A Fibonacci-szósorozatok egy általánosítása II.

ZAY BÉLA*

Abstract. (A generalization of the Fibonacci word-sequences, II.) In [5] we generalized the Fibonacci word-sequences which were investigated by J. C. Turner in [3] and we proved some theorems connected with them. In this paper we continue the investigation of these generalized word sequences. Under certain special conditions we determine the density of certain fixed words in the terms of word sequences.

A dolgozat tárgya az [5]-ben vizsgált szósorozatok további tanulmányozása.

J. C. Turner [2]-ban Fibonacci-szósorozatnak nevezte és $F(W_1, W_2)$-vel jelölte azt a szósorozatot, melynek első két eleme W_1, W_2, az n $(n > 2)$-edik elemét pedig az $n-2$-edik és $n-1$-edik elemének egymás mellé írásával képezzük. [5]-ben ezen sorozat bizonyos általánosításaival foglalkoztunk, amit most folytatunk a következő jelölések használata mellett.

Legyenek s és k rögzített pozitív egészek, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ az $x_1, \ldots x_s$ betűk halmaza. Jelöljük $W(X)$-el az X-beli betűkből, ezek egymás mellé írásával képezett összes szó halmazát és $\overline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$-sal a $W(X)$ k-szoros Descartes szorzatának, $W^k(X)$-nek egy tetszőleges elemét.

Legyen minden i $(1 \leq i \leq k)$-re $f_i(\overline{w})$ a $W^k(X)$-et $W(X)$-be képező leképezés olyan, hogy minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re

$$(1) \qquad f_i(\overline{w}) = \begin{cases} w_k, & \text{ha } i = 1, \\ w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_k, & \text{ha } 2 \leq i \leq k\ . \end{cases}$$

Legyenek továbbá minden i $(1 \leq i \leq k)$-re és n pozitív egészre a $P_{n,i}(\overline{w})$ olyan $W^k(X)$-et $W(X)$-be képező leképezések, melyeket

$$(2) \qquad P_{n,i}(\overline{w}) = \begin{cases} w_i, & \text{ha } n = 1, \\ f_i(P_{n-1,1}(\overline{w}), P_{n-1,2}(\overline{w}), \ldots, P_{n-1,k}(\overline{w})), & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

definiál minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re!

$$(3) \qquad H_n(\overline{w}) = \begin{cases} h(\overline{w}), & \text{ha } n = 1, \\ H_{n-1}(f_1(\overline{w}), f_2(\overline{w}), \ldots, f_k(\overline{w})), & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

* A dolgozat az OTKA 1641. sz. pályázat támogatásával készült.

leképezést, ahol $h(\overline{w})$ a $W^k(X)$-nek a $W(X)$-be való olyan leképezése, amelyet minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re a

$$h(\overline{w}) = h(w_1, w_2, \dots, w_k) = w_{i_1}, w_{i_2}, \dots w_{i_r}, (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_r \leq k) \ . \tag{4}$$

képletet definiál.

Megjegyezzük, hogy az [5] 2. Tételében bizonyítottuk, hogy

$$H_n(\overline{w}) = h(P_{n,1}(\overline{w}), P_{n,2}(\overline{w}), \dots, P_{n,k}(\overline{w})) \tag{5}$$

így $h(\overline{w}) = w_i$ esetén, $H_n(\overline{w}) = P_{n,i}(\overline{w})$ adódik, minden $n \geq 1$-re, i $(1 \leq i \leq$ $\leq k)$-re és $\overline{w} \in W^k(X)$-re.

Bizonyos speciális esetekben vizsgálni fogjuk a rögzített $w_1 = v_1$, $w_2 =$ $= v_2$, ..., $w_k = v_k$ szavak (azaz $\overline{w} = (\overline{v}) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$) és a (3) által meghatározott $H = \{H_n(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$ szósorozatban a különböző betűk és szavak eloszlását, ezért bevezetjük a következő jelöléseket: Ha v a $v_1, v_2, \dots, v_k$ szavakból konkatenációval (egymás mellé írással) készített szó, akkor minden i $(1 \leq i \leq i \leq k)$-re $L_i(V)$ jelentse azt, hogy v_i hányszor fordul elő v-ben, $D_m(v)$ pedig azt, hogy x_m betű hányszor fordul elő v-ben $(1 \leq m \leq s)$! A v „szóhosszát" (azaz a $\sum_{i=1}^{k} L_i(v)$ összeget) jelölje $L(v)$, a v „betűhosszát" (azaz a $\sum_{m=1}^{s} D_m(v)$ összeget) pedig $D(v)$!

Abban az általános esetben, amikor

$$f_i(\overline{w}) = f_i(w_1, w_2, \dots, w_k) = w_{j_{1,i}}, w_{j_{2,i}}, \dots, w_{j_{p_i,i}}$$

ahol minden i $(1 \leq i \leq k)$-re p_i rögzített poszitív egész és $1 \leq j_{m,i} \leq k$ minden m $(1 \leq m \leq p_i)$ és minden i $(1 \leq i \leq k)$ egész számra, [1]-ben igazoltuk a következő tételt:

Az

$$\begin{aligned} L_j(H) = \{L_j(H_n((\overline{v})))\}_{n=1}^{\infty}, D_m(H) = \\ = \{D_m(H_n((\overline{v})))\}_{n=1}^{\infty}, L(H) = \{L(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

és $D(H) = \{D(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty}$ közös $F_k(x)$ karakterisztikus polinommal rendelkező lineáris rekurzív sorozatok, ahol

$$F_k(x) = \det(c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} -L_i\left(f_j(\overline{v})\right), & \text{ha } 1 \leq i \neq j \leq k, \\ x - L_i\left(f_j(\overline{v})\right), & \text{ha } 1 \leq i = j \leq k. \end{cases} \tag{6}$$

Abban a speciális esetben, amikor az $f_i(\overline{w})$ leképezések az (1) által meghatározottak, a karakterisztikus polinomról, illetve annak gyökeiről egy kicsit többet tudunk igazolni.

1. Tétel. Az $L_j(H)$, $D_m(H)$, $L(H)$ és $D(H)$ lineáris rekurzív sorozatok közös karakterisztikus polinomja minden j $(1 \leq j \leq k)$-re és m $(1 \leq m \leq s)$-re

$$f_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}, \tag{7}$$

továbbá $F_k(x)$-nek k különböző $\beta_i = {\alpha_i}^{k-1}$, $1 \leq i \leq k$ gyöke van, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ az $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ polinom gyökei.

H. R. Ferguson [1] majd később C. E. Hoggatt és K. Alladi [2] igazolták, hogy az $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ polinom gyökei különbözőek, és létezik közöttük olyan α_1, amely az összes többinél nagyobb abszolút értékű.

Ismert a Descartes-féle előjelszabály: Valós együtthatós egyenletben a pozitív gyökök p szám (ha többszörös gyök van, akkor többszörösséggel számolva) legfeljebb annyi, mint az együtthatók sorozatában az előjelváltozások t száma, továbbá $t - p$ mindig páros.

Ezt $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$-re alkalmazva $t = 1$ és így $p \leq t$ és $t - p$ párossága miatt $p = 1$, azaz éppen 1 pozitív valós gyöke van. Ez pedig éppen α_1, azaz (a fenntiek szerint létező) az összes többinél nagyobb abszolút értékű gyök. Hiszen ha ez az α_1 nem valós gyök lenne akkor $f(\overline{\alpha}_1) = 0$, $|\alpha_1| = |\overline{\alpha}_1|$ és $\alpha_1 \neq \overline{\alpha}_1$ miatt α_1 nem lenne az összes többinél nagyobb abszolút értékű. $f(x)$ egyetlen pozitív valós x gyökére az $(x-1)x^{k-1} = 1$ egyenlőségből adódóan $x > 1$ teljesül, viszont ha: $x \leq 0$ és $(x-1)x^{k-1} = 1$ akkor $|x| < 1$, tehát a pozitív valós gyök a legnagyobb abszolút értékű.

