Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** (1999) 99–103

A 2^n-EDRENDŰ FIXPONTOKRÓL

Bálint Szepessy (EKTF, Hungary)

Abstract: (On the fix point of order 2^n)

Let $f(x)$ be a continuous real valued function on the interval $[a,b]$ which maps the interval onto itself. If $c \in [a,b]$ and for the n^{th} iterated function of f we have $f_n(c) = c$, but $f_r(c) \neq c$ for $1 \leq r < n$, then we say that c is a fix point of f of order n. In the paper we prove the following result. Suppose that $a < d < b$, $f(a) = a$, $f(d) = b$, $x < f(x) < b$ for $a < x < d$, $f(x)$ is monotonicaly increasing in the interval $[f(b), d]$ and $f(x)$ is monotonicaly decreasing in $[d, b]$. Furthermore we suppose that n is the smallest natural number for which $f_{2^n}(b) \geq d_{-(2^n-1)}$, where d_{-k} denotes k^{th} inverse iteration of d. Then there exists a fix point of order 2^n in the interval $[a,b]$ and if there is another fix point, then its order is at most 2^{n+1}.

Bevezetés

Legyen $f(x)$ iterációs alapfüggvény az $[a,b]$ $(a < b)$ zárt intervallumon, azaz olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott intervallum minden belső pontjában folytonos, a kezdő-, illetve a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. Nincs olyan részintervalluma az adott intervallumnak, amelyben $f(x) =$ konstans teljesül.

Az $f_0(x) = x, f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f(f(x)), \ldots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \ldots$ függvényeket az $f(x)$ függvény nulladik, első, második, …, n-edik, … iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Ezek a függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal.

Ha $f(c) = c$ teljesül, akkor a c pont az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontja. Ha $f_n(c) \neq c$, $n = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén, de $f_n(c) = c$, akkor a c pont az $f(x)$ függvény n-edrendű fixpontja. Ekkor, amint az ismeretes, $f(c) = c_1, f(c_1) = c_2, \ldots, f(c_{n-1}) = c_n$ iterált pontok egy n-edrendű ciklust alkotnak.

Iterációelméletből megjelenő dolgozatok az utóbbi időben a magasabb rendű fixpontok eloszlásával, a szinguláris, reguláris és irreguláris pontok és intervallumok vizsgálatával, ezenkívül bizonyos lokális tulajdonságok vizsgálatával és különböző alkalmazásokkal foglalkoznak. (Az x_0, $(x_0 \in [a,b])$ pont szinguláris, ha (x_n) végtelen iterációs pontsorozat csak véges számú páronként különböző pontból áll, reguláris, ha (x_n) iterációs pontsorozat páronként különböző pontokból áll, és a pontsorozatnak véges számú torlódási pontja van, végül x_0 irreguláris pont, ha az (x_n) pontsorozatnak végtelen sok torlódási pontja van.)

A [2] és a [3] azt a kérdést vizsgálta, hogy milyen iterációs alapfüggvény esetén vannak tetszőlegesen magas rendszámú fixpontok; a [4] azt taglalja, hogy milyen feltételek mellett alkothatnak intervallumot az első és a magasabb rendű taszító fixpontok. Ebben a dolgozatban azt az elméleti és gyakorlati vonatkozásban is felmerülő kérdést vizsgáljuk, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén adható a fixpontok rendszámára felső korlát.

A 2^n-edrendű fixpontokról

Tétel. *Ha $a < d < b$ és $f(x)$ olyan iterációs alapfüggvény az $[a, b]$ szakaszon, amelyre $f(a) = a$, $f(d) = b$, $a < x < d$ esetén $x < f(x) < b$, és $f(x)$ az $[f(b), d]$ intervallumon monoton növekvő, a $[d, b]$ intervallumon monoton csökkenő, valamint n az a legkisebb (természetes) szám amelyre $f_{2^n}(b) \geq d_{-(2^n-1)}$ teljesül akkor $f(x)$ függvények az $[a, b]$ intervallumban vannak 2^n-edrendű fixpontjai, és legfeljebb 2^{n+1}-edrendű fixpontjai lehetnek.*

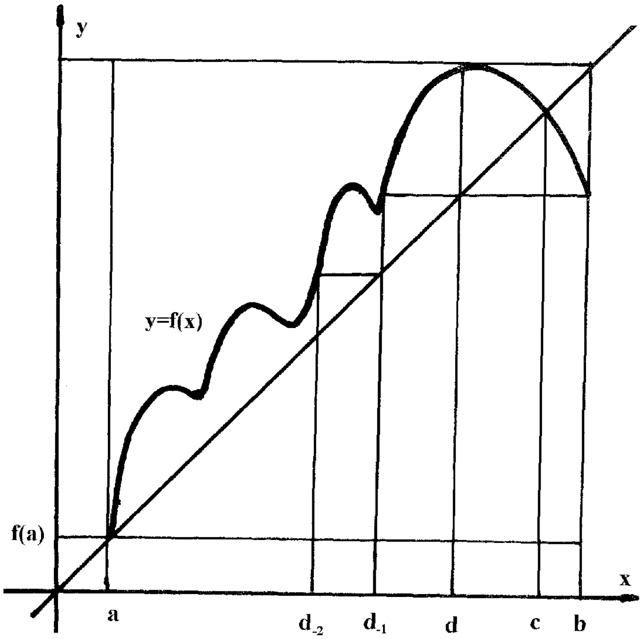
Megjegyzés. Amint az ismeretes $n \geq 1$ esetén $d_{-(2^n-1)} = \max\limits_{x\in[d,b]}(x)$, ahol $f_{2^{n-1}}(x) = d_{-(2^{n-1}-1)}$ azaz $d_{-(2^n-1)}$ a legnagyobb abszcisszaérték a $[d, b]$ intervallumban, amelyre $f_{2^{n-1}}(x)$ függvény $d_{-(2^{n-1}-1)}$ értékű.

Bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukcióval.
$n = 0$ esetén $f(x)$ az 1. ábrán látható alakú, ahol $f(b) = b_1 \geq d$.

Mivel $f(x)$ az $[a, d]$ intervallumon folytonos és minden $[a, b]$ intervallumbeli értéket felvesz ezért létezik ebben az intervallumban a d pontnak legalább egy inverz iterált pontja. Tekintsük a d pontot inverz iteráltjai közül — az $(a, d]$ intervallumban — azt, amelynek abszcisszája a legnagyobb, jelöljük ezt d_{-1}-gyel; $d_{-1} = \max\limits_{a<x<d}(x)$, $f(x) = d$. Ezután az előbbi eljárásnak megfelelően a $d_{-2} = \max\limits_{a<x<d_{-1}}(x), f(x) = d_{-1}, d_{-3}, \ldots, d_{-n}, \ldots$ inverz iterált pontokat.

A $(d_{-(i+1)}, d_{-i}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ intervallumok egyszeresen és teljesen lefedik a $(a, d]$ intervallumot, így az $(a, d]$ intervallum bármely pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja marad ebben az intervallumban, és ez legfeljebb i, ha a kiindulási pont a $(d_{-(i+1)}, d_{-i}]$ intervallumban van. Lesz tehát olyan x_j $(j > i)$ iterált pont, amelyik a $(d, b]$ intervallumba esik. Ezt az intervallumot $f(x)$ önmagára vagy önmagába képezi le, így x_j minden iteráltja ebben az intervallumban marad, ezért magasabb rendű fixpontok csak ebben az intervallumban léphetnek fel.

Ismeretes, hogy ha egy intervallumot a benne monoton csökkenő iterációs alapfüggvény önmagára vagy önmagába képezi le, akkor ebben az intervallumban legfeljebb másodrendű fixpontok lehetnek ([3]).



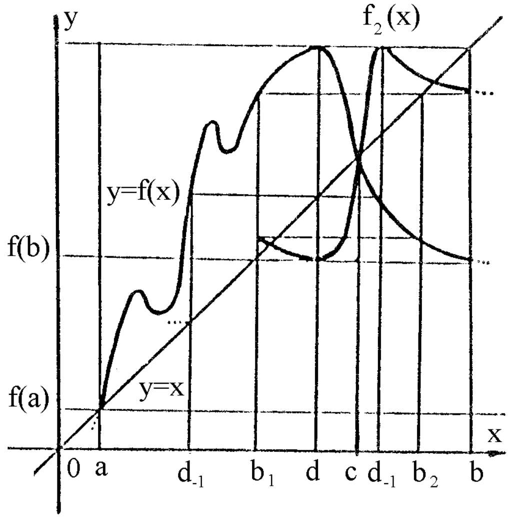
1. ábra

Tehát ($n = 0$ esetén) az $[a, b]$ intervallumban van elsőrendű (c) és nem lehet másodrendűnél magasabb rendszámú fixpont, azaz teljesül az állítás.

$n = 1$ esetén is az előzőekhez hasonlóan megmutatható, hogy magasabb rendű fixpontok csak az $[f(b) = b_1, b]$ intervallumban lehetnek (2. ábra).

Tekintsük $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek a $[b_1, b]$ intervallumon. Monoton növekvő (csökkenő) függvény monoton csökkenő (növekvő) függvénye (iteráltja) monoton csökkenő, valamint monoton csökkenő függvény monoton csökkenő függvénye monoton növekvő [3], ezért $f_2(x)$ a $[b_1, d]$ intervallumban monoton csökkenő, és $f_2(d) = b_1 < d$ miatt egy pontban metszi a $g(x) = x$ egyenest, a $[d, d_{-1}]$ intervallumban monoton növekvő, és $f_2(d_{-1}) = b$, így ebben az intervallumban lehetnek másodrendű fixpontok; a $[d_{-1}, b]$ intervallumban monoton csökkenő, tehát lesz egy másodrendű fixpont (2. ábra).

Ha a $[d, d_{-1}]$ intervallumban vannak másodrendű fixpontok, akkor legyen $e = \max\limits_{d<x<d_{-1}}(x)$, $f_2(x)$ és első iteráltja e_1. Az $[e_1, e]$ intervallumot a benne monoton növekedő $f_2(x)$ függvény önmagára képezi le, így $f_2(x)$-nek csak első, azaz $f(x)$-nek csak másodrendű fixpontjai lehetnek. Az $[e, b]$ intervallumban $f_2(x)$-nek ($n = 0$ eset alapján) lesznek elsőrendű, de legfeljebb másodrendű fixpontjai lehetnek, tehát $f(x)$-nek van másodrendű, de negyedrendűnél magasabb rendű fixpontjai nem lehetnek ebben az intervallumban.



2. ábra

A $[b_1, e_1]$ intervallumban sem lehet negyedrendűnél magasabb fixpont, mert ha $\widehat{c}$ ilyen, akkor $\widehat{c}_1$ iterált pont $\widehat{c}_1 \in [e, b]$ is ilyen lenne ($\widehat{c}, \widehat{c}_1$ ugyanabban a ciklusban van), ami az előzőek szerint lehetetlen.

Ha a $(d, d_{-1}]$ intervallumban nincsenek másodrendű fixpontok, akkor a $[c, b]$ illetve a $[b_1, c]$ intervallumban (c elsőrendű fixpont) az előzőekhez hasonlóan látható be, hogy vannak másodrendű, de nincsenek negyedrendűnél magasabb rendű fixpontok.

Tegyük fel, hogy $n - 1$ ($n \geq 1$) esetén igaz az állítás (indukciós feltevés). Megmutatjuk, hogy n esetén is teljesül.

Mint az előzőekben most is megmutatható, hogy magasabb rendű fixpontok csak a $[b_1, b]$ intervallumban lehetnek. Ebben az intervallumban ($n = 1$ esethez hasonlóan képezett) $f_2(x)$ iterációs alapfüggvénynek az indukciós feltevés értelmében vannak 2^{n-2}-edrendű fixpontjai, de legfeljebb 2^{n-1}-edrendű fixpontjai lehetnek, ami azt jelenti, hogy $f(x)$ iterációs alapfüggvénynek a szóban forgó intervallumban van 2^n-edrendű fixpontja, azonban 2^{n+1}-edrendűnél magasabb rendű fixpontjai nincsenek. Indirekt úton ($n = 1$ esethez hasonlóan) könnyen belátható, hogy a $[b_1, c]$ intervallumban sem lehetnek $f(x)$ iterációs alapfüggvénynek 2^{n+1}-edrendűnél magasabbrendű fixpontjai.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Adott n természetes számhoz konstruálható tehát olyan iterációs alapfüggvény, amelyre vannak 2^n-edrendű fixpontok, de 2^{n+1}-edrendűnél magasabb rendű fixpontok nincsenek.

Irodalom

[1] Ralston, A., A first course in numerical analysis, *McGraw-Hill. Inc.*, New York, 1970.

[2] Tien-Yien Li and L. James, A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, **(10)** 82 1975, 985–992.

[3] Szepessy B.: A magasabb rendű fixpontokról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio mathematicae*, **XII.** 1994, 9—15.

[4] Szepessy B.: A taszító fixpontokról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio mathematicae*, **XXIII.** 1996, 54—59.

Bálint Szepessy
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary