A magasabb rendű fixpontokról

SZEPESSY BÁLINT

Abstract. (On the fix point of higher order) Let $f(x)$ be a continuons real valued function on the interval $[a,b]$ which maps the interval onto itself. The functions

$$f_0(x) = x,\ f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f\big(f(x)\big), \dots, f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big)$$

are called the 0^{th}, 1^{st}, $\dots$, n^{th} iterated functions of the base function $f(x)$.

If $f(c) = c$, then the point c is said to be the fix point of first order of the function $f(x)$. If $f_n(c) \neq c$ $(n = 1, 2 \dots, r_{-1})$ but $f_r(c) = c$, then the point c is the fix point of order r of the function $f(x)$.

In this paper the following statement is proved: Let $f(x)$ be a base function on the interral $[a,b]$ and $[c,d]$ be a subinterval of $[a,b]$. If there exist such two disjoint subintervals of $[c,d]$, which are maped onto the interval $[c,d]$ by the function $f(x)$, then the function $f(x)$ has a fix point of arbitrary high order.

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ $(a < b)$ zárt intervallumon értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos, a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x) =$ $=$ constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az

$$f_0(x) = x,\ f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f\big(f(x)\big), \dots, f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big), \dots$$

függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, $\dots$, n-edik (n-edrendű), $\dots$ iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy az $f_n(x)$ $(n = 2, 3 \dots)$ függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal. Teljesülnek az $f_{n+m}(x) = f_n\big(f_m(x)\big) = f_m\big(f_n(x)\big)$ azonosságok.

Bármely $x_0(\in [a,b])$ pontnak létezik az $x_{n+1} = f(x_n)$ képlettel alkotott $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ iterációs pontsorozata, és minden n-re $x_n \in [a,b]$. Az x_n pontot az x_0 pont n-edrendű (n-edik) iteráltjának vagy rákövetkezőjének nevezzük.

Az $f(x)$ görbe grafikus képének alkalmazásával bármely x_0-pont x_1 rákövetkezőjét úgy kapjuk meg, hogy az x_0 pontot az abszcisszatengelyre merőlegesen a görbére vetítjük, és a vetületen át párhuzamost húzunk az abszcisszatengellyel, ez a párhuzamos az $y = x$ „átlót" az x_1 abszcisszájú pontban metszi.

Ha x' pont iterációs pontsorozatának x_0 eleme, akkor x' pontot az x_0 pont inverz-iteráltjának vagy megelőzőjének nevezzük. Ha n a legkisebb természetes szám, amelyre $f_n(x') = x_0$, akkor n-edrendű vagy n-edik inverz-iteráltról beszélünk. Az ilyen x' pontot így jelöljük: $x' = x_{-n}$.

Valamely x_0 pont elsőrendű inverz-iteráltját grafikus eljárással úgy kapjuk, hogy az x_0 pontot az abszcisszatengelyre merőlegesen az átlóra vetítjük és a vetületen át párhuzamost húzunk az abszcisszatengellyel, a párhuzamos és az $f(x)$ közös pontjai x_{-1} abszcisszájúak.

Ha $[c,d]$ (c<d) az $[a,b]$ szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele: $[c,d]_1$. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy $[c,d]_1 = [\min f(x); \max f(x)]$ ha $c \leq x \leq d$). A $[c,d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c,d]_n = ([c,d]_{n-1})_1$ intervallumot értjük.

Ha f(c)=c, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c) \neq c \quad n = 1, 2, \ldots, r-1$ esetén, de $f_r(c) = c$, akkor c pont az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja. Az r-edrendű fixpontok az $y = f_r(x)$ görbe és az $y = x$ átló metszéspontjainak vetületei az abszcisszatengelyen.

Felmerül a kérdés, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén vannak tetszőlegesen magas rendszámú fixpontok.