A Descartes-féle előjelszabályból adódik, hogy $f_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}$-nek is csak egyetlen pozitív valós gyöke van. Ez a $\beta_i = {\alpha_i}^{k-1}$ $i = 1, 2, \dots$, k-ra összefüggés miatt csak $\beta_1 = \alpha_1^{k-1}$ lehet. Tehát minden i $(2 \leq i \leq k)$-ra teljesül a

$$\beta_1 > |\beta_i| \tag{8}$$

egyenlőtlenség. Ennek segítségével be fogjuk bizonyítani a 2. Tételt, amely speciális $v_1, v_2, \dots, v_k$ szavakból képzett $\{P_{n,i}(\overline{v})\}_{n=1}^{\infty}$ szósorozatokban az egyes szavak illetve betűk előfordulási arányát határozza meg.

2. Tétel. Jelölje β_1 az $f_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}$ polinom pozitív valós gyökét, s az $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ betűhalmaz elemeinek számát és y egy rögzített, $x \leq y \leq k$ természetes számot! Ha egy $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ vektorra

$$L(v_i) = \begin{cases} 0 \text{ (azaz } v_i \neq 0 \text{ üres szó)}, & \text{ha } i \leq i \leq y, \\ 1 \text{ (azaz } v_i \neq 0), & \text{ha } y < i \leq k, \end{cases} \tag{9}$$

és minden m $(1 \le m \le s)$-re a_m jelöli az

$$a_m = D_m(v_k)\beta_1^{-1} + \sum_{j=1}^{k-1} D_m(v_{k-j})\beta_1^{-2}(1+\beta_1^{-1})^{j-1}$$

összeget, akkor léteznek a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{k-j}(P_{n,i}(\overline{v}))}{L(P_{n,i}(\overline{v}))} = \begin{cases} \beta_1^{-1}, & \text{ha } j=0, \\ \beta_1^{-2}(1+\beta_1^{-1})^{j-1}, & \text{ha } 1 \le j \le k \end{cases} \tag{10}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_m(P_{n,1}(\overline{v}))}{D(P_{n,1}(\overline{v}))} = \frac{a_m}{\sum_{m=1}^{s} a_m}$$

határértékek.

Az 1. Tétel bizonyítása. Az (1)-ből

$$L_i(f_j(\overline{v})) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 \le j \le i < k, \\ 1, & \text{ha } (1 \le i < j \le k) \quad \text{vagy} \quad (i \le j \le i = k) \end{cases} \tag{11}$$

adódik, amit (6)-ba behelyettesítve

$$F_k(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & x & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix}.$$

Innen $F_1(x)$-et és $F_2(x)$-et kifejtve könnyen belátható, hogy $k=1$ és $k=2$-re teljesül (11). Tegyük fel, hogy (11) teljesül $k-1$-re $(k \ge 3)$, majd fejtsük ki az $F_k(x)$ determinánst az első oszlopa szerint! Ekkor

$$F_k(x) = xF_{k-1}(x) + (-1)^{k+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ x & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & x & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

adódik, ahol az egyenlet jobboldalán szereplő detemrinánsok rendje $k-1$.

Vonjuk ki rendre $i = k-1$-re, $k-2$-re, ..., 2-re a (12)-beli $(k-1)$-edrendű determináns i-edik oszlopából az $(i-1)$-edik oszlopát! A kapott determináns főátlója fölött csupa zérus áll, így a determináns értéke a főátlóban levő elemek szorzata, azaz $(-1)(-x-1)^{k-2}$, amit $F_{k-1}(x) = x^{k-1} - (x+1)^{k-2}$-vel együtt (12)-be behelyettesítve adódik (11).

Mivel minden i $(1 \leq i \leq k)$-re

$$f(\alpha_i) = \alpha_i^k - \alpha_i^{k-1} - 1 = 0,$$

és ebből következően

$$F\left(\alpha_i^{k-1}\right) = \left(\alpha_i^{k-1}\right)^k - \left(\alpha_i^{k-1}+1\right)^{k-1} = \left(\alpha_i^{k-1}\right)^k - \left(\alpha_i^k\right)^{k-1} = 0\,,$$

ezért $\beta_i = \alpha_i^{k-1}$ minden i $(1 \leq i \leq k)$-re gyöke $F_k(x)$-nek.

Ha $\beta_i = \beta_j$ egyenlőség teljesülne valamely $1 \leq i \neq j \leq k$-ra, akkor

$$\alpha_i^k - 1 = \alpha_i^{k-1} = \alpha_j^{k-1} = \alpha_j^k - 1\,,$$

ahonnan az

$$\alpha_i^k = \alpha_j^k$$

egyenlőség következne, amelynek mind a két oldalát $\alpha_i^{k-1} = \alpha_j^{k-1}$-el elosztva $\alpha_i = \alpha_j$ adódna, tehát $\beta_i \neq \beta_j$ és $\beta_1 = \alpha_1^{k-1} > |\beta_i|$, minden i $(1 < i \leq k)$-re.

A 2. Tétel bizonyításánál szükségünk lesz néhány lemmára. A következőkben előbb ezeket fogjuk megfogalmazni és igazolni.

1. Lemma. Minden $n \geq j+2$ pozitív egész számra és tetszőleges $\overline{v} \in W(X)$-re

$$L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = \begin{cases} L\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right), & \text{ha } j = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{j-1} \left(L_j\left(f_i(\overline{v})\right) L_i\left(H_{n-1}(\overline{v})\right)\right), & \text{ha } 1 \leq j \leq k. \end{cases} \tag{13}$$

BIZONYÍTÁS. (5)-ből a $h(\overline{w}) = w_1$ speciális esetben $H_n(\overline{v}) = P_{n,1}(\overline{v})$ következik, minden $n \geq 1$-re. Továbbá (1) alapján minden $i,j (1 \leq i,j \leq k)$-re

$$L_j\left(f_i(\overline{v})\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 \leq i \leq j \leq k-1, \\ 1, & \text{ha } 1 \leq j \leq i-1 \quad \text{vagy} \quad j = k. \end{cases} \tag{14}$$

A H és $L_j(H)$ sorozatok definíciójából közvetlenül adódik

$$L_j\left(H_n(\overline{v})\right) = \begin{cases} L_j\left(h(\overline{v})\right), & \text{ha } n = 1\,, 1 \leq j \leq k, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} L_j\left(f_i(\overline{v})\right) L_i\left(H_{n-1}(\overline{v})\right), & \text{ha } n > 1\,, 1 \leq j \leq k. \end{cases} \tag{15}$$

(14) és (15)-ből kapjuk, hogy:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
L_{k-1}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
L_{k-2}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
&\vdots\\
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_{k-j+1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \ldots +\\
&\quad + L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
&\vdots\\
L_1\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_2\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \ldots +\\
&\quad + L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
L_k\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_1\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_2\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \ldots +\\
&\quad + L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right).
\end{aligned}
$$

A (16) egyenletrendszer utolsó sorából

$$
(17)\qquad L_k\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = \sum_{i=1}^{k} L_i\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) = L\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right)
$$

következik, amiből a (16) első sorát felhasználva

$$
L_{k-1}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = L\left(P_{n-2,1}(\overline{v})\right)
$$

adódik, azaz $j = 0$-ra és $j = 1$-re igazoltuk (13)-at.

Tegyük fel, hogy $2 \le j < k$ és minden t $(1 \le t < j)$-re és $m \ge t+1$-re

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
L_{k-1}\left(P_{m,1}(\overline{v})\right) &= \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t-1}{i} L_k\left(P_{m-i,1,1}(\overline{v})\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t-1}{i} L\left(P_{m-i-2,1}(\overline{v})\right)!
\end{aligned}
$$

A (16) egyenletrendszer j-edik sorából a $(j-1)$-ediket kivonva

$$
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) - L_{k-(j-1)}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = L_{k-(j-1)}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right)
$$

ahonnan (18)-at $t = j-1$, $m = n-1$, illetve $m = n$-re alkalmazva

$$
\begin{aligned}
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_{k-(j-1)}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_{k-(j-1)}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j-2}{i} L_k\left(P_{n-i-2,1}(\overline{v})\right) + \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j-2}{i} L_k\left(P_{n-i-1,1}(\overline{v})\right)
\end{aligned}
$$

következik, amiből a binomiális együtthatók ismert tulajdonságait és (17)-et felhasználva:

$$L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = L_k\left(P_{n-j,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) +$$
$$+\sum_{i=0}^{j-3}\left(\binom{j-2}{i}+\binom{j-2}{i+1}\right)L_k\left(P_{n-i-2,1}(\overline{v})\right) =$$
$$= L_k\left(P_{n-j,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \sum_{i=0}^{j-3}\binom{j-1}{i+1}L_k\left(P_{n-(i+2),1}(\overline{v})\right) =$$
$$= \binom{j-1}{j-1}L_k\left(P_{n-j,1}(\overline{v})\right) + \binom{j-1}{0}L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) +$$
$$+\sum_{i=1}^{j-2}\binom{j-1}{i}L_k\left(P_{n-i-1,1}(\overline{v})\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}L_k\left(P_{n-i-1,1}(\overline{v})\right) = \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}L\left(P_{n-i-2,1}(\overline{v})\right) .$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

2. Lemma. Ha $u \geq 1$ és m tetszőleges egész számok, akkor

$$F^{(k)}_{m+k} + \sum_{i=1}^{u} F^{(k)}_{m+i} = F^{(k)}_{m+u+k}, \tag{19}$$

ahol

$$F^{(k)}_n = \begin{cases} n, & \text{ha } 1 \leq n \leq k, \\ F^{(k)}_{n+k} - F^{(k)}_{n+k-1}, & \text{ha } n \leq 0, \\ F^{(k)}_{n-1} + F^{(k)}_{n-k}, & \text{ha } n > k, \end{cases} \tag{20}$$

azaz a Fibonacci sorozat egy $F^{(k)}$ általánosításának n-edik eleme.

BIZONYÍTÁS. $u = 1$-re az $F^{(k)}$ definíciójából közvetlenül adódik az állítás.

Ha $u - 1 \geq 1$, és

$$F_{m+k} + \sum_{i=1}^{u-1} F^{(k)}_{m+i} = F^{(k)}_{m+u-1+k},$$

akkor

$$F^{(k)}_{m+k}+\sum_{i=1}^{u}F^{(k)}_{m+i}=F^{(k)}_{m+u-1+k}+F^{(k)}_{m+u}=F^{(k)}_{m+u+k},$$

így az u-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítottuk a lemmát.

3. Lemma. Ha valamely rögzített $n_0\geq 1$ és q egész számokra $\overline{v}\in W^k(x)$-re és minden i $(1\leq i\leq k)$-re

$$L\left(P_{n_0,i}(\overline{v})\right)=F^{(k)}_{q-1+n_0+i} \tag{21}$$

teljesül, akkor minden n $(n\geq n_0)$ pozitív egészre és i $(1\leq i\leq k)$-re

$$L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)=F^{(k)}_{q-1+n_0+i+(n-n_0)(k-1)}\,. \tag{22}$$

BIZONYÍTÁS. $n=n_0$-ra (22)-ből (21)-et kapjuk, így $n=n_0$-ra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n $(n>n_0)$-ra, és minden i $(1\leq i\leq k)$-re

$$L\left(P_{n-1,i}(\overline{v})\right)=F^{(k)}_{q-1+n_0+i+(n-1-n_0)(k-1)}$$

teljesül. Ekkor (2), (1) és (19) felhasználásával ($u=i-1$ és $m=q-1+$ $+n_0+(n-1-n_0)(k-1)$) helyettesítéssel)

$$\begin{aligned}L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)&=\sum_{j=1}^{i-1}L\left(P_{n-1,k}(\overline{v})\right)+L\left(P_{n-1,k}(\overline{v})\right)=\\&=\left(\sum_{j=1}^{i-1}F^{(k)}_{q-1+n_0+j+(n-1-n_0)(k-1)}\right)+F^{(k)}_{q-1+n_0+k+(n-1-n_0)(k-1)}=\\&=F^{(k)}_{q-1+n_0+i+(n-n_0)(k-1)}\end{aligned}$$

adódik, ami bizonyítja az állítást.

4. Lemma. Ha valamely y $(0\leq y<k)$ természetes számra és $\overline{v}\in W^k(x)$-re

$$L(v_i)=\begin{cases}0\ (\text{azaz } v_i=0 \text{ üres szó}), & \text{ha } 1\leq i\leq y,\\ 1\ (\text{azaz } v_i\neq 0), & \text{ha } y<i\leq k,\end{cases} \tag{23}$$

akkor

$$L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)=F^{(k)}_{-y+i+(n-2)(k-1)}\,. \tag{24}$$

BIZONYÍTÁS. Az $F^{(k)}$ definíciójából adódó

$$F_m^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } 2-k \le m \le 0, \\ 0, & \text{ha } 3-2k \le m \le 1-k \end{cases} \tag{25}$$

értékek és (23) alapján minden y $(0 \le y < k)$-ra

$$L(v_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{ha } y < i < k, \\ 0, & \text{ha } 1 \le i \le y \end{array} \right\} = F_{1-k-y+i}^{(k)}$$

teljesül. Ez pedig a (2)-ből következő

$$L\left(P_{1,i}(\overline{v})\right) = L(v_i), \qquad (1 \le i \le k)$$

egyenlőségek miatt azt jelenti, hogy teljesül az előző lemma (21) feltétele az $n_0 = 1$, $q = 1-k-y$ értékekkel, így (22) is igaz, de ez most (a helyettesítések elvégzése után) azonos (24)-el, így az állítást igazoltuk.

A 2. tétel bizonyítása. [4]-ben értelmeztük az $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ karakterisztikus polinommal és az

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ 0, & \text{ha } 1 \le n \le k-1 \end{cases}$$

kezdőértékkel rendelkező $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ lineáris rekurzív sorozatot, és igazoltuk, hogy az S sorozat n-edik eleme $S(n) = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i^n$ explicit előállításában szereplő b_1 konstansra

$$b_1 = \left(\alpha_1^k + k - 1\right)^{-1}$$

teljesül, ahol α_1 az $f(x)$ polinom egyetlen pozitív valós gyöke.

(25)-ből, $F_{2-2k}^{(k)} = 1$-ből és S definíciójából minden m $(m \ge -2k+2)$-re

$$F_m^{(k)} = S_{m+2(k-1)}$$

következik. A (9) feltétel azonos (23)-mal, ezért a 4. Lemma alapján

$$\begin{aligned} L\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= F_{-y+1+(n-2)(k-1)}^{(k)} = S_{-y+1+n(k-1)} = \\ &= \sum_{t=1}^{k} b_t \alpha_t^{1-y+n(k-1)} = \sum_{t=1}^{k} b_t \alpha_t^{1-y} \left(\alpha_t^{k-1}\right)^n = \sum_{t=1}^{k} d_t \beta_1^n, \end{aligned} \tag{26}$$

ahol $\beta_1,\ldots,\beta_k$ az 1. Tétel szerint az $F_k(x)=x^k-(x+1)^{k-1}$ polinom gyökei, és minden t $(1\le t\le k)$-re $d_t=b_t\alpha_t^{1-y}$, így

$$d_1=b_1\alpha_1^{1-y}=\alpha_1^{1-y}\left(\alpha_1^k+k-1\right)^{-1}\neq 0.$$

Az [5]-ben igazoltuk a következő két tételt:

Legyen $w_1,w_2,\ldots,w_n$ tetszőleges szósorozat, B_1, $B_2,\ldots$, $B_n,\ldots$, és B_1^I, $B_2^I,\ldots$, $B_n^I\ldots$ olyan leképezések, melyekre

$$B_1(w_1)=w_1,\quad B_1^I=0\quad \text{(üres szó)},$$

és $i\ge 1$ esetén, ha

$$B_i(w_1,w_2,\ldots,w_i)=w_{j_1}w_{j_2}\ldots w_{j_{2^{i-1}-1}}w_1$$

és

$$B_i^I(w_2,w_3,\ldots,w_i)=w_{j_1}w_{j_2}\ldots w_{j_{2^{i-1}-1}},$$

akkor legyen

$$B_{i+1}\left(w_1,w_2,\ldots,w_{i+1}\right)=B_i^I\left(w_2,w_3,\ldots,w_i\right)B_i\left(w_2,w_3,\ldots,w_{i+1}\right)w_1!$$

(A definícióból az $i=2$ és $i=3$ esetben például

$$B_2(w_1,w_2)=B_1^IB_1(w_2)w_1=w_2w_1$$

és

$$B_3(w_1,w_2,w_3)=B_2^I(w_2)B_2(w_2,w_3)w_1=w_2w_3w_2w_1$$

adódik.)

Az [5] 4. Tétele. Minden i $(1\le i\le k)$-re, n $(n\le i+1)$-re és tetszőleges $\overline{v}\in W^k(X)$-re, teljesül a

$$P_{n,i}(\overline{v})=B_i\left(P_{n-1,k}(\overline{v}),P_{n-2,k}(\overline{v}),\ldots,P_{n-i,k}(\overline{v})\right)$$

egyenlőség.

Az [5] 5. Tétele. A $P_{n,i}(\overline{v})=B_i\left(P_{n-1,k}(\overline{v}),P_{n-2,k}(\overline{v}),\ldots,P_{n-i,k}(\overline{v})\right)$ szóban, tetszőleges $\overline{v}\in W^k(X)$ esetén, j $(1\le j\le i)$-re a $P_{n-j,k}(\overline{v})$ szó pontosan $\binom{j-1}{j-1}$-szer fordul elő.

Az [5] 4. Tétele miatt a $P_{n,i}(\overline{v})$ szó a $P_{n-1,k}(\overline{v}),\ldots,P_{n-i,k}(\overline{v})$ szavak valamely egymás mellé írásából adódik, ezért az [5]5. Tételét, a (2)-ből adódó

$$P_{m,k}(\overline{v})=f_1\left(P_{m,1}(\overline{v}),\ldots,P_{m,k}(\overline{v})\right)=P_{m+1,1}(\overline{v})\tag{27}$$

egyenlőséget és (26)-ot felhasználva:

$$\begin{aligned}\beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L\left(P_{n-t,k}(\overline{v})\right) = \\ &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L\left(P_{n+1-t,1}(\overline{v})\right) = \\ &= \sum_{t=1}^{i} \beta_1^{1-t} \binom{i-1}{t-1} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{B_r}{\beta_1}\right)^{n+1-t},\end{aligned}$$

tehát

$$\beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{\beta_r}{\beta_1}\right)^{n+1-t}. \tag{28}$$

A (8)-ból következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta_r}{\beta_r}\right)^{n} = 0 \tag{29}$$

minden r $(1 < r \leq k)$-re. (28) és (29)-ből a binomiális tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{t=1}^{i} \beta_1^{1-t} \binom{i-1}{t-1} d_1 = d_1 \left(1 + \beta_1^{-1}\right)^{i-1} \tag{30}$$

adódik. A fentiekhez hasonlóan az [5] 5. Tételét, (27)-et, (13)-at és (26)-ot felhasználva

$$\begin{aligned}\beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_k\left(P_{n-t,k}(\overline{v})\right) = \\ &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_k\left(P_{n+1-t,1}(\overline{v})\right) = \\ &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_k\left(P_{n-t,1}(\overline{v})\right) = \\ &= \sum_{t=1}^{i} \beta_1^{-t} \binom{i-1}{t-1} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{\beta_r}{\beta_1}\right)^{n-t}\end{aligned} \tag{31}$$

és minden j $(1 \le j < k)$-re

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad \beta_1^{-n} L_{k-j}\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_{k-j}\left(P_{n+1-t,1}(\overline{v})\right) = \\
&= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} L\left(P_{n-1-t-i,1}(\overline{v})\right) = \\
&= \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \sum_{i=0}^{i-1} \binom{j-1}{i} \beta_1^{1-t-i} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{\beta_r}{b_1}\right)^{n-1-t-i}
\end{aligned}
$$

következik. (29)-ből, (31)-ből és a binomiális tételből

$$
\begin{aligned}
(33)\qquad \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_k\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= d_1 \beta_1^{-1} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \beta_1^{1-t} = \\
&= d_1 \beta^{-1} (1+\beta^{-1})^{i-1}
\end{aligned}
$$

adódik, amiből (30) és $d_1 \neq 0$ miatt $j = 0$-ra (10) következik.

(29)-ből, (32)-ből és a binomiális tételből hasonlóan kapjuk, hogy minden j $(1 \le j < k)$-re

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_{k-j}\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= d_1 \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \beta_1^{-1-t} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \beta_1^{-i} = \\
&= d_1 \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \beta_1^{-1-t} (1+\beta_1^{-1})^{j-1} = \\
&= d_1 \beta_1^{-2} (1+\beta^{-1})^{i-1} (1+\beta^{-1})^{j-1},
\end{aligned}
$$

ahonnan (30) és $d \neq 0$ miatt minden j $(1 \le j < k)$-re következik (10).

(33)-ból és (34)-ből minden m $(1 \le m \le s)$-re

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} D_m\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{q=1}^{k} D_m(v_q) \lim_{n\to\infty} L_q\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) =$$

$$= D_m(v_k) \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_k\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) + \sum_{j=1}^{k-1} D_m(v_{k-j}) \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_{k-j}\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) =$$

$$= D_m(v_k) d_1 \beta_1^{-n} \left(1+\beta_1^{-1}\right)^{i-1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} D_m(v_{k-j}) d_1 \beta_1^{-2} (1+\beta_1^{-1})^{i-1} (1+\beta_1^{-1})^{j-1} =$$

$$= d_1 (1+\beta_1^{-1})^{i-1} a_m$$

adódik, amiből

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} D\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{m=1}^{s} \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} D_m\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = d_1(1+\beta_1^{-1})^{i-1} \sum_{m=1}^{s} a_m$$

következik.

A (9) feltétel miatt létezik olyan m $(1 \leq m \leq s)$ egész szám, hogy az a_m előállításában szereplő valamelyik tag nem zérus, így

$$d_1(1+\beta_1^{-1})^{i-1} \sum_{m=1}^{s} a_m > 0,$$

és akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_1^{-n} D_m\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)}{\beta_1^{-n} D\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)} = \frac{d_1(1+\beta_1^{-1}) a_m}{d_1(1+\beta_1^{-1}) \sum\limits_{m=1}^{s} a_m} = \frac{a_m}{\sum\limits_{m=1}^{s} a_m}.$$

Irodalom

[1] H. R. P. FERGUSON, On a Generalization of the Fibonacci Numbers Useful in Memory Allocation Schema; or about the Zeros of $z^k - z^{k-1} - 1$, $k > 0$, *The Fibonacci Quarterly*, **14.3** (1976), 233–243

[2] J. C. TURNER, Fibonacci World Patterns and binary Sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **26.3** (1988), 233–246

[3] P. KISS and B. ZAY, On Sequences of Zeros and Ones, *Studia Scient. Math. Hungarica* (közlésre elfogadva)

[4] V. E. HOGATT Jr. and K. ALLADI, Limiting Ratios of Convolved Recursive Sequences *The Fibonacci Quarterly*, **15.3** (1977), 211–214

[5] ZAY B., A Fibonacci-szósorozatok egy általánosítása, *Acta Acad. Ped. Agriensis, Sect. Math.*, **21** (1993), 41–51