Egy rekurzív sorozat tagjainak átlagáról

TÓMÁCS TIBOR

Abstract. (Avarage order of the terms of a recursive sequence) For a fixed positive integer $k \geq 2$ let the sequence $G_k(n)$ of natural numbers be defined by $G_k(0) = 0$ and $G_k(n) = n - G_k(G_k(\ldots(G_k(n-1))\ldots))$, $(n \geq 1)$ with k iterations of G_k on the right-hand side. Denote by $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ the roots of the characteristic polynomial $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ of the generalized Fibonacci sequence b_n. It is known that these roots are distinct and that there is a positive root among them with the greatest modulus, thus we can suppose that $\alpha > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \cdots \geq |\alpha_k| > 0$ (see e. g. [1]). In [2] P. Kiss proved that for any positive integer n, large enough, and $k \geq 2$ we have $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = v_1 N + v_2\alpha_2^n + v_3\alpha_3^n + o(\alpha_2^n) + O(1)$, where $N = b_{n+1}$ and v_1, v_2, v_3 are constants depending only on k. In this paper we generalize this result.

Legyen $k \geq 2$ rögzített egész szám. Definiáljuk a természetes számok egy $G_k(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sorozatát a $G_k(0) = 0$ kezdő elemmel és a

$$G_k(n) = n - G_k(G_k(\ldots(G_k(n-1))\ldots))$$

rekurzív formulával $n > 0$ esetre, ahol a jobb oldalon G_k-nak k-szoros iterációja van. Belátható, hogy a sorozat minden tagja jól definiált természetes szám (lásd Zay B. [4]).

Legyen

$$b_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n = 1, 2, \ldots, k, \\ b_{n-1} + b_{n-k}, & \text{ha } n > k \end{cases}$$

a Fibonacci sorozat k-adrendű általánosított sorozata. Egy m pozitív egész esetén tekintsük azt a legnagyobb i_1 egész számot, melyre $b_{i_1} \leq m$ teljesül. Legyen $m_1 = m - b_{i_1}$. Ha $m_1 \neq 0$, válasszuk a legnagyobb i_2 egész számot, melyre $b_{i_2} \leq m_1$. Legyen $m_2 = m_1 - b_{i_2}$. Ha $m_2 \neq 0$, folytassuk az eljárást. Így minden pozitív egész szám egyértelműen felírható b_n sorozatbeli elemek összegeként

$$m = \sum_{i=1}^{j} a_i b_i \tag{1}$$

alakban, ahol $a_i = 1$ vagy 0. Jelöljük ezt röviden

$$m = a_j a_{j-1} \dots a_1$$

módon. Definiáljuk a $T_k(m)$ sorozatot $T_k(0) = T_k(1) = 0$ kezdő értékkel és a

$$(2) \qquad T_k(m) = a_j a_{j-1} \dots a_2 = \sum_{i=2}^{j} a_i b_{i-1} \quad (m > 1)$$

formulával, ahol az a_i számok m-nek (1)-ben difiniált előállításában szereplő együtthatói.

A $G_k(n)$ és $T_k(n)$ sorozatok szoros kapcsolatban vannak egymással, D. S. Meek és G. H. J. Van Rees [3]-ban bizonyították, hogy

$$(3) \qquad G_k(n) = T_k(n-1) + 1 \quad (n \geq 1).$$

Jelöljük $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$-val a b_n sorozat karakterisztikus polinomjának — az $x^k - x^{k-1} - 1$ polinomnak — a gyökeit. Ismert, hogy van a gyökök között egy legnagyobb abszolút értékű pozitív valós gyök, ezért feltehetjük, hogy

$$(4) \qquad \alpha > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots \geq |\alpha_k| > 0,$$

ahol $\alpha > 1$ valós szám (lásd K. Dilcher [1]).

Kiss Péter [2]-ben a $G_k(n)$ sorozat tagjainak átlagát vizsgálta, és bizonyította, hogy elég nagy n egészek esetén

$$(5) \qquad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} G_k(i) = v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + o(\alpha_2^n) + O(1),$$

ahol $N = b_{n+1}$ és a v_1, v_2, v_3 csak k-tól függő valós konstansok.

Ezen dolgozat célja megmutatni, hogy nemcsak $N = b_{n+1}$ alakú egészek esetén igaz az (5) formula.

A következő tételeket bizonyítjuk:

1. Tétel. Legyenek $k \geq 2$ és t rögzített pozitív egészek. Ekkor elég nagy pozitív n egészek esetén

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n) \right) \frac{1}{1 + o(1)},$$

ahol $N = b_{n+1} + t$ és a v_1, v_2, v_3 csak k-tól függő konstansok.

2. Tétel. Legyenek $k \geq 2$ és $t \geq k$ rögzített egészek. Ekkor elég nagy pozitív n egészek esetén

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(v_1' N + v_2'\alpha_2^n + v_3'\alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n)\right)\frac{1}{1+o(1)},$$

ahol $N = b_{n+1} + b_{n-t+1}$, és a v_1', v_2', v_3' csak k-tól és t-től függő konstansok.

Megjegyzés. Az 1. tételben a v_1, v_2, v_3 konstansok megegyeznek az (5)-ben található konstansokkal.

1. Tétel bizonyítása. Vizsgáljuk a $\sum_{i=1}^{N} G_k(i)$ összeget. Bontsuk fel két tagra az alábbi módon.

$$\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \sum_{i=1}^{b_{n+1}} G_k(i) + \sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) \tag{6}$$

Az első összeg [2] szerint

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{b_{n+1}} G_k(i) &= r_1\alpha^{2n} + r_2\alpha^n\alpha_3^n + r_3\alpha^n\alpha_3^n + r_4\alpha_2^{2n} + \\ &+ r_5\alpha_3^{2n} + r_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n)\end{aligned} \tag{7}$$

alakban írható fel, ahol $r_i \quad (i = 1,2,3,4,5,6) \quad k$-tól függő konstansok. (3)-ból

$$\begin{aligned}\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) &= T_k(b_{n+1}) + 1 + T_k(b_{n+1}+1) + 1 + \cdots + T_k(N-1) + 1 = \\ &= N - b_{n+1} + \sum_{i=b_{n+1}}^{N-1} T_k(i) = t + \sum_{i=b_{n+1}}^{b_{n+1}+t-1} T_k(i)\end{aligned}$$

következik. Elég nagy n esetén teljesül, hogy $t < b_{n-k+2}$, ezért $N < b_{n+2}$. Így $T_k(i)$ definiciója miatt minden $b_{n+1} \leq i \leq b_{n+1} + t - 1$ egész esetén $T_k(i) = b_n + T_k(i - b_{n+1})$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = t + tb_n + \sum_{i=0}^{t-1} T_k(i).$$

Ebben az összegben az n-től független tagok összegét jelöljük $f_{k,t}$-vel. Tehát

$$f_{k,t} := t + \sum_{i=0}^{t-1} T_k(i).$$

Ismert, hogy a b_n sorozat tagjai felírhatók

$$b_n = c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n \tag{8}$$

alakban, ahol $c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ csak k-tól függő komplex konstansok (K. Dilcher [1]).

Ezért

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = f_{k,t} + t(c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n).$$

Az $\alpha > 1$ valós szám, másrészt (4) miatt

$$\begin{aligned} f_{k,t} + t(c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n) &\le f_{k,t}\alpha^n + tc_1\alpha^n + tc_2\alpha_2^n + \cdots + tc_k\alpha_k^n \le \\ &\le (f_{k,t} + tc_1 + tc_2 + \cdots + tc_k)\alpha^n. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = O(\alpha^n). \tag{9}$$

(6), (7) és (9)-ből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} G_k(i) = {} & r_1\alpha^{2n} + r_2\alpha^n\alpha_2^n + r_3\alpha^n\alpha_3^n + r_4\alpha_2^{2n} + \\ & + r_5\alpha_3^{2n} + r_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n), \end{aligned} \tag{10}$$

továbbá (8)-ból

$$N = b_{n+1} + t = s_1\alpha^n + s_2\alpha_2^n + \cdots + s_k\alpha_k^n + t = s_1\alpha^n + O(\alpha_2^n) + t, \tag{11}$$

ahol $s_i = c_i\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$. Felhasználva (11)-et

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_k(i)}{s_1\alpha^n + O(\alpha_2^n) + t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_k(i)}{s_1\alpha^n\left(1 + \frac{O(\alpha_2^n)+t}{s_1\alpha^n}\right)} + \frac{\sum_{i=1}^{N} G_k(i)}{s_1\alpha^n\,(1 + o(1))}$$

adódik, amiből (10) alapján kapjuk az

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(p_1\alpha^n + p_2\alpha_2^n + p_3\alpha_3^n + p_4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n \alpha_2^n + p_5\left(\frac{\alpha_3}{\alpha}\right)^n \alpha_3^n + \right.$$

(12)

$$\left. + p_6\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha}\right)^n + O\left(\alpha_4^n\right) + O(1)\right)\frac{1}{1+o(1)}$$

becslést, ahol $p_i = \frac{r_i}{s_1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. De

$$p_1\alpha^n = (s_1\alpha^n + s_2\alpha_2^n + \cdots + s_k\alpha_k^n + t)\frac{p_1}{s_1} - \frac{p_1}{s_1}s_2\alpha_2^n -$$
$$- \frac{p_1}{s_1}s_3\alpha_3^n - \cdots - \frac{p_1}{s_1}s_k\alpha_k^n - \frac{p_1}{s_1}t.$$

Mivel $s_1\alpha^n + s_2\alpha_2^n + \cdots + s_k\alpha_k^n + t = N$, továbbá (4) miatt

$$-\frac{p_1}{s_1}s_4\alpha_4^n - \frac{p_1}{s_1}s_5\alpha_5^n - \cdots - \frac{p_1}{s_1}s_k\alpha_k^n = O(\alpha_4^n),$$

és

$$-\frac{p_1}{s_1}t = O(1),$$

így $v_1 := \frac{p_1}{s_1}$, $d_2 := -\frac{p_1}{s_1}s_2$, $d_3 := -\frac{p_1}{s_1}s_3$ jelöléssel

(13) $$p_1\alpha^n = v_1 N + d_2\alpha_2^n + d_3\alpha_3^n + O(\alpha_4^n) + O(1)$$

adódik.Tudjuk még, hogy

(14) $$p_4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n \alpha_2^n + p_5\left(\frac{\alpha_3}{\alpha}\right)^n \alpha_3^n + p_6\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha}\right)^n + O\left(\alpha_4^n\right) = o\left(\alpha_2^n\right).$$

Ezért (12), (13) és (14) alapján

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(v_1 N + v_2\alpha_2^n + v_3\alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n)\right)\frac{1}{1+o(1)},$$

ami a tételünket bizonyítja. A bizonyítás során a konstansok értékét nem befolyásolta t, így valóban igaz a megjegyzés állítása is.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. (1), (2), (3) és (7) alapján

$$\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \sum_{i=1}^{b_{n+1}-1} T_k(i) + N + b_{n-t+1}b_n + \sum_{i=1}^{b_{n-t+1}-1} T_k(i) =$$
$$= x_1\alpha^{2n} + x_2\alpha^n\alpha_2^n + x_3\alpha^n\alpha_3^n + x_4\alpha_2^{2n} + x_5\alpha_3^{2n} +$$
$$+ x_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n) + N + b_n b_{n-t+1},$$

ahol

$$x_i = r_i\left(1 + \frac{1}{\alpha^t\alpha_i^t}\right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad x_4 = r_4\left(1 + \frac{1}{\alpha_2^{2t}}\right),$$
$$x_5 = r_5\left(1 + \frac{1}{\alpha_3^{2t}}\right) \quad \text{és} \quad x_6 = r_6\left(1 + \frac{1}{\alpha_2^t\alpha_3^t}\right).$$

A továbbiakban

$$b_n b_{n-t+1} = (c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n)\left(\frac{s_1}{\alpha^t}\alpha^n + \frac{s_2}{\alpha_2^t}\alpha_2^n + \dots + \frac{s_k}{\alpha_k^t}\alpha_k^n\right) =$$
$$= z_1\alpha^{2n} + z_2\alpha^n\alpha_2^n + z_3\alpha^n\alpha_3^n + z_4\alpha_2^{2n} + z_5\alpha_3^{2n} + z_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O\left(\alpha^n\alpha_4^n\right)$$

felhasználásával, ahol

$$z_1 = \frac{s_1^2}{\alpha^{t+1}}, \quad z_2 = \frac{s_1 s_2}{\alpha\alpha_2^t} + \frac{s_1 s_2}{\alpha^t\alpha_2}, \quad z_3 = \frac{s_1 s_3}{\alpha\alpha_3^t} + \frac{s_1 s_3}{\alpha^t\alpha_3},$$
$$z_4 = \frac{s_2^2}{\alpha_2^{t+1}}, \quad z_5 = \frac{s_3^2}{\alpha_3^{t+1}}, \quad z_6 = \frac{s_2 s_3}{\alpha_2\alpha_3^t} + \frac{s_2 s_3}{\alpha_2^t\alpha_3},$$

a tétel hasonlóan bizonyítható, mint az előző.

Megjegyzés. Kiszámolva v_1 és v_1' konstansokat

$$v_1' = \frac{r_1\left(1 + \frac{1}{\alpha^{2t}}\right) + \frac{s_1^2}{\alpha^{t+1}}}{s_1^2\left(1 + \frac{1}{\alpha^t}\right)^2},$$

továbbá

$$v_1 = \frac{c_1\alpha^{1-4k}}{\alpha - 1} + \alpha^{-4k}\left(\sum_{q=2}^{k} \frac{c_q\alpha_q^2}{\alpha^2 - \alpha_q}\right) + \alpha^{-4k}\frac{\alpha^{2k} - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{2\alpha^2}$$

adódik. Belátható behelyettesítéssel, hogy $k = 2$ és $k = 3$ esetén $v_1 = v_1'$. A sejtés az, hogy ez minden $k \geq 2$ esetén teljesül, vagyis a 2. tételben definiált N-re is igaz az (5) formula.

Az 1. tétel bizonyításából látható, hogy $v_1 = \frac{r_1}{c_1^2\alpha^2}$. Ezért $v_1 = v_1'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $c_1^2\alpha = 2r_1$. Visszaírva r_1-et v_1-be kapjuk, hogy a sejtés ekvivalens a $v_1 = \frac{1}{2\alpha}$ állítással.

Irodalom

[1] K. DILCHER, On a class of iterative recurrence relations, *Fibonacci Quart.*, (to appear).

[2] P. KISS, Avarage order of the terms of a recursive sequence, *Proc. of the Austrian-Hungarian-Slovak. Number Theory Coll.*, Graz, (1992), (to appear).

[3] D. S. MEEK and G. H. J. VAN REES, The solution of an iterated recurrence, *Fibonacci Quart.*, **22** (1984), 101–104.

[4] ZAY B.: Egy rekurzív sorozatról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mat.*, (megjelenés alatt).