SZEPESSY BÁLINT

A HALMAZELMÉLET NÉHÁNY FILOZÓFIAI PROBLÉMÁJA

A tanárképző főiskolán a "Matematikai bevezetés" c. tantárgy keretében oktatott halmazelméleti anyag filozófiai vonatkozásairól

Az 1984-ben bevezetett tantervet megelőzően a halmazelmélet elemeit az "Algebra és számelmélet" c. tantárgy keretében tanítottuk első- és másodéves főiskolai hallgatóknak. 1984-től a "Matematikai bevezetés" elnevezésű tantárgyba került át. Ezt a tantárgyat -- amelynek jelentős része halmazelmélet -- egy féléven át heti 4 órában oktatjuk hallgatóinknak.

Ebben az összeállításban a halmazelmélet néhány filozófiai problémájával foglalkozunk. Nem térünk ki a halmazelmélet alapvető fogalmainak, tételeinek ismertetésére, hiszen ezeket a főiskolai tankönyvek tartalmazzák. A dialektikus materializmust, annak alapvető tételeit is ismertnek tételezzük föl. Az említésre kerülő filozófiai vonatkozások sem mélységükben sem összességükben nem teljesek, már csak azért sem, mert a halmazelmélet filozófiai vonatkozásai szinte kimeríthetetlenek. Az összeállítást a halmazelméleti alapok oktatása során a filozófiai vonatkozások hangsúlyozásához egy kiindulási alapnak szánjuk, amely a hallgatók dialektikus materialista gondolkodásmódjának kialakításához, illetve rögzítéséhez nyújt segítséget, (eredeti összeállításunk bővebb és részletesebb).

1/ G. Cantor a XIX. század második felében dolgozta ki a halmazelméletet. Ebben az elméletben alapfogalom a halmaz fogalma, amely nem más mint annak a kapcsolatnak az absztrakt megfogalmazása, amely bizonyos dolgokból álló együttes és maguk az együttest alkotó dolgok között fennáll. Ebből a fogalomból kiindulva Cantor kidolgozta a halmazelméletet.

Az oktatás folyamatában a halmaz fogalmának kialakítása után összehasonlítást szoktunk tenni a halmazelméleti és a köznapi értelemben használt halmazfogalom között. A két fogalom közötti főbb eltérések a következők:

- A halmaz nem azonos elemeinek összességével, hanem önálló gondolati objektum, az elemeinek a gondolati burka.
- A halmaz valamely elemének vagy elemeinek része vagy tulajdona a halmaznak csak akkor eleme, ha ezt a halmaz definíciója kimondja (például a háromszögek halmazának a háromszögek súlyvonalai nem elemei).
- Nem kell a halmaz elemeinek egyneműeknek lenni.
- Egy halmaznak akármilyen "sok" vagy "kevés" eleme lehet.
- A halmazfogalom megengedi olyan halmaz létezését is, amelynek egyetlen eleme sincs (üres halmaz). (Az üres halmaz fogalmát mind köznapi, mind tudományos értelemben használjuk.)
- A halmaznak akár végtelen sok eleme is lehet.

Álljunk meg itt néhány gondolat erejéig!

Mint ismeretes az emberiség fokozatosan a gyakorlat útján jött rá, hogy a lezártnak, véglegesnek tekintett világkép nem állja meg a helyét, s fokozatosan a világ kimeríthetetlenségéről, végtelenségéről szóló nézetek terjedtek el. Bár az érzéki tapasztalat nem halad túl a végesen, akár a térről, az időről, a dolgok és jelenségek egyetemes összefüggéséről van szó, de a tapasztalat tanúsítja, hogy van tovább is. Így alakult ki a végtelen filozófiai fogalma a térre, az időre, a megismerésre vonatkozóan. A matematikában nincs univerzális végtelen. Mint a filozófiában, úgy a matematikában is a végtelen jelzőként szerepel, esetenként más és más, de mindig szabatosan körülhatárolt jelentésben. A matematikai végtelen a filozófiai végtelen mennyiségi, formai kifejeződése, amely visszahat a filozófiai végtelen fogalmának fejlődésére, s a matematikán belül önállóan is tovább fejlődik. A végtelen tapasztalaton, szemléleten kívül eső fogalom vizsgálata csak gondolati úton, gondolati eszközökkel lehetséges.

A végtelen fogalmának legegyszerűbb matematikai fellépése a természetes számok sorozatának végtelensége. Ez a fajta végtelen megfelel annak, amit a filozófiában potenciális végtelennek neveznek. Ez egy folyamat korlátlan folytatásának a lehetősége. (Ez a végtelenség mint modell

szerepet játszott a tér és idő végtelenségére vonatkozó nézetek fejlődésében is.) A halmazelméletben a potenciálisan végtelen fogalma mellett megjelenik az úgynevezett aktuális végtelen fogalma is.
Egy végtelen halmazon azt is értjük, hogy a halmaz készen, lezártan tartalmaz végtelen sok elemet, már nem lehet hozzátenni, elvenni belőle úgy, hogy a halmaz meg ne változna. Ez a végtelen Arisztotelész nyomán az aktuális végtelen.
A végtelen halmazok az aktuális végtelen matematikai megfelelői.
Az aktuális végtelennek, azaz a végtelen halmazoknak semmiféle empirikus vizsgálata nem lehetséges, hiszen ezek is a matematikai fogalomalkotás termékei.
A halmazelmélet jelentős részét a végtelen halmazok vizsgálata képezi.
- A halmaznak bármik lehetnek az elemei (köznapi értelemben halmaznak csak anyagi dolgok az elemei).

Itt is meg szoktunk állni néhány gondolat erejéig.

Az ember matematikai fogalomalkotó tevékenységének kiinduló bázisát az anyagi világban meglévő és a munkafolyamat során fellépő bizonyos természeti összefüggések képezik. A fejlődés során egyrészt társadalmi igények, másrészt a matematika belső fejlődése olyan feladatokat vetett fel, amelyeket a természetből leolvasott matematikai struktúrák keretében nem lehetett megoldani. Ekkor működésbe lépett az emberi fantázia. A természeti összefüggésekből absztrahált halmaz fogalmát kibővítették olyan új fogalmakkal, amelyek lehetővé tették a felmerült problémák kezelését, s elősegítette a matematika további fejlődését is. Az új fogalmak persze a tapasztalati eredetű fogalmakhoz kapcsolódtak és a rájuk vonatkozó igazságokat a tapasztalati fogalmakra érvényes igazságokból merítették. Az ember letér a tapasztalati útról, majd oda visszatérve útjának eredményét hasznosítja. ("Az eleven szemléletből az elvont gondolkodáshoz, és ettől a gyakorlathoz -- ez az igazság megismerésének, az objektív realitás megismerésének dialektikus útja". Lenin művei 38. köt. 155. old.).
Ez az út csak akkor járhat sikerrel, ha nem bánunk önkényesen a bevezetett fogalmakkal, a tapasztalati eredetű fogalmak legáltalánosabb, legalapvetőbb tulajdonságait visszük át az új fogalomra.

A halmazt eredetileg természeti összefüggésekből absztraháltuk, de ezen túlléptünk amikor azt mondjuk, hogy a halmaznak bármik lehetnek az elemei. Ez az egyszerű fogalombővítés problémákat okozott. Látni fogjuk, hogy az általánosított halmazfogalomra a halmaz tapasztalati fogalmából csak a legegyszerűbb igazságokat fogadhatjuk el, és persze azokat, amelyek ezekből logikai úton levezethetőek.

2/ Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz azonos. Halmazok egyenlőségének definiálása után a halmazok körében végzett műveleteket, ezek tulajdonságait vizsgáljuk. A halmazelméleti tételek jelentős része különböző "nevű" halmazok azonosságát, egyenlőségét állítja (Pl: $H \cup K \equiv K \cup H$, $(H \cup K) \cap L \equiv (H \cap L) \cup (K \cap L)$, stb.)
Az azonosság fogalmát a halmazelmélet is a formális logikából kölcsönözte. A formális logika az azonosság fogalmát két meghatározó tulajdonsággal jellemzi;

- minden dolog azonos önmagával
- ha a két dolog azonos egymással és az egyiknek megvan valamely tulajdonsága, akkor a másiknak is megvan az a tulajdonsága.

Eszerint minden halmaz önmagával azonos, sőt az azonosság logikai fogalmának megfelelően minden halmaz csakis önmagával azonos. Így ha két halmaz egyenlő egymással, akkor már nem is két halmaz, hanem egy. Persze ebből nem következik az, hogy halmazok azonosságának megállapítása egyszerű dolog. Egy halmazt elemei határoznak meg; de nem mindig úgy definiálunk egy halmazt, hogy felsoroljuk az elemeit (ez sok esetben kényelmetlen, ha végtelen sok van, akkor lehetetlen), hanem elemeit valamilyen tulajdonsággal írjuk le. Két vagy több tulajdonságnak lehet ugyanaz a terjedelme, így mód lehet ugyanazon halmaz többféle megadására. Annak fölismerése, hogy két különböző tulajdonsággal definiált (különböző nevű) halmaz ugyanaz, gyakran komoly munkát igényel.
Halmazelméletben halmazok azonosságát (egyenlőségét) gyakran úgy mutatjuk ki, hogy megmutatjuk: az egyik halmaz minden eleme, eleme a másiknak is és fordítva a másik halmaz minden eleme eleme az elsőnek is. (Ugyanis egy halmaznak csakis olyan tulajdonságait vesszük figyelembe a halmazelméletben, amelyek vissza vezethetők arra a tulajdonságra, hogy egy vagy több dolog a halmaz eleme. Ily módon, ha két halmaznak azonosak az elemei, akkor tulajdonságaik is megegyeznek.)
Mivel az anyagi valóság változik, azért nincsenek olyan tárgyak, amelyek

önmagukkal abszolut azonosak lennének még lényeges alapvető tulajdonságokban sem. Az azonosság nem elvont, hanem konkrét, vagyis belső különbségeket ellentmondásokat tartalmaz, állandóan "megszüntetve megőrzi" magát az adott feltételektől függő változás folyamatában. A tárgyak azonosítása, de akár halmazok azonosítása is előzetes megkülönböztetésüket feltételezi (lásd az említett tételeket).
Ez azt jelenti, hogy az azonosság, az egyenlőség elszakíthatatlanul összefügg a különbözőséggel és relatív.
A dolgok minden azonossága időleges jellegű. A halmazelméletben, de általában az absztrakt tudományokban az elvont a dolgok fejlődésétől elvonatkoztatott azonosságot azért használják, mert a megismerés folyamatában bizonyos körülmények között szükséges a valóság idealizálása. Tehát az azonosság mint filozófiai kategória a dolgok létezésének egy mozzanata, amely semmiképpen sem abszolut, de adott körülmények között meghatározó.
A mozgásban lévő világ jelenségeinek leírására az azonosság fogalma nem elegendő. Az azonosságok figyelembevétele nélkül azonban nincs emberi cselekvés, tudományos tevékenység.
Az azonosság akkor értékes, amikor különböző dolgok azonosságát állítja. Mint említettük a halmazelméletben is ezt tesszük. Az azonosság viszonylagosságát a halmazelmélet alkalmazásánál kell figyelembe venni.

3/ A részhalmaz és a valódi részhalmaz tárgyalása során a következőket érdemes kihangsúlyozni.

A halmazelméleti rész, a részhalmaz fogalma eltér a köznapi és filozófiai rész fogalmától. A halmazelméletben az egész is része önmagának. A köznapi és filozófiai értelemben használt rész megfelelője a valódi rész. Az eltérés oka az, hogy sokszor két halmaz közötti kapcsolatról csak annyit tudunk, hogy egyiknek minden eleme a másiknak is eleme, de a fordított tartalmazásra nincs információnk. A rész halmazelméleti fogalma: lehet hogy része, lehet hogy azonos vele. Azt, hogy egy halmaz valódi része a másiknak, úgy is kifejezhető, hogy az első része a másodiknak, de nem azonos vele. A véges halmazok és valódi részhalmazai körében érvényes a filozófiai egész és rész jól ismert dialektikus kapcsolata. Ennek illusztrálására idézünk Afanaszjev: "Az egész és részek dialektikájából" néhány mondatot.

"A világban tehát az anyagi képződmények szövevényes összefonódását, kölcsönhatását találjuk; e képződmények mindegyike egész az őt alkotó részekhez képest és rész ama egészhez viszonyítva, amelynek felépítésében alkotóelemként jelen van. Mindamellett a rész nem lehet egész önmagához képest, valamint ahhoz az egészhez képest, amelynek része. Az egész pedig nem lehet saját magának része, valamint részeinek a része".
Azt mondtuk, hogy véges halmazok körében érvényes az egész és rész dialektikus kapcsolata. Mi a helyzet a végtelen halmazok körében? Ezekről később szólunk.

4/ A halmazok számossága című anyagrész rengeteg filozófiai kérdést vet fel:

Legyen adott a halmazoknak egy R rendszere. Az R két halmazát -- mint tudjuk -- akkor nevezzük egyenlő számosságúnak, ha a két halmaz ekvivalens, vagyis, ha létezik egyik halmaznak a másikra való bijektív leképezése. A bijektív leképezéssel megtaláltuk azt az utat, amelynek segítségével véges halmazok számosságát meg tudjuk állapítani anélkül, hogy azokat megszámlálnánk. Véges halmazok esetében nem lényeges milyen módon történik a leképezés, véges halmazok összehasonlításánál a bijektív leképezés módja nem játszik szerepet. Ismeretes, hogy a halmazok számosságának azonossága ekvivalenciareláció. Egyenlő számosság alapján képezett egyes ekvivalenciaosztályokat véges halmazok esetén természetes számoknak nevezzük.
Valamely véges A halmazt akkor tekintjük egy B halmaznál, kisebb számosságnak, ha A ekvivalens a B halmaz egy valódi részhalmazával. Ekkor B halmazt nagyobb számosságúnak is nevezzük. Tudjuk, hogy ez a reláció rendezési reláció. Az is nyilvánvaló, hogy egy adott halmaz több elemmel rendelkezik bármelyik valódi részénél. Azaz a véges halmazok körében érvényes az a megállapítás, hogy az egésznek szükségszerűen nagyobbnak kell lennie a résznél. Persze halmazok körében a kisebb fogalmat nem is definiáltuk, csak számosságukra. Pontosabban tehát csak azt tudjuk mondani, hogy egy véges halmaz valódi részhalmazának számossága mindig kisebb a halmaz számosságánál.

A véges halmazok vizsgálata tehát a természetes számokhoz vezetett. A természetes számok összeadása, szorzása halmazok közötti műveletekre vezethetők vissza. Ismert, hogy halmazműveletek tulajdonságaival igazolhatóak a természetes számok összeadásának, szorzásának tulajdonságai is. A természetes számok aritmetikájának ismeretében a természetes számokból felépíthetjük az egész és racionális számokat, ahogy ezt a főiskolai algebra oktatása során tesszük. A természetes számokra, az egész és racionális számokra vonatkozó tételek halmazelméleti tételeknek is tekinthetők. Ezek filozófiai vonatkozásaival ebben az összeállításunkban nem foglalkozunk, hiszen az "Algebra és számelmélet filozófiai vonatkozásai" -- című gyűjteményünk ezekre már kitért.

Most mi a továbbiakban a végtelen halmazok vizsgálatát állítjuk előtérbe. A számosság fogalmának ismeretében érdemes (gyakorlati órán) néhány filozófus és matematikus véleményét ismertetni az aktuális és potenciális végtelenről:

Már Arisztotelész analizálta a potenciális és aktuális végtelen közötti különbséget. Csak a potenciális végtelen létjogosultságát ismerte el; elvetette az aktuális végtelen fogalmát. Abból, hogy minden lépés után van rákövetkező lépés -- akár számolásban, akár szakasz osztásban -- nem következik, hogy van utolsó "végtelenedik" lépés, azaz, hogy jogosult akár a természetes számok összességéről (halmazáról) mint egyszer s mindenkorra kész befejezett összességről, halmazról vagy akár egy szakasz pontjainak összességéről, mint sok lépésen át végzett osztás eredményeként kapott pontok összességéről beszélni. A matematikusok egészen a múlt századig mereven ragaszkodtak ehhez a felfogáshoz. Ennek következtében olyan történelmi korlátokat teremtettek, amelyek a végtelen halmazok kutatásának évezredekig útjában álltak.

A XVI. században Galilei adott hangot egy érdekes gondolatnak. Ő minden természetes számhoz hozzárendelte ennek a számnak a négyzetét. Ilyen módon egyetlen természetes szám és egyetlen négyzetszám sem maradt pár nélkül. Tehát a természetes számok halmazának egyik valódi részhalmazához való kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése jött létre. Ebből azonban Galilei nem azt a következtetést vonta le, hogy mind a két halmazhoz ugyanazt a számosságot kell hozzárendelni --, hanem visszariadt ettől az ellentmondástól, és úgy vélte a végtelenben feloldódnak az összes különbségek.

Leibniz és Spinoza ugyancsak behatóan foglalkoztak a végtelennel.

Spinoza tisztán deduktív módon geometriai módszerrel felépített Ethikájában így fogalmazta meg véleményét:

Csak egy szubsztancia van és ez a végtelen.

Az ebből levont következtetések során olyan ellentmondásokba keveredett, amelyek nagyrészt a potenciális és aktuális végtelen összekeverésén alapultak.

Kant is különbséget tett a végtelen két fajtája között. Az arisztotelészi aktuális végtelen merev elvetésével nem értett egyet. Elfogadja a potenciálisan végtelent, de az aktuális végtelen fogalmát, mint intuitív a priori matematikai konstrukciót mégis csak elveti.

Az aktuálisan végtelen fogalmát nem tartja logikailag ellentmondásosnak mint Arisztotelész, csupán intuitív konstruálhatóságát vonja kétségbe. S mivel az ő idejében az aktuális végtelen fogalma nem létezett ellentmondásokba keveredett. Ezen ellentmondások miatt is vallotta a világnak, mint egésznek alapvető megismerhetetlenségét.

Hegel szerint -- akinek lét-tanában terjedelmes helyet foglal el a végtelen elemzése -- semmi fenntartása nincs az aktuális végtelennel szemben sőt szerinte az az igazi végtelen a potenciálisan végtelen csak befejezetlen "rossz" végtelen.

Engels: "A matematikai végtelen a valóságból van merítve, ha tudatlanul is és ezért csak a valóságból és nem önmagából a matematikai elvonatkoztatásból magyarázható meg. És ha a valóságot ebből a szempontból vizsgáljuk, akkor megtaláljuk azokat a valóságos viszonyokat is, amelyekből a matematikai végtelenségi viszonyt is merítették, sőt annak a matematikai módnak a természetes analógonját is, amellyel ezt a viszonyt működtették."

Az 1800-as évek elején Bolzano idézte fel először Gelilei gondolatát a "Végtelen paradoxonjai" -- című írásában. Így gondolkodott:

Legyen egy B pont egy AC szakaszon, például annak a középpontjában. Mozogjon az X pont egyenletes sebességgel A-ból B-felé, vele egyidejűleg az Y pont kétszer akkora sebességgel fussa be az AC szakaszt! Mialatt X az AB szakaszt megteszi Y befutja az AC szakaszt, X minden egyes helyzetének megfelel Y-nak egy és csakis egy helyzete. Ha az AX és AY távolság közül az egyik adott, akkor a másikat az AX : AY = AB : AC = 1:2 arányból kiszámíthatjuk. Az egész AC szakaszon nincs "több" pont mint az AB szakaszon.

Bolzano azonban visszariadt ettől a gondolattól: "... kizárólag ebből a tényből -- úgy látjuk -- még nem lehet arra következtetni, hogy e két végtelen halmaznak, elemeik számosságára vonatkozólag, egyenlőnek kell lennie egymással".
Az a tétel ugyanis, hogy az egésznek szükségszerűen nagyobbnak kell lennie, azaz több elemmel kell rendelkeznie bármelyik részénél, amit évezredek óta igaznak tartottak nagyon erősen hatott Bolzanora is. (Véges halmazokra igaz a tétel, mint azt már említettük.)
Ha azonban a végtelen halmazok jól felhasználható összehasonlításához akarunk eljutni le kell mondani erről a tételről. Egy végtelen halmaz ismertetőjele éppen az, hogy a Bolzano-féle bijektív leképezés értelmében ugyanolyan sok elemmel rendelkezhet, mint egy részhalmaza. Ezt az elképzelést Cantor vitte végig. Ezzel sikerült megtalálnia az utat az aktuális végtelenhez is.

Felsorolásunkból is látszik -- amely koránt sem teljes --, hogy a végtelen halmazok fogalmának elfogadása nem volt egységes. Ma már minden matematikával kapcsolaltos filozófiai irányzat elismeri, hogy ezek a tiszta matematikai fogalomalkotás eredményei.

5/ A végtelen halmazok gyakran fellépnek. Érdekes kérdésként vetődik fel -- a hallgatóink is gyakran megkérdezik -- hogy a véges halmazok mely tulajdonságai öröklődnek a végtelen halmazokra és melyek nem; hány aktuális végtelen létezik?

a/ Egy halmaznak egyértelműen meghatározottnak kell lenni. Ez végtelen halmazokra is érvényes. Ha például valamely szakasz pontjainak halmazáról van szó, akkor -- az egyértelműség szellemében -- meg kell adni, hogy mind a két vagy csak az egyik, esetleg egyik végpontját sem számítjuk a halmazhoz, (bár egy vagy két elem hozzáadása végtelen halmazok összehasonlítása szempontjából jelentéktelen).

b/ Véges halmazok körében elmondtuk, hogy ha egy halmaz egy másikra kölcsönösen egyértelműen leképezhető, akkor ezeket egyenlő számosságúaknak vagy ekvivalenseknek nevezzük. Véges halmