Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 121–126*

EGY FELMÉRÉS TANULSÁGAI

Sashalminé Kelemen Éva (EKTF, Hungary)

Abstract: In this paper we are analyzing a proficiency test written by mathematics major college students. It is obvious by the test that the clarification of the rudiments of logic are needed.

Néhány megjegyzés az első évfolyamos matematika szakos tanárképző főiskolai hallgatók logikai ismereteiről

A főiskolai hallgatók többéves oktatása (geometria, logika, elemi matematika) során szerzett negatív tapasztalataim késztettek arra, hogy felméréseket készítsek az intézményünkbe bekerülő hallgatók logikai ismereteiről. Dr. Rédling Elemérnek a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolán a logikai fogalmak témakörében végzett felmérését ([2]) olvasva, kiváncsi voltam arra, hogy a leendő matematikatanárok milyen alapokkal rendelkeznek.

Az első felmérést 1993-ban készítettem az akkori első évfolyam felével, 65 hallgatóval. Ekkor a logika oktatása az első év első félévében történt, így képet kapva arról, hogy melyek a főbb hiányosságok, tudtam, hogy mire kell koncentrálni az anyag tárgyalásakor. 1994-től a „Halmazelmélet és matematikai logika" előadásai a harmadik évre kerültek, s az alapvető logikai fogalmakat a hallgatók az első évfolyamon, az analízis, ill. algebra tárgyak keretén belül ismerik meg. 1996-ban az elsőéves hallgatóknak egy jobb képességű csoportjával ismét megírattam a felmérőt (az első elemi matematika gyakorlaton).

Tanulságok

Mielőtt a felméréseket elemezném, szeretném részletesebben megindokolni, hogy az eredetileg csak a saját munkámat elősegítő elemzést miért tartom szükségesnek közzétenni.

A matematika szakra jelentkező diákok képessége, felkészültsége évek óta egyre gyengébb, s ez nem csak főiskolánkon van így.[4] Későbbi visszajelzések alapján tudjuk, hogy sok közepes képességű, de szorgalmas hallgatónkból jó, lelkiismeretes tanár lett, tehát megfelelő alapokkal és kellő szorgalommal a matematika szak elvégezhető. Az utóbbi pár évben azonban egy egyre erősődő negatív tendencia figyelhető meg a hallgatóink körében. Az első pár hét, hónap után, mivel van rá lehetőség, leadják a matematika szakot, nem gondolva a következményekkel, hogy egy szakos fizika, kémia, földrajz (!) stb. szakos tanárként hogyan tudnak majd elhelyezkedni.

A szakleadás egyik oka a középiskolai és a főiskolai matematika tanulás, tanulási módszer közti különbség. Egy hallgató konkrétan meg is fogalmazta a lényeget. Elmondta nekem, hogy ő azért választotta ezt a szakot, mert szerette a matematikát, és ezt nem kellett tanulni a középiskolában. Itt a főiskolán viszont sokat kell tanulni, ő nem erre számított!

A többségnek valóban gondot okoz a definíciók, tételek, bizonyítások, „értelmes" elsajátítása. Vannak akik bemagolják az anyagot (még az ábrázoló geometriai szerkesztéseket is !), de ha belekérdez a tanár az egyes lépések miértjébe, „elvesznek". Nem tudnak matematikát tanulni; nem tudják megragadni a definíciók lényegét, nem látják a különbséget tétel és definíció között, stb.

Még rosszabb a helyzet a nem matematika szakosok matematika oktatásánál. A gazdaságismeret, a számítástechnika stb. szakosok matematika tanításával kapcsolatos problémákra itt nincs mód bővebben kitérni, de a nehézségeket jelezheti az a tény, hogy a számítástechnika szakra jelentkezők töbsége nem is tudja, hogy neki a felvétel után egy évig matematikát is kell tanulnia. (Nem egy történelem—számítástechnika szakos „dicsekedett" már nekem azzal, hogy kettesre érettségizett matematikából). Külön cikk témája lehetne az itt alkalmazható módszerek tárgyalása, ugyanis elgondolkodtatóak a Vízvári Béla [4] által leírtak, azaz hogy ha egy ilyen szaknak a felét kibuktatja egy matematikus előadó, akkor eltűnik egy másik szak adott évfolyamra eső költségvetési támogatásának a fele.

Visszatérve a logikai alapokhoz, az általános iskolai oktatásnál kell kezdenünk. A logika elemeinek tanítása évek óta szerepel a tantervben, de eléggé elsikkad a tanítás során.

Több tanítványom is írt szakdolgozatot arról, hogy a logika elemei hogyan találhatók meg, dolgozhatók föl az általános iskolai anyagban. Néhányan írattak felmérőket is, (főleg nyolcadik osztályban) és sajnos az ott tapasztalt negatívumok jó része jelentkezik a főiskolai hallgatóknál is. Gondot jelentett például néhány esetben állítások tagadásának megfogalmazása; ez még a hallgatóinknál is így van, hiszen sokuk szerint a „Mindenki tud úszni" állítás tagadása a „Senki sem tud úszni". (Hogyan épülhet erre az indirekt bizonyítás?). Problémás volt még a „ha ... akkor" típusú állítások és megfordításuk vizsgálata. Sokan azonosnak tekintik a kettőt, az implikáció (kondicionális) és az ekvivalencia (bikondicionális) közötti különbséget jobban kellene hangsúlyozni. (A nem matematika szakosoknál gyakori, hogy az említett tipusú állításokban az „akkor"-t időhatározóként fogják fel s kezdenek úgy definíciót, hogy pl. „Egy sorozat konvergens ,akkor amikor ... "). A felmérésekből is kiderült, hogy szükség lenne a bizonyítási igény felkeltésére a nyolcadik osztályban; sok tanuló csak „megérzés alapján" próbálta megoldani a feladatokat, nehezen tudta leírni, indokolni a gondolatmenetét. Játékos, egyszerűbb feladatokkal ez is gyakorolható.[1]

A középiskola elvégzése után a diákoknak a definíciók, tételek, a különböző bizonyítási módszerek lényegével tisztában kellene lenniük, az első éves hallgatók körében végzett, a bevezetőben említett vizsgálatok azonban azt mutatták, hogy nem mindenkinél világosak ezek a fogalmak.

Az első órán (45 perc alatt) megíratott felmérő tíz feladatból állt, melyeket úgy válogattam, hogy meglehetősen átfogó képet kapjak a diákok logikai ismereteiről. A részletesebb elemzés az 1992-ben íratott anyagra vonatkozik.

1. Egy egyenes merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges. Fejezze be a következő mondatot úgy, hogy az előző tagadása legyen!

Egy egyenes nem merőleges a síkra, ha ...

A megoldások több mint fele rossz volt. A kiegészítések többségében a „... ha a sík egyik egyenesére sem merőleges” megfogalmazást írták.

2. Az alábbi állítások közül melyek igazak? Melyek egymás megfordításai?

(a) Az egybevágó háromszögek egyenlő területűek.

(b) Ha a háromszögek nem egyenlő területűek, akkor nem egybevágóak.

(c) Ha a háromszögek egyenlő területűek,akkor egybevágóak.

A logikai értékét 80%-uk jól határozta meg, ami a kérdések egyszerű geometriai hátterét tekintve nem jó arány. A második kérdésre a hallgatók több mint fele (!) azt válaszolta, hogy az (a) kijelentés megfordítás a (b). (A (b) állítás az (a) kontrapozíciója, így nyilvánvaló, hogy az implikáció, annak megfordítása és a kontrapozíció kapcsolatát a továbbiakban tisztázni kellett.)

3. Nem igaz, hogy minden páratlan egész szám prímszám.

Fejezze be a következő mondatot úgy, hogy az előző állítással azonos jelentésű legyen! Vannak egész számok ...

Ez volt a legnagyobb arányban (92%) jól megoldott feladat. A kvantort tartalmazó állítások tagadásának ismeretéről túl szép eredményt mutat, valószínű, hogy a túlságosan is könnyű matematikai alap miatt.

4. Az alábbi két állítás ugyanazt fejezi-e ki ?

Nem igaz, hogy Kati szőke és kékszemű.

Kati nem szőke vagy Kati nem kékszemű.

Mindössze másfél százalék volt a jó válasz. A hibásak többségét indokolták is, pl.így: „Nem igaz, mert a másodikban lehet választani, míg az első kijelenti, hogy nem igaz.” „ Úgy lenne jó, hogy Kati sem nem szőke, sem nem kékszemű.” „ Nem ugyanaz, mert az és és a vagy szónak más az értelme.” Csak néhány példát ragadtam ki a rossz válaszok közül, de ezekből is látható, hogy a konjunkció tagadása mennyire nem világos. (Itt a $\rceil(A \ \wedge \ B) \sim\rceil A \vee \rceil B$ de Morgan törvényt kellett volna alkalmazni, ami nem középiskolai anyag, de hasonló jellegű átlagfogalmazások előfordulhattak.)

5. Milyen következtetést lehet levonni az alábbi két állításból? (Kaphat vagy nem kaphat Kati engedélyt az Olimpián való részvételre?)

(1.) Ha Kati jó eredményeket ér el a sportban, kaphat engedélyt az Olimpián való részvételre.

(2.) Kati nem ér el jó eredményeket a sportban.

Ez eléggé nehéz feladat volt, mert a két állítás alapján kaphat (nincs az a feltétel, hogy „... de csak akkor”), de megfogalmazódik, hogy akkor mit keresne az Olimpián? A megoldások nyolcvan százaléka hibás volt, ezek közül néhány: „Ha nem ér el jó eredményt, semmiképp sem kaphat.” Születtek nem egyértelmű válaszok is: „Valószínű, hogy nem kap.” „Vagy kap, vagy nem.” „Mindkettő lehetséges, attól függ, hogy szükség van-e rá.” „Kaphat engedélyt, de nem kap.”

6. Következik-e a negyedik állítás az előző háromból?

(a)

(1.) Ha a 2 prímszám, akkor ez a legkisebb pozitív prím?

(2.) Ha a 2 a legkisebb pozitív prímszám, akkor az 1 nem prímszám.

(3.) Az 1 nem prímszám.

(4.) A 2 prímszám.

Ez is elég „fogós” feladat volt, s bár a hallgatók 52%-a jó választ adott, azaz, hogy nem következik, de nem vagyok benne biztos, hogy ez mindenkinél tudatos, helyesen megindokolt válasz lett volna. Többen azt írták, hogy igen, a 2 prímszám; nem azt vizsgálták, hogy következik-e az utolsó állítás az előzőekből, hanem azt, hogy igaz vagy sem.

(b) Következik-e az első két állításból a harmadik ?

(1.) Ha holnap hideg lesz, a kabátomat fel fogom venni, ha az ujját megjavítom.

(2.) Holnap hideg lesz, de a kabát ujját nem javítom meg.

(3.) Holnap a kabátot nem fogom felvenni.

A megoldások 80%-a rossz volt, és még a „nem következik” helyes állítást is többen rosszul indokolták. Pl. „Nem következik, mert ha hideg van a szakadt kabátot is föl lehet venni”. Az alábbi válaszadó „belegondolta” azt, amitől valóban helyes lenne a következtetés: „Igaz, mert **csak akkor** fogja fölvenni, ha megvarrta az ujját.”

Az 5-ös és 6-os feladatokra adott válaszok elgondolkodtathatnak arról, hogy egy bonyolultabb bizonyítás megértése, visszaadása milyen nehézséget jelent azoknak, akik az akkor és csak akkor fogalmakkal ennyire nincsenek tisztában. Hangsúlyozni kell, hogy csak azt használhatja föl a bizonyítás során, amit korábban már igaznak elfogadott, vagy bizonyított, „belegondolni” dolgokat nem lehet! (A következtetések vizsgálatánál, a formalizálásnál ezekre a feladatokra visszatértünk.)

7. Jók-e az alábbi definíciók?

(a) A deltoid olyan négyszög, melynek két átlója merőleges egymásra, és a nagyobb átló a négyszög szimetriatengelye.

(b) A váltószögek olyan szögpárok, melyek szárai páronként párhuzamosak.

Az (a) kérdésre 73%-ban rossz választ kaptam, amelynek oka főleg a geometriai ismeretek hiányossága. Volt olyan megoldás, hogy „... igaz, ha a deltoid konvex, nem igaz, ha a deltoid konkáv.”

A második részre adott válaszoknak is a 66%-a rossz volt, szerepelt közöttük pl. olyan, hogy „igaz, csak hiányos".

8. Mi az indirekt bizonyítás lényege?

A válaszok 67%-a jó volt, de feltűnt, hogy nagyon sokan nem általánosságban fogalmazták meg a bizonyítás jellemzőit, hanem írtak egy konkrét példát rá. (A többség bizonyította, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális.) Ez a gondolatmenet a nem matematika szakosoknál is gyakran előfordul, egy tételt konkrét példán keresztül „igazolnak".

A rosszak között több a teljesen zavaros: pl.„Felteszük az állítás helyességét, és azt bizonyítjuk be, hogy nem igaz." „Az ellenkezőjét bizonyítom be". Néhányan összekeverték a teljes indukcióval.

9. Az alábbi mondatok közül melyik az egyenlőszárú háromszög definíciója?

(a) Egy háromszög egyenlő szárú ha van két egyenlő oldala.

(b) Az egyenlő szárú háromszög alapján levő szögek egyenlőek.

(c) Az egyenlő szárú háromszögnek van szimetriatengelye.

Ez volt a legmegdöbbentően rossz eredményt hozó feladat, mindössze 28% volt a jó válasz. A legtöbben, (40%) a (b)-t tekintették definíciónak , voltak akik a (b)-t és (c)-t, sőt 13% mindhármat megjelölte definícióként. Néhányan „tanulságos" megjegyzéseket is fűztek a megoldásukhoz: „Egyik sem, mert egyik sem egzakt "; „Mindegyik igaz, de a speciális esetet egyik sem zárja ki"; „Mindegyik igaz, de egyik sem zárja ki az egyenlő oldalú háromszöget."

10. Fogalmazza meg az alábbi tételt másképpen!

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek az összege 180°.

Mindössze ketten fogalmazták meg a „szükséges és elégséges" kifejezést használva; 35%-uk jól, két részre bontva „ha akkorral"; 47%-uknál viszont csak az egyik implikáció szerepelt, a megfordítás már nem! A rossz válaszok közül néhány: „Nem lehet ilyen röviden és egyértelműen átfogalmazni"; „Egy négyszög húrnégyszög, ha meg tudom szerkeszteni a köré írható kör középpontját "; „Egy négyszöget akkor nevezünk húrnégyszögnek, ha a szemközti szögeinek összege 180°; „Ha egy négyszög sarkai egy köríven helyezkednek el, akkor az húrnégyszög."

A négy évvel későbbi, kisebb létszámú csoportban készült felmérés jobb eredményt mutatott, de a legjellemzőbb hibák ott is előfordultak. A negyedik feladatot csak a csoport negyede oldotta meg jól, a hatost és a kilencest is csak a fele.

A vizsgálatokban nem olyan nagy számú hallgatóság vett részt, hogy komoly következtetéseket lehetne levonni, (nem is ez volt a cél), mindenesetre az elemzések rámutattak néhány problémára. Az egyes kérdések utáni megjegyzésekből is látható, hogy komoly gond van a definíciók pontos megfogalmazásával, lényegének megértésével, a tételek pontos megfogalmazásával (még később is előfordul, hogy tételben szerepel a „nevezzük" kifejezés!) a „szükséges és elégséges feltétel", az ekvivalencia ismeretével.

Mi a megoldás? A felsőoktatás módszertana eddig eléggé elhanyagolt terület volt, arra építve, hogy a legértelmesebb diákok kerülnek be az egyetemekre és főiskolákra, és ők „maguk is meg tudják tanulni" a leadott anyagot. Mára viszont megváltozott a helyzet, s valamit tennünk kell, hogy megelőzzük a szakleadást, lemorzsolódást.

Visszatérve a logikai fogalmakra, nagy segítség lenne, ha már általános, és főleg középiskolában is nagyobb figyelmet fordítanának ezek tisztázására. A főiskolán pedig „fel kell zárkóztatni" a gyengébb hallgatókat. (Szegeden „Matematikai praktikum" című tárgy keretében az első félévben ezt csinálják.) Nálunk az elemi matematika óráin lehetne ezt megvalósítani, a matematikai gondolkodást fejleszteni.

Szándékomban áll ez év szeptemberében a nem matematika szakos, számítástechnikus hallgatók első matematika előadásán egy, a fentiekben elemzett felméréshez hasonlót íratni. (Mindenesetre, ennek az eredményétől függetlenül, a szemesztert az előzőekben említett, problémás fogalmak tisztázásával kezdem.)

Irodalom

[1] Gyarmatiné Kocsis, M.: A bizonyítási igény felkeltése az általános iskolában. *A Matematika Tanítása*, 1986/2.

[2] Rédling E.: Felmérések a logikai fogalmak témaköréből. *A Matematika Tanítása*, 1988/6.

[3] Szendrei J.: Matematikai feladatgyűjtemény I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[4] Vízvári, B.: Új didaktikai és erkölcsi dilemmák a matematika egyetemi oktatásában. *A Matematika Tanítása*, 1998/5.

Sashalminé Kelemen Éva
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4-6.
H-3300 Eger, Hungary