Tien-Yien Li és James Yorke bebizonyította a következő tételt:

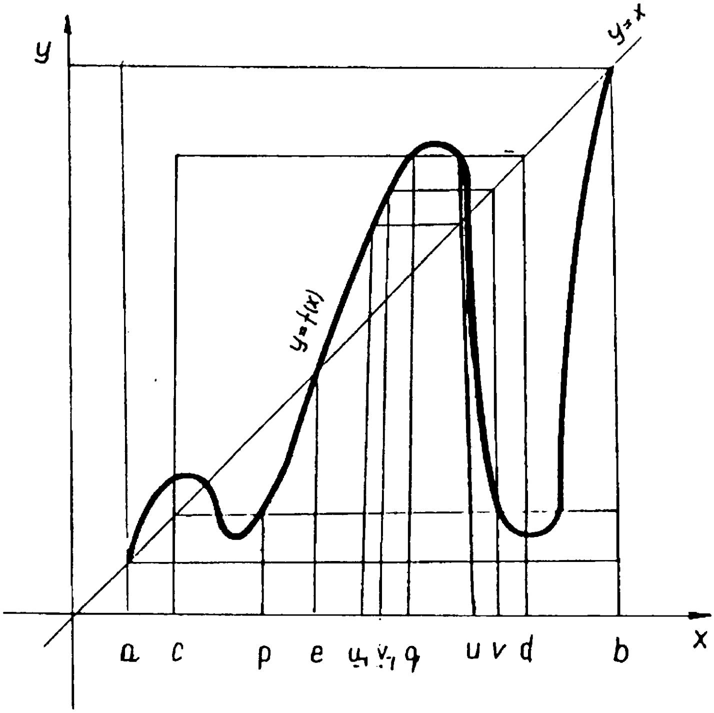
Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett iterációs alapfüggvény. Ha van az $[a,b]$ szakaszban olyan e pont, amelyre $e_3 \leq e < e_1 < e_2$ (vagy $e_3 \geq e > e_1 > e_2$) relcációk teljesülnek, akkor az $f(x)$ függvénynek van bármilyen magasrendű fixpontja (ahol e_1, e_2, e_3 az e pont első, második és harmadik iterált pontja).

A tételben szereplő e pont létezésének az eldöntése sokszor nem könnyű feladat, ezért — de elméleti szempontból is — érdeklődésre tarthat számot a következő tétel.

2. A magasabb rendű fixpontokról

Tétel. Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ zárt intervallumon értelmezett iterációs alapfüggvény; legyen továbbá $[c,d]$ részszakasza az $[a,b]$ szakasznak. Ha van a $[c,d]$ szakaszban két olyan diszjunkt részszakasz amelyeket a függvény az egész $[c,d]$ szakaszra képezi le, akkor az $f(x)$ függvénynek van bármilyen magas rendű fixpontja.

BIZONYÍTÁS. Legyen a feltételekben szereplő két szakasz $[p,q] = \delta$ és $[u,v] = \mu$ $(c \leq p < q < u < v \leq d)$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy δ és μ diszjunkt szakaszoknak nincs olyan valódi része, amelyet $f(x)$ a $[c,d]$ szakaszra képez le. Tehát egyik szakasz sem rövidíthető meg az említett leképezési tulajdonság megtartásával.



1. ábra

Így az

1. $f(p) = c$, és akkor $f(q) = d$;
2. $f(p) = d$, és akkor $f(q) = c$;

3. $f(u) = d$, és akkor $f(v) = c$;
4. $f(u) = c$, és akkor $f(v) = d$

lehetőségnek megfelelően az 1,3, 2,3, 1,4, 2,4, esetpárok az összes lehetséges előfordulásokat kimerítik.

Először az 1,3 esetpárral foglalkozunk (1. ábra)

Ekkor van a δ szakaszban olyan e elsőrendű fixpont, amelytől jobbra $f(x) >$ $> x$, hacsak $x \leq q$, azaz $f(x)$ az $[e, q]$ szakaszban minden értéket felvesz e és d között. A tétel állítása egyszerűen nyerhető, ha igaz a következő.

1.1. Segédtétel. A tétel feltevési mellett az 1,3 esetben (de az 1,4 esetben is) bármely n természetes szám esetén van a μ szakasznak n-edrendű inverz-iterált szakasza az $(e, q]$ szakaszban. Az így keletkező μ_{-n} .sorozat elemei közös belső pontot nem tartalmazó szakaszok.

Az 1.1. segédtétel bizonyítása. Először azt látjuk be, hogy ha $[u, v] = \mu$ tetszőleges részszakasza az $[e, d]$ szakasznak, akkor mindig van $\mu_{-1} \subset [e, q]$ szakasz amelyre $(\mu_{-1})_1 = \mu$.

Mivel az $[e, q]$ szakaszban $f(x)$ minden értéket felvesz e és d között és $e \leq u < v \leq d$, ezért mind az u, mind a v pontnak van az $[e, q]$ szakaszban (legalább egy-egy) inverz-iterált pontja. Tekintsük a v pont $[e, q]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legkisebb és jelöljük ezt v_{-1}-gyel. Tehát $v_{-1} = \min\limits_{e<x\leq q} \{x\}$, $f(x) = v$. Az u pontnak az $[e, q]$ szakaszbeli inverz-iterált pontjai közül a v_{-1}-től balra, a hozzá legközelebb esőt választva legyen ennek abszcisszája u_{-1}, azaz $u_{-1} = \max\limits_{e\leq x<v_{-1}} \{x\}$, $f(x) = u$.

Könnyű megmutatni, hogy a $\mu_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}]$ szakasz első iteráltja az $[u, v]$ szakasz. Ismert ugyanis, hogy az $[a, b]$ valamely zárt ε részszakaszának első iteráltja a $[\min\limits_{x\in\varepsilon} f(x)\,;\ \max\limits_{x\in\varepsilon} f(x)]$ szakasz. Márpedig $\min\limits_{x\in\mu_{-1}} f(x) =$ $= f(u_{-1}) = u$, hiszen ha a μ_{-1} szakasz belsejében lenne olyan r pont hogy $f(r) \leq u_{-1}$ teljesül, akkor — az $f(x)$ függvény $[e, q]$ szakaszbeli folytonossága következtében — lenne olyan s pont is, amelyre $f(s) = u$ teljesül $r \leq s < v_{-1}$, ellentétben azzal, hogy $u_{-1} = \max\limits_{e\leq x<v_{-1}} \{x\}, f(x) = u$. Hasonlóképpen látható be az is, hogy $\max\limits_{x\in\mu_{-1}} f(x) = f(v_{-1}) = v$. Tehát $(\mu_{-1})_1 = [u_{-1}, v_{-1}]_1 = [u, v] = \mu$ teljesül.

Ennek megfelelően a μ szakaszból kiindulva képezhetjük a μ_{-1} szakaszt, majd eljárásunkat folytatva a μ_{-1} szakaszból kiindulva a μ_{-2} szakaszt, ...; s így előáll a μ_{-n} $(n = 1, 2, \ldots)$ végtelen szakaszsorozat, amelyre $(\mu_{-n})_1 =$ $= \mu_{-(n-1)}$.

Még azt kell megmutatni, hogy bármely két ilyen inverziterált szakasznak nincs közös belső pontja. Ezt indirekt bizonyítással mutatjuk meg.

Tegyük fel, hogy μ_{-n} és $\mu_{-(n+k)}$ (k pozitív egész) olyan szakaszpár, amelynek mind a két szakaszában közös belső pontok vannak, akkor e pontok első iteráltjai a μ_{-n+1} és a μ_{-n-k+1} szakaszok közös pontjai lesznek, és folytatva eljárásunkat azt nyerjük, hogy a $(\mu_{-n})_n = \mu$ és a $\mu_{-n-k+n} = \mu_{-k}$ is közös belső ponttal rendelkező szakaszok. Ez azonban lehetetlen, mert μ-nak nincs q-tól balra eső pontja, μ_{-k}-nak pedig minden belső pontja q-tól balra van.

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

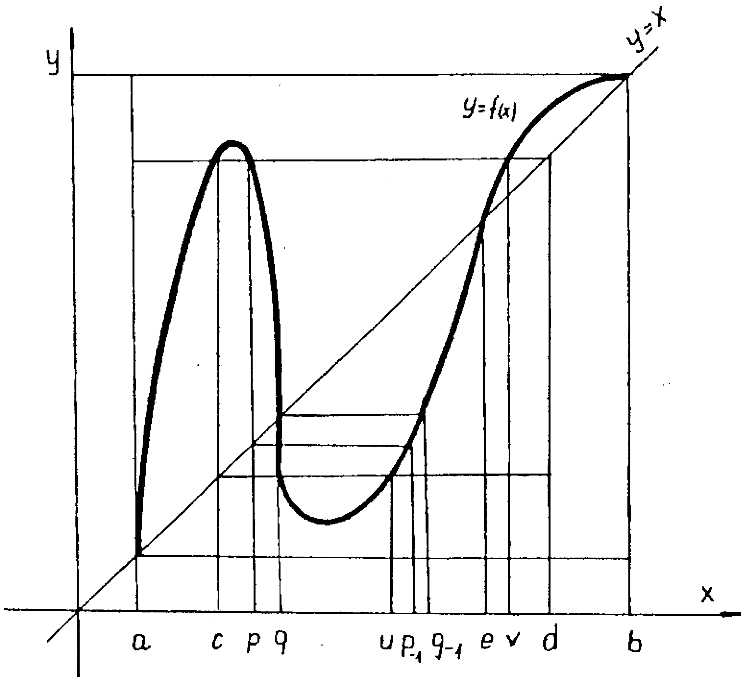
Ezután a tétel bizonyítását a következőképpen folytathatjuk. A segédtétel szerint kialakított μ_{-n} szakaszsorozatra nézve $(\mu_{-n})_n = \mu$ és így $(\mu_{-n})_{n+1} = \mu_1 = [c, d]$. Az $f_{n+1}(x)$ függvény tehát a μ_{-n} szakaszt a $[c, d]$ szakaszra képezi le, amiből következik, hogy vannak olyan $s, t \in \mu_{-n}$ pontok, amelyekben $f_{n+1}(x)$ rendre a c és a d értéket veszi fel; $f_{n+1}(s) = c$, $f_{n+1}(t) = d$. E két pont által határolt μ_{-n}-ben fekvő $[\min\{s,t\}; \max\{s,t\}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x) - x$ (folytonos) függvény minden értéket felvesz az $f_{n+1}(s) - s = c - s$ és az $f_{n+1}(t) - t = d - t$ értékek között. Mivel ezek különböző előjelűek, ezért van az $f_{n+1}(x) - x$ függvénynek μ_{-n}-ben 0-helye; azaz van olyan r pont amelyre $f_{n+r}(r) = r$ teljesül. Ez a pont tehát legfeljebb $(n+1)$-edrendű fixpont. Hogy éppen $n+1$ a rendszáma, az abból következik, hogy az r, r_1, r_2, r_3, $\ldots$, r_{n-1}, r_n pontok rendre a $\mu_{-n}, \mu_{-n+1}, \mu_{-n+2}$, $\mu_{-n+3}, \ldots, \mu_{-1}, \mu$ szakaszok belső pontjai, s ezek közös belső pont nélküli szakaszok. Így az $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ sorozat pontjai között nincsenek egybeesők. Ebben az esetben a tétel bizonyítását befejeztük.

Foglalkozzunk ezután az 1,4 esetpárral.

Az 1,4 esetpár esetén a bizonyítás úgy végezhető el, hogy az 1,3 esetpárhoz hasonlóan az $[e, q]$ szakaszban ugyanolyan $\mu_{-1} = [u_{-1} v_{-1}], \mu_{-2}, \ldots, \mu_{-n}, \ldots$ végtelen intervallum-sorozatot képezünk, amelynek elemei páronként diszjunktak, s amelyekre teljesül, hogy $(\mu_{-(n+1)})_1 = \mu_{-n}$ (n=0,1,2,...,). A $\mu_{-n} = [u_{-n}, v_{-n}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x)$ iterált függvény minden $[c, d]$ szakaszbeli értéket felvesz, mert $f_{n+1}(u_{-n}) = f(u) = c$; $f_{n+1}(v_{-n}) = f(v) = d$ és $f_{n+1}(x)$ folytonos ebben a szakaszban, ezért $f_{n+1}(x) - x = 0$ egyenletnek van megoldása; legyen ez $\overline{x}$. Mivel $(\overline{x})_1 \in \mu_{-(n-1)}$; $(\overline{x})_2 \in \mu_{-(n-2)}$; $\ldots, (\overline{x})_n \in \mu$, ezért az $\overline{x}, (\overline{x})_1, (\overline{x})_2, \ldots, (\overline{x})_n$ iterált pontok páronként különbözőek; vagyis $\overline{x}$ $(n+1)$-edrendű fixpont.

A 2,3 és a 2,4 esetpár is egymáshoz hasonlóan tárgyalható, ezért csak a 2,4 esetpárt részletezzük.

Az $f(x)$ függvény $[u, v]$ szakaszbeli folytonossága által most ebben az $[u, v] = \mu$ szakaszban van olyan e elsőrendű fixpont, amelytől balra $f(x) < x$, hacsak $x \geq u$. Tehát $f(x)$ minden értéket felvesz c és e között (2. ábra).



2. ábra

A tétel bizonyítását most megszakítjuk és megmutatjuk, hogy igaz az 1.1. segédtételhez analóg segédtétel.

1.2. Segédtétel. A tétel föltevései mellett bármely (természetes) n szám esetén van a δ szakasznak n-edrendű inverz-iterált szakasza az $[u, e]$ szakaszban. Az így előállítható δ_{-n} sorozat elemei közös belső pontot nem tartalmazó szakaszok.

Az 1.2. segédtétel bizonyítása. Most is először azt látjuk be, hogy ha a $[p, q] = \delta$ tetszőleges részszakasza a $[c, e]$ szakasznak, akkor mindig van $\delta_{-1} \subset [u, e]$, amelyre $(\delta_{-1})_1 = \delta$.

Mivel $c \leq p < q < e$ és $f(x)$ az $[u, e]$ szakaszban minden értéket felvesz c és e között, ezért mind a p, mind a q pontnak van az $[u, e]$ szakaszban inverz-iterált pontja. Tekintsük a p pont $[u, e]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt amelynek az abszcisszája a legnagyobb és jelöljük ezt p_{-1}-gyel; $p_{-1} = \max\limits_{u<x\leq e} \{x\}$, $f(x) = p$. A q pontnak az $[u, e]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül a p_{-1}-től jobbra a hozzá legközelebb esőt választva, jelöljük ennek

abszcisszáját q_{-1}-gyel; $q_{-1} = \min\limits_{p_{-1}<x\leq e} \{x\}$, $f(x) = q$. Legyen $[p_{-1}; q_{-1}] = \delta_{-1}$.

Éppúgy bizonyítható be mint az 1.1. segédtétel esetében, hogy $(\delta_{-1})_1 = \delta$.

Most már a δ szakaszból kiindulva képezhetjük — az előzőek szerint — a δ_{-1}; majd ebből kiindulva a δ_{-2} szakaszt,..., az így előálló δ_{-n} $(n = 1, 2\ldots)$ szakaszsorozatra $(\delta_{-n})_1 = \delta_{-(n-1)}$. Mint az 1.1. segédtételnél, úgy itt is indirekt bizonyítással igazolható, hogy bármely két ilyen inverziterált szakasznak nincs közös belső pontja. Éppúgy megmutatható mint 1.1-nél, hogy ha δ_{-n} és δ_{-n-k} állításunkkal ellentétben olyan szakaszpár, amelynek mindkét szakaszában vannak közös belső pontok, akkor δ és δ_{-k} is közös belső pontú szakaszok. Ez esetünkben azért lehetetlen, mert δ-nak nincs u-tól jobbra eső; δ_{-k}-nak pedig nincs u-tól balra eső belső pontja. Ezzel az 1.2. segédtételt bebizonyítottuk.

Ezután ebben az esetben a tétel bizonyítása — az 1.2. segédtétel szerint kialakított δ_{-n} szakaszsorozattal — szó szerint úgy folytatható és fejezhető be, mint az 1,3 esetpár esetén.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Irodalom

[1] A. RALSTON, A first course in numerical analysis, Mc Graw-Hill Inc., New York, (1969)

[2] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I., *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 16–47.

[3] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen II., *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 167–172.

[4] B. BARNA, Berichtigung zur Arbeit, Über die Iterationen reeller Funktionen II., *Publ. Math. Debrecen*, **20** (1973), 281–282.

[5] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen III., *Publ. Math. Debrecen*, **22** (1979), 267–278.

[6] L. BERG (Rostock), Über irreguläre Iteratione folgen, *Publ. Math., Debrecen*, **17** (1971), 112–115.

[7] TIEN-YIEN LI and L. JAMES A. YORKE, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* (10) **82** (1975), 985–992.