Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **27** *(2000) 85–100*

A MATEMATIKAI ANALÍZIS OKTATÁSA SORÁN TAPASZTALT PROBLÉMÁKRÓL ÉS HIBÁKRÓL II.

Rados Mihály (Eger, Hungary)

Abstract. Those problems are illustrated which are studied in the first part of this paper (Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 26, 1999. 115–120.) with some typical mistakes [9].

1. Bevezetés

A címben és az absztraktban jelzett problémakör kimeríthetetlen, a teljes feldolgozás lehetetlen, mivel diákjaink leleményessége ezen a téren nem ismer korlátokat. Célunk csak az lehet, hogy egy kis „gyomlálást" végezve a hibák között, világosabban lássuk, mi van még hátra. Nekünk, tanároknak ügyelnünk kell arra is, hogy ha a hibákat a hallgatók előtt nyomatékosan ismertetjük, nehogy ezen hibák bevésésének megerősítését eredményezze!

A feladatok és megoldások során a kitűzött fő cél kiemelése érdekében sokszor eltekintünk például a függvények precíz megadásától, a függvény és függvényérték (f, illetve $f(x)$) következetes megkülönböztetésétől, vagy annak vizsgálatától, hogy a kijelölt művelet mely halmazon, intervallumon végezhető el.

2. Primitív hibák, durva tévedések

Ezeket meg sem kellene említeni, ha nem fordulnának elő, mert nem az általános iskolára, hanem szinte az alsó tagozatra vonatkoztathatók:

— egyenlőtlenségek szorzása negatív számmal, reciprok képzése;

— közös nevezőre hozás (!);

— tört osztása egész számmal, osztás törttel;

— a hatványozás azonosságai stb.

Egyes hallgatók vagy abszolút képzetlenségük vagy teljes felületességük miatt követik el ezeket a nem elnézhető hanyagságokat, de erősen kétséges, hogy lesz-e belőlük matematika szakos tanár!

3. Elemi hibák

3.1. Függvények paritása

Ha elhangzik a tanári kérdés: „Amennyiben egy függvény nem páros, ekkor paritás szempontjából milyen?" — sokszor jön automatikusan a válasz: „akkor páratlan"! Elég könnyű rávezetni őket, hogy vannak se nem páros, se nem páratlan függvények. Például:

$$f(x) := x^2 + 5x + 7$$
$$g(x) := e^x$$
$$h(x) := \sin x + \cos x$$
$$i(x) := \ln x$$

A logaritmusfüggvény például negatív valós számokra és $x = 0$-ra nincs is értelmezve. Most következhet az összetett függvényekkel való bonyolítás, s ez visszavezet a definíció alkalmazásának szükségességére.

(a) $f(x) := \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1})$; $D_f = \mathbf{R}$ páros vagy páratlan? $f(-x) = f(x)$, tehát páros!

(b) $f(x) := \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ páros vagy páratlan?

Megoldás: $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot (\sqrt{x^2+1}+x)\right] = \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x)$ Tehát a függvény páratlan! Megjegyezzük, hogy ez a függvény az area sinus hiperbolicus függvény.

(c) Bizonyítsuk be, hogy minden függvény, amely egy 0-ra szimmetrikus intervallumon van értelmezve, megadható egy páros és egy páratlan függvény összegeként!

Megoldás: $f\colon I \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Legyen $\varphi(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ és $\psi(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Mivel φ páros, ψ páratlan, ezért igaz az állítás.

3.2. Törtek

Feladat: Egy tört értéke növekszik vagy csökken, ha számlálójához és nevezőjéhez ugyanazt az $a \in \mathbf{R}^+$ számot hozzáadjuk?

Megoldás: A hallgatók univerzális választ akarnak megfogalmazni azonnal, pedig itt egy diszkusszióra van szükség!

Legyen az adott tört: $\frac{p}{q}$, ahol $p, q \in \mathbf{Z}$; $q \neq 0, q \neq -a$. Vizsgáljuk a tört értékének növekedését! $\frac{p+a}{q+a} - \frac{p}{q} = \frac{a(q-p)}{q(q+a)} > 0$, azaz $\frac{p+a}{q+a} > \frac{p}{q}$.

(α) ha $q > 0$ és $q > p$.

(β) ha $p < q < -a$.

(γ) ha $-a < q < 0$ és $q < p$.

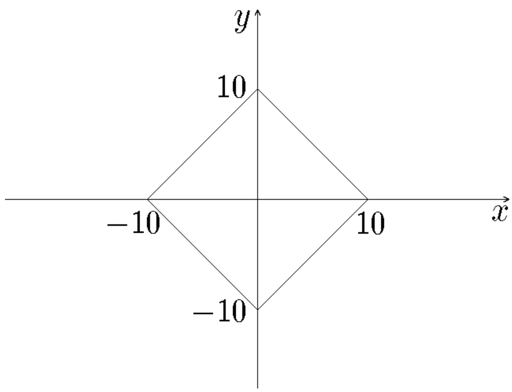
Megjegyzés: $a = 1$-re (γ) nem teljesülhet. Hasonlóan kiválasztható, hogy mikor csökken a tört értéke.

3. Feladat: Ábrázoljuk a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben a következő síkgörbét:

$$|x| + |y| = 10, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

Megoldás: sokszor ötletszerűen ábrázolnak alakzatokat, nem tudatos az abszolútérték jelének elhagyása síknegyedeként!

A megoldás:



4. Feladat: Mennyi az $f(x) := x^2$ függvény görbéje és az x-tengely közötti síkidom területe a $[0, a]$ intervallumon? $a \in \mathbf{R}^+$

Nyilván: $T = \int_0^a x^2 dx = \frac{a}{3}^3$. És ha $a = 3$ cm?! $T = \frac{27}{3}$ cm^3; Ezt a problémát szokás dimenzionális csapdának is nevezni; az integrál csak egy valós számot ad eredményül. Például

$$\int_0^a x^5 dx = \frac{a^6}{6} \qquad T = \frac{1}{6} \cdot 3^6 \cdot \mathrm{cm}^6$$

lenne az eredmény?

5. Feladat: Elemezzük az alábbi függvénysorozat konvergenciáját!

$$f_n(x) := \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \quad D_f = [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}$$

A hallgatók nehezen tesznek különbséget a pontbeli, intervallumon pontonkénti, illetve az egyenletes konvergencia között!

Megoldás:

(α) Nyilván: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$, így $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $\quad f(x)=0$.

$$\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right| = \frac{x}{1+n^2x^2} < \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2x}$$

Vizsgáljuk a küszöbszámot!

$$\left|\frac{1}{n^2x}-0\right| < \varepsilon, \quad x\neq 0, \quad \varepsilon\in\mathbf{R}^+$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{x\cdot\varepsilon}} =: N(\varepsilon, x)$$

(β) Tehát ez a konvergencia teljesül, $f_n(x) \longrightarrow f(x)=0$ pontonként.

Nem teljesül-e az egyenletes konvergencia is?!

$0 \le fn(x) = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n}$, mivel $(nx-1)^2\ge 0$. Ezzel $fn(x)-0<\varepsilon$, ha $n>N(\varepsilon)$. Összefoglalva: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens, ahol $f(x) = 0 \quad \forall x\in[0,1]$ esetén.

4. Differenciálszámítás

Nem foglalkozunk azokkal a hibákkal, amelyekben a hallgatók nem tudják az elemi függvények deriváltjait, illetve hányaveti módon alkalmazzák a megismert deriválási szabályokat. Tipikus esetként megemlítjük, hogy gyakran összetévesztik a hatványfüggvény és az exponenciális függvény fogalmát, ebből eredően ezek deriválását! Egy példa csak erre:

$$f\colon \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := 5^{\ln 2x}$$

Hibás megoldás:

$$f'(x) = \ln 2x \cdot 5^{(\ln 2x)-1}$$

Jó megoldás:

$$f'\colon \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f'(x) = 5^{\ln 2x}\cdot \ln 5\cdot \frac{1}{2x}\cdot 2.$$

[7]-55. o.

Külön kiemelheti a tanár, hogy a deriválást ezzel befejeztük, de célszerű a derivált függvény értékét a lehető legegyszerűbb alakban felírni. Egy példa erre:

$$f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\quad f(x) := x + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} = \cdots = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. Határozzuk meg az alábbi függvény derivált függvényét!

$$f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\quad f(x) := \begin{cases} 1-x, & \text{ha } -\infty < x < 1 \\ (1-x)(2-x), & \text{ha } 1 \le x \le 2 \\ -(2-x), & \text{ha } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Megoldás: Nyilván, a probléma az $x = 1$ és $x = 2$ helyeken van, sok a tanácstalanság.

$$f(1) = 0 = f(2)$$

$$\lim_{n\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{n\to 1-0} \frac{1-x-0}{x-1} = -1 = f'_-(1)$$

$$\lim_{n\to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{n} \to 1+0 \frac{(1-x)(2-x)-0}{x-1} = -1 = f'_+(1)$$

Tehát létezik $f'(1)$, és $f'(1) = -1$. Hasonlóan belátható, hogy $f'(2) = 1$. Így

$$f' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\quad f'(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 1 \\ 2x-3, & \text{ha } 1 \le x \le 2 \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$

[4]-95.o.

A tanárnak külön ki kell térnie a következő kérdések tisztázására:

— folytonos-e a függvény;
— deriválható-e a függvény (hol);
— a derivált függvény folytonos-e (hol)?

2. A formalizmus veszélyére figyelmeztet például a következő feladat:

$$f(x) := \ln\left(\ln \frac{1}{1+x^2}\right).$$

Mivel egyenlő $f'(x)$?

A képzelt megoldás, amelyik hibás:

$$f^{'}(x) = \frac{1}{\ln \frac{1}{1+x^2}} \cdot (1+x^2) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$f^{'}$ az $x = 0$ kivételével mindenütt ($\mathbf{R} \setminus \{0\}$) értelmezhető, viszont $D_f = \emptyset$!

3. Egy érdekes feladat (Eulertől származik): Melyik a nagyobb: e^π vagy π^e?

A hallgatók nem tudják, hogy matematikai rutin ismereteikhez hogyan kapcsolják ezt a kérdést.

Megoldás:

$$f\colon (0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := x - e \cdot \ln x$$

$$f(e) = 0$$

$$f^{'}(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$$

$$f^{''}(x) = \frac{e}{x^2}$$

Mivel $f^{''}(x) > 0$, ezért $f^{'}$ növekvő! $f^{'}(e) = 0$

Ha	$0 < x < e$	: $f^{'}(x) < 0$;
	$e < x$	: $f^{'}(x) > 0$, tehát f ekkor növekvő: $f(x) > f(e)$, azaz $x - e \cdot \ln x > 0$
ha	$x = \pi$	$\pi - e \cdot \ln \pi > 0$ $\pi > \ln \pi^e$ $e^\pi > \pi^e$ a válasz!

Már dicséretet érdemel az, aki zsebszámológépével megvizsgálja a közelítő értékeket:

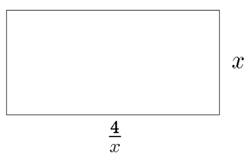
$$e^\pi \sim 23,1406,$$

$$\pi^e = 22,4591 \qquad \text{(Aristo M 85.)}$$

Ők is érzik azonban, hogy ez nem teljes megoldás, szükség van a fenti bizonyításra.

4. Feladat: A $T = 4$ egység területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

Megoldás:



$x > 0$, $\frac{4}{x} > 0$. A kerület: $k(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right)$

A függvénydiszkusszió segítségével könnyű eldönteni, hogy ennek a függvénynek az $x = 2$ értéknél van minimuma, azaz ha a téglalap négyzet.

