Két kombinatorikai identitás általánosítása

FEHÉR ZOLTÁN

Abstract. (A generalization of two combinatorial identities) In this paper we formulate and prove two combinatorial identities for Gauss' binomial coefficients which are generalized forms of known combinatorial identities.

Legyen n természetes szám és $i = 0, 1, \ldots, n-1$, akkor érvényesek az

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i} 2^{n-i}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = 0 \tag{2}$$

egyenlőségek (lásd [2], 6. old., lásd [3]).

Ez a cikk az (1) és (2) identitások általánosítását tartalmazza a Gauss-féle binomiális együtthatók felhasználásával.

Gauss-féle binomiális együtthatónak (lásd. [1], 35. old.) nevezzük az

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-k+1} - 1)}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^k-1)}$$

kifejezést, ahol n és k a $0 < k \leq n$ feltételt kielégítő egész számok. A q olyan valós szám, melyre $q^\alpha - 1 \neq 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$. Továbbá $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ és $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, ha nem teljesül a $0 \leq k \leq n$ egyenlőtlenség. A Gauss-féle binomiális együtthatókra teljesül, hogy ha $q \to 1$, akkor $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \to \binom{n}{k}$.

A következő két tétel általánosítja az (1) és (2)-t, mert ha $q \to 1$, akkor a tételben szereplő állítások megegyeznek a Newton-féle binomiális együtthatóra fent megadott két kombinatorikai identitással.

1. Tétel. *Legyen n természetes szám. Akkor minden $1 \leq i < n$ természetes számra érvényes*

$$\sum_{k=i}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} q^{(k-i)(k-i-1)/2} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \prod_{j=1}^{n-i} (1 + q^{j-1}). \tag{3}$$

Bizonyítás. A definíció segítségével könnyen belátható, hogy

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i \\ k-i \end{bmatrix}.$$

Ebből adódik, hogy

$$\sum_{k=i}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot q^{(k-i)(k-i-1)/2} = \sum_{k=i}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i \\ k-i \end{bmatrix} q^{(k-i)(k-i-1)/2} =$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n-i \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2}.$$

Mivel

$$(1+x)(x+qx)\cdots(1+q^{n-1}x) = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{n(n-1)/2} x^n$$

(lásd [1], 36. old.), akkor $x = 1$ választással kapjuk a (3) egyenlőséget.

A 2. tétel bizonyításához felhasználjuk a következő segédtételt.

Lemma. *Legyen k nemnegatív egész szám és x valós szám. Legyen*

$$P_k(x) = \begin{cases} (x-1)(x-q)\cdots(x-q^{k-1}), & \text{ha } k \geq 1, \\ 1, & \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

Akkor

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} q^{(k-i)(k-i-1)/2} x^i. \tag{4}$$

Bizonyítás. Legyen $P_k(x) = p_{k,0} + p_{k,1}x + \cdots + p_{k,k}x^k$ és határozzuk meg a $p_{k,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ együtthatókat.

Felhasználjuk az

$$(x - q^{k-1})P_k(qx) = (q^k x - q^{k-1})P_k(x)$$

egyenlőséget. Tehát

$$(x - q^{k-1})(p_{k,0} + p_{k,1}qx + \cdots + p_{k,k}q^k x^k) =$$
$$= (q^k x - q^{k-1})(p_{k,0} + p_{k,1}x + \cdots + p_{k,k}x^k).$$

Innen $i = 1, 2, \ldots, k$ esetben kapjuk

$$q^{i-1}p_{k,i-1} - q^{k+i-1}p_{k,i} = q^k p_{k,i-1} - q^{k-1}p_{k,i},$$

vagyis

$$p_{k,i} = \frac{q^{k-i+1} - 1}{q^i - 1}\left(-q^{i-k}\right)p_{k,i-1}.$$

Ezzel a rekurziós formulával valamennyi együttható meghatározható az abszolút tagból kiindulva. Az abszolút tagot a polinom felírásából kapjuk meg. Tehát

$$p_{k,0} = (-1)^k q^{k(k-1)/2}$$

és minden $i = 1, 2, \ldots, k-2$ számra

$$p_{k,i} = \frac{q^{k-i+1} - 1}{q^i - 1}(-q^{i-k})\begin{bmatrix} k \\ i-1 \end{bmatrix}(-1)^{k-i+1}q^{(k-i+1)(k-i)/2} =$$
$$= \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}(-1)^{k-i}q^{(k-i)(k-i-1)/2}.$$

Továbbá $p_{k,k} = 1$ és $p_{k,k-1} = -\begin{bmatrix} k \\ k-1 \end{bmatrix}$. Ezzel a (4) egyenlőséget igazoltuk.

2. Tétel. *Legyen n tetszőleges természetes szám és i olyan egész szám, hogy $0 \leq i < n$. Akkor*

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}q^{(k-i)(k-i-1)/2} = 0. \tag{5}$$

Bizonyítás. Jelöljük (5) bal oldalán álló összeget $a_{n,i}$-vel, akkor

$$a_{n,i} = \sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}q^{(k-i)(k-i-1)/2} =$$
$$= \sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-i \\ k-i \end{bmatrix}q^{(k-i)(k-i-1)/2} =$$
$$= \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\begin{bmatrix} n-i \\ j \end{bmatrix}q^{j(j-1)/2}.$$

Vegyük észre, hogy $i = 0$ esetben

$$a_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2}. \tag{6}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$a_{n,i} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n-i \\ j \end{bmatrix} (-1)^j q^{j(j-1)/2} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} a_{n-i,0}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le i < n.$$

Elegendő belátni, hogy $a_{k,0} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ esetben. Mivel

$$\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k-i \end{bmatrix},$$

ezért a $P_k(x)$ polinom értéke $x = 1$ esetben

$$P_k(1) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} q^{(k-i)(k-i-1)/2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{bmatrix} k \\ k-i \end{bmatrix} q^{(k-i)(k-i-1)/2} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2}.$$

A kapott kifejezést összehasonlítva (6)-tal, kapjuk $P_k(1) = a_{k,0}$. Viszont $x = 1$ értékre

$$P_k(1) = (1-1)(1-q)\cdots(1-q^{k-1}) = 0.$$

Tehát $a_{k,0} = P_k(1) = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Irodalom

[1] PÓLYA GY.—SZEGŐ G.: Feladatok és tételek az analízis köréből I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[2] M. KMET'OVÁ, T. ŠALÁT, Metóda mrežových bodov v kombinatorike, *Matematické Obzory* **40** (1993), 1–10.

[3] N. J. VILENKIN: Kombinatorika. (2. kiadás), Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1987.

UNIVERSITY OF EDUCATION
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FARSKÁ 19
94974 NITRA, SLOVAKIA