_u^n}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{\alpha_u^n}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha_u^n}{2}+\frac{\beta_u^n}{2}\right)^2=x^2,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\alpha_u\beta_u=1$. A binomiális tétel segítségével — felhasználva α_u,β_u alakját — igazolható, hogy

$$x=\left(\frac{\alpha_u^n}{2}+\frac{\beta_u^n}{2}\right)$$

egész.

Ha van közös eleme a két sorozatnak, akkor az előzőek miatt

$$(9) \qquad x^2 - D_u y^2 = z^2 - D_v y^2 \quad (= 1)$$

valamely x, y, z pozitív egészekre, melyekre $(x, y, z) = 1$, és ebből

$$x^2 + (D_v - D_u) y^2 = z^2$$

következik.

Bevezetve a $D = D_v - D_u = (v_0^2 - u_0^2)$ jelölést a

$$(10) \qquad x^2 + D y^2 = z^2$$

egyenletet kapjuk (ahol $D > 0$), melynek a fentiek miatt x, y, z egy primitív megoldása.

A (10) egyenlet primitív megoldásait meghatároztuk a Lemmában. Nyilvánvaló, hogy ezen primitív megoldásokból kerülnek ki az

$$(11) \qquad x^2 - D_u y^2 = 1$$

egyenlet megoldásai is.

A (10) egyenlet megoldásai 3 típusba sorolhatók, ezek felhasználásával (11) a következőképpen alakul:

(1) típusnál

$$\left(d(d_1 u^2 - d_2 v^2)\right)^2 - D_u 4u^2 v^2 = 1.$$

Négyzetreemelés, és a $D_u = u_0^2 - 1$ helyettesítés elvégzése után

$$d^2 d_1^2 u^4 - (2d^2 d_1 d_2 + 4u_0^2 - 4) u^2 v^2 + d^2 d_2^2 v^4 = 1,$$

mivel $d^2 d_1 d_2 = D = v_0^2 - u_0^2$,

$$(11) \qquad d^2 d_1^2 u^4 - (2v_0^2 + 2u_2^2 - 4) u^2 v^2 + d^2 d_2^2 v^4 = 1$$

adódik.

Hasonló módon a (2) típusú megoldás esetén

$$(12) \qquad d^2 {d'_1}^2 u^4 - (2v_0^2 - u_0^2 - 1) u^2 v^2 + d^2 {d'_2}^2 v^4 = 1,$$

illetve a (3) típusnál a

$$(13) \qquad d^2 d_1^2 u^4 - (2v_0^2 + 2u_0^2 - 4) u^2 v^2 + d^2 d_2^2 v^4 = 4$$

egyenlet adódik.

Thue egy ismert tétele szerint az

$$f(x,y) = ax^4 + bx^3 + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = m,$$

egyenletnek, ahol a, b, c, d, e egész számok, csak véges sok x, y egész megoldása van, ha $f(x,y)$ nem teljes négyzet (lásd. pl. [5], 235. oldal).

A (11), (12), (13) egyenletnek véges sok u, v egész megoldása van, ha a bal oldal nem teljes négyzet. Ez akkor igaz, ha

$$2v_0^2 - u_0^2 - 1 \neq 2d^2d_1'd_2' = 2D = 2(v_0^2 - u_0^2), \tag{14}$$

illetve

$$2v_0^2 + 2u_0^2 - 4 \neq 2d^2d_1d_2 = 2D = 2(v_0^2 - u_0^2) \tag{15}$$

teljesül

A (14), (15) feltételek pedig teljesülnek, ha $u_0 \neq 1$, amit viszont a tételben kikötöttünk.

Ebből következik, hogy a (9) egyenletnek csak véges számú x, y, z megoldása van és így a két sorozatnak csak véges számú közös eleme lehet.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a tételben $u_0 \neq 1$ feltétel szükséges. Ugyanis, ha $u_0 = 1$, akkor a $G(2,1,0,1)$ sorozat azonos a temrészetes számok sorozatával, és így minden sorozattal végtelen sok közös eleme van.

Megjegyezzük még, hogy Kiss Péter [4] bizonyos rekurzív sorozatokra hasonló eredményeket nyert, ő az algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira adott becsléseket használta fel a bizonyításban.

Irodalom

[1] J. BINZ, Aufgabe 832, *Elemsente Math.*, **35** (1980), 155.

[2] EDGAR I. EMERSON, Recurrent sequences in the equation $DQ^2 = R^2 + N$, *Fibonacci Quart.*, **7** No3. (1969), 231–242.

[3] P. KISS: Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban. *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **16** (1982), 539—546.

[4] P. KISS, On common terms of linear recurrences, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **40** (1982), 119–123.

[5] L. J. MORDELL, Diophantine Equations, *Academic Press*, (1969)

[6] NISHI, AKIRO, A method for solving a diophantine equation $ax^2 + y^2 = z^2$, *J. Fac. Educ., Saga Univ.*, **36** No. 2/II., (1989), 25–29.