A kiegészítő kérdéseknél kerülnek zavarba a hallgatók: — És melyiknek a kerülete a legnagyobb? Különböző, bár részigazságokat tartalmazó válaszok hangzanak el: „nem tudom megállapítani”, „bizonytalan”, „akármi lehet”, stb. Nem világos előttük, hogy a feladatot, a problémát megoldottam, ha azt mondom, hogy „nincs ilyen téglalap”, azaz a megoldás az, hogy nincs megoldás!

Segít a megértésben az, ha ábrázoljuk az $y = k(x)$ síkgörbét a koordinátarendszerben, vagy ha elemezzük a függvény határértékét:

$$\lim_{x\to 0+0} 2\left(x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$$

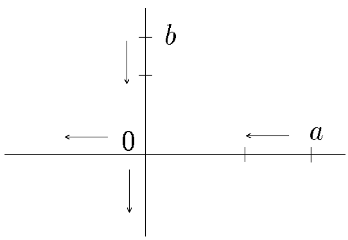
$$\lim_{x\to +\infty} 2\left(x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$$

mivel a függvény folytonos a $(0, +\infty)$-on.

5. A függvények szélsőértékeinek deriválás segítségével történő meghatározásakor félreértés miatt érdekes problémával találkozott egy diák.

Feladat: Két, egymásra merőleges egyenesen egymás felé mozog egy-egy pont. Induláskor az első „a”, a második „b” távolságra van a két egyenes O metszéspontjától. Az első $v_1 = 30\frac{m}{s}$, a második $v_2 = 50\frac{m}{s}$ egyenletes sebességgel halad. Mely időpillanatban lesznek a legközelebb egymáshoz?

Megoldás: (a) Ha a távolságot az egyenesek mentén értjük, a következő eredményre jutunk.



(α) t idő múlva a távolság:

$$y := f(t) = (a - 30t) + (b - 50t) = a + b - 80t$$

$$f^{'}(t) = -80$$

Mivel $f^{'}(t) \neq 0$, a függvénynek nincs szélsőértéke!(?)

(β) Tételezzük fel, hogy $\frac{a}{30} > \frac{b}{50}$; $\frac{b}{50} < t < \frac{a}{30}$. Ha a második ($b$-ből) már áthaladt O-n, az első még nem, akkor a közöttük lévő távolság t idő múlva:

$$y := g(t) = 50t - b + a - 30t = 20t + a - b.$$

Mivel $g^{'}(t) = 20 \neq 0$, ekkor sem lehet szélsőértéke a függvénynek!(?)

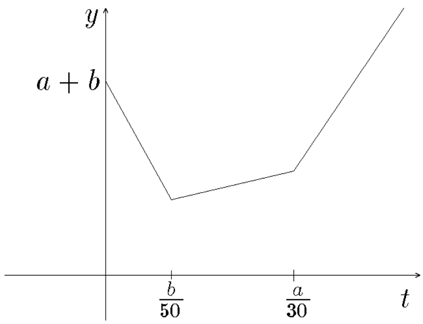
(γ) Ha mindkét pont áthaladt az O ponton $\left(t > \frac{a}{30}\right)$, a közöttük lévő távolság:

$$y := h(t) = 50t - b + 30t - a = 80t - a - b$$

$$h^{'}(t) = 80 \neq 0$$

miatt ismét nem lehet a függvénynek szélsőértéke!(?)

Tehát α, β, γ eset alapján nem létezik olyan időpont, amikor a két pont közötti távolság minimális? Ábrázoljuk a két pont közötti távolság grafikonját vázlatosan.



Ezen a rajzon y-nak mutatkozik minimuma a $t = \frac{b}{50}$ időpillanatban! Mi lehet a probléma oka? Ez vezeti rá a hallgatókat arra, hogy vizsgálni kell a függvény $(f(t), g(t), h(t))$ differenciálható-e a $t = \frac{b}{50}$ és a $t = \frac{a}{30}$ pontokban! Kiderül, hogy nem! Ettől függetlenül létezik minimuma és a feltétel miatt $\frac{a}{30} > \frac{b}{50}$ a $t = \frac{b}{50}$ pontban, ahol értéke:

$$t = a - \frac{3}{5}b.$$

Ez is illusztrálja, hogy az úgynevezett „töréspontokban", „könyökpontokban", sőt szakadási helyeken is lehet a függvénynek szélsőértéke, csak nem az adott pontbeli differenciálhányados segítségével kell és lehet ezt elemezni.

(b) Természetesen a valódi feladatot az

$$F(t) = \sqrt{(a - 30t)^2 + (b - 50t)^2}$$

függvény diszkussziójával lehet megoldani.

6. Feladat: $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) := |x| + |y| - |x + y|$. Létezik-e a két parciálás differenciálhányados a (0, 0) pontban, és ha igen, mivel egyenlőek?

Megoldás: Mivel a hallgatók megjegyezték, hogy az abszolútértékfüggvény a 0 pontban nem differenciálható, szinte automatikusan adják a választ: „ezek a parciális differenciálhányadosok nem léteznek”.

A helyes válasz az ellenkező, amelyet a definíció alkalmazásával sikerül belátnunk.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| + |0| - |x + 0| - |0| - |0| + |0 + 0|}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |x|}{x} = 0.$$

Hasonlóan kapjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Megjegyzés: az $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) := |x| + |y|$ függvény folytonos a (0,0) pontban, de ott nem léteznek parciális deriváltjai ([2]-250. o.).

7. Feladat:

$$f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) folytonos-e a (0, 0) pontban?

(b) f-nek léteznek-e parciális differenciálhányadosai a (0, 0) pontban?

Megoldás: (a) Könnyű belátni, hogy f folytonos mindenütt, míg a problémás (0, 0) pontban nem. Alkalmazzuk például az átviteli elvet:

(a1) Ha $y_n = 0$, $x_n \to 0$, akkor

$$f(x_n, y_n) = \frac{2x_n \cdot 0}{x_n^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{\substack{x_n \to 0 \\ y_n = 0}} f(x_n, y_n) = 0.$$

Hasonlóan

$$\lim_{\substack{y_n \to 0 \\ x_n = 0}} f(x_n, y_n) = 0.$$

(a2) Ha $x_n = y_n$, $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$

$$f(x_n, y_n) = \frac{2x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1$$

$$\lim_{x_n = y_n \to 0} f(x_n, y_n) = 1.$$

Mivel (a1) és (a2) nem egyezik meg, a függvény valóban nem folytonos a $(0,0)$-ban.

(b) Egyváltozós függvények esetében annak idején a hallgatók megtanulták, hogy a folytonosság szükséges feltétel egy adott $x_0 \in D_f$ pontbeli differenciálhatósághoz. Ezért gyakran kapjuk a felületes választ erre a kérdésre: „mivel a függvény itt nem folytonos, nem is defferenciálható parciálisan”. Pedig a helyes válasz:

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x\cdot 0}{x^2+0}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

Hasonlóan:

$$f_y^{'}(0,0) = 0.$$

5. Integrálszámítás

Miután megismerkednek bonyolult integrálási módszerekkel is, a hallgatók adott példa esetében hajlamosak a parciális integrálás, a helyettesítéssel való integrálás, vagy a racionális függvények integrálása módszereket erőltetni, feleslegesen ([7]—83. o.).

1. $\int \frac{1}{x\cdot \ln x} dx = ?$

Megoldás: $f(x) := \frac{1}{\ln x}$, $g^{'}(x) := \frac{1}{x}$, innen $f^{'}(x) = -\frac{1}{x\ln^2 x}$, $g(x) = \ln x$. Így $\int \frac{1}{x\cdot \ln x} dx = 1 + \int \frac{1}{x\cdot \ln x} dx$. Mivel visszajutottunk az eredeti integrálra, tanácstalanságukban abbahagyták a további próbálkozásokat.

A helyes megoldás:

$$\int \frac{1}{x\cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

2. $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = ?$

Parciális integrálással próbálkozva:

$$g(x) := \frac{1}{\cos^2(x^2)}, \quad f^{'}(x) = x$$

$$g^{'}(x) = \frac{4x\cdot(\sin(x^2))}{\cos^3(x^2)}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Így $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2)} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{4x\cdot\sin(x^2)}{\cos^3(x^2)} dx$. Ez a megoldás nem látszik célravezetőnek, mert egy új, bonyolultabb integrálra jutottunk.

A helyes megoldás:

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{\cos^2(x^2)}dx = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{tg}(x^2)+C.$$

3. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = ?$

Többen az integrált új változó bevezetésével, majd racionális függvény integrálására jutva próbálják kiszámítani.

$$t := e^x; \quad x = \ln t; \quad dx = \frac{1}{t}dt.$$

Ezzel

$$I = \int \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{t^2+1}{t(t^2-1)}dt.$$

Következik a parciális törtekre való bontás:

$$\frac{t^2+1}{t(t^2-1)} = \frac{A}{t}+\frac{B\cdot t+C}{t^2-1}, \quad A, B, C, \in \mathbf{R}.$$

Innen az ismert módon: $A=-1,\ B=2,\ C=0$. Így

$$I = -\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2t}{t^2-1}dt = -\ln|t| + \ln|t^2-1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t^2-1}{t}\right| + C = \ln|e^x - e^{-x}| + C^*, \quad C^* \in \mathbf{R}$$

Az eredmény jó, de sok a felesleges munka!

A rövidebb, de korrekt megoldás a következő. Alkalmazzuk az ismert szabályt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

Tehát

$$I = \ln|e^x - e^{-x}| + C.$$

Ugyancsak meglepi a hallgatókat, hogy egy kis figyelmesség milyen frappáns lehetőséget ad a sikerhez.

4. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

Sokan helyettesítéssel oldják meg a feladatot. $\sin z := x; \quad dx = \cos z\cdot dz.$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin z}{\cos z}\cdot\cos z\cdot dz = \int \sin z dz =$$

$$= -\cos z + C = -\sqrt{1-\sin^2 z} + C = -\sqrt{1-x^2} + C,\ \ C \in \mathbf{R}.$$

Kis odafigyeléssel sokkal elegánsabban megkapjuk ugyanezt a helyes eredményt!

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot xdx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot (-2x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{+\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

5. $\int \frac{x}{e^x}dx =?$

Mivel a hallgatók ismerik, vagy meg fogják ismerni, hogy az $\int \frac{e^x}{x}dx$ integrál nem elemi függvény, mechanikusan válaszolják, ez sem az! Pedig a megoldás parciálisan integrálva:

$$\int \frac{x}{e^x}dx = \int x \cdot e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C,\quad C \in \mathbf{R}$$

$$f(x) := x \qquad g^{'}(x) = e^{-x}$$

$$f^{'}(x) = 1 \qquad g(x) = -e^{-x}$$

Egy függvény Riemann-integrálhatósága és primitív függvényének létezése sok nyitott kérdés tisztázását teszi szükségessé a hallgatók előtt.

6. Legyen

$$F\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R},\quad f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0,\\ 0, & \text{ha } x = 0\end{cases}$$

és

$$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$F^{'}(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos\frac{1}{x^2}, \qquad \text{ha} x \neq 0$$

$$F^{'}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = 0,\quad \text{ha } x = 0$$

$$f := F^{'}$$

Így f-nek F primitív függvénye, de f nem Riemann-integrálható, mert nem korlátos. Nehezebben ugyan, de lehet konstruálni olyan f függvényt is, amelynek egy $[a,b]$-ban van primitív függvénye, korlátos, mégsem Riemann-integrálható ([8], 295. o.).

7. Létezik olyan f függvény, amelyik Riemann-integrálható valamely $[!a, b!]$-on és integrálfüggvénye differenciálható, de nincs primitív függvénye. Például:

$$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \operatorname{sign}^2 x$$

Az f korlátos, egy hely kivételével folytonos, tehát Riemann-integrálható, ugyanakkor nincs primitív függvénye ([8], 77. o.).

8. Ha az f függvény Riemann-integrálható és létezik primitív függvénye az $[a, b]$-on, következik ebből, hogy f folytonos $[a, b]$-on?

Megoldás: nem!

Legyen

$$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(α) f az $x = 0$ pontban nem folytonos

(β) f korlátos, és egy hely kivételével folytonos, tehát Riemann-integrálható

(γ) f-nek van primitív függvénye is:

$$F\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

9. Az integrálás során problémát okoz, ha például a forgástest térfogatát az x tengely, illetve az y tengely körüli forgatás esetében számoljuk.

Feladat: Az $y = x^{\frac{3}{2}}$ Neil-féle „szemikubikus parabolát” az $x \in [0, a]$ intervallumon megforgatjuk mindkét tengely körül. Létezik-e olyan $a \in \mathbf{R}^+$, amelyre a két forgástest térfogata egyenlő?

Megoldás:

$$V_x[0, a] = \pi \cdot \int_0^a x^3 dx = \pi \cdot \frac{a^4}{4}$$

A hiba itt következik, mert a V_y számításakor is ugyanezen integrálási határokat veszik:

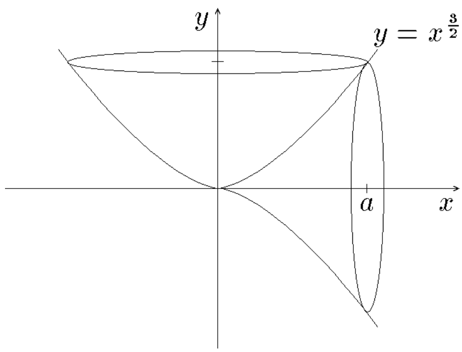
$$V_y = \pi \cdot \int_0^a x^2 \cdot dy \qquad (?)$$

Helyesen:

$$V_y[0, f(a)] = \pi \cdot \int_0^{a^{\frac{3}{2}}} x^2 dy = \pi \cdot \int_0^{a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{4}{3}} dy = \frac{3}{7} \cdot \pi \cdot a^{\frac{7}{2}}$$

$V_x[0, a] = V_y[0, a^{\frac{3}{2}}]$ teljesül, ha $\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{3}{7}\pi \cdot a^{\frac{7}{2}}$. Tekintsünk el a triviális $a = 0$ esettől. Mivel $a \neq 0$, a megoldás: $a = \frac{144}{49}$ ([4], 199. o.).

Rajzban:



10. Az integrálási módszerek ismertetése során kitérünk arra, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek nincs primitív függvényük, például:

$$\int \frac{e^x}{x}dx; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx; \quad \int \frac{1}{\ln x}dx \quad \ldots ([1],\ 306.\ \text{o.})$$

Viszont érdekesség céljából megemlítjük, hogy itt is lehetőség van az elemi függvények körének kibővítésére. Az $\int \frac{1}{\ln x}dx$ függvényt — amely a matematika különböző fejezeteiben gyakran előforduló függvény — szokás integrál logaritmus függvénynek nevezni, és értékét $Li(x)$-szel jelölni. De azzal, hogy a

$$Li(x) := \int \frac{1}{\ln x}dx$$

jelölést használjuk, nem válik az integrál kiszámítása egyszerűbbé, csak egyszerűbben jelölhetővé.
Hasonlóan $\int \frac{\sin x}{x}dx$ legyen az integrál szinusz függvény, és jelölése:

$$Si(x) := \int \frac{\sin x}{x}dx.$$

„Felvetődik a kérdés: adott elemi függvényről hogyan lehet eldönteni, hogy primitív függvénye elemi függvény vagy sem? Pontosabban megfogalmazva: olyan eljárást keresünk, amelynek alkalmazásával tetszőleges elemi függvényre a fenti kérdés véges sok lépésben megválaszolható. Egy nem egészen 10 éves eredmény szerint (a jegyzet 1977-ben íródott) ilyen eljárás nem létezik! Ehhez természetesen szükség van az eljárás, vagy más szóval algoritmus fogalmának precíz meghatározására. Szemléletesen olyan eljárásokról lehet itt szó, amelyek számítógéppel (mégpedig

„ideális”, azaz végtelen memóriájú számítógéppel) elvégezhetők” ([8], 104. o.). Ugyanakkor megadott intervallumon létezik Riemann-integrálja a függvénynek, mert például azon folytonos:

$$\int_1^5 \frac{e^x}{x}dx,$$

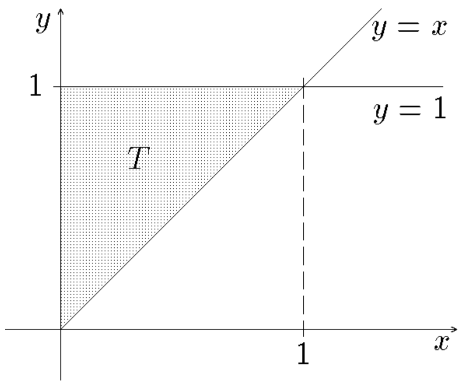
de ezek szerint nem számítható ki a Newton—Leibniz-formulával, csak közelítő módszerekkel.

11. Példa: számítsuk ki a következő kettős integrált az adott T tartományon:

$$f(x,y) := \frac{x\cdot \sin y}{y}; \quad D_f := \{(x,y)\in \mathbf{R}^2, y\neq 0\}$$

$$T := \{(x,y)\in \mathbf{R} : 0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$$

Szemléltessük a T tartományt:



f folytonos a T-ben a (0, 0) pont kivételével, de korlátos, így integrálható a T normál tartományon.

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{x\cdot \sin y}{y}dy\right)dx = \int_0^1 x\cdot \left(\int_x^1 \frac{\sin y}{y}dy\right)dx$$

Érdeklődést kelt a hallgatók körében, hogy az integrálás sorrendjének felcserélésével eredményre jutunk.

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{x\cdot \sin y}{y}dy\right)dx = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{x\cdot \sin y}{y}dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left(\int_0^y x dx \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 y \cdot \sin y dy$$

Parciálisan integrálva:

$$I = \frac{\sin 1 - \cos 1}{2}$$

Még itt is sokan tanácstalanok! Mivel egyenlő a $\sin 1$? Sajnos gyakran kapjuk a választ, hogy $\frac{\pi}{2}$-vel, vagy $\sin 1°$-kal!

Irodalom

[1] Banach, S.: Differenciál- és integrál-számítás. Tankönyvkiadó, Szeged, 1964.

[2] Császár Á., Valós analízis I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[3] Gyemidovics, B. P.: Matematikai analízis feladatgyűjtemény. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[4] Fazekas F.: Határozott integrál A.V* (egyetemi segédkönyv). Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[5] Rimán J.: Matematikai analízis I. EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[6] Rimán J.: Matematikai analízis feladatgyűjtemény I—II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[7] Tupikov, V. A.: Osibki v resenii zádács po viszsej matematike, Viszsaja Skola, Minszk, 1976.

[8] T. Sós Vera: Analízis I/2. Integrál–számítás. ELTE TTK Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[9] Rados M. : A matematikai analízis oktatása során tapasztalt problémákról és hibákról I., Acta Acad. Paed. Agriensis, Sect. Math. 26 (1999), 115-120.

Rados Mihály
Institute of Mathematics and Informatics
Eszterházy Károly College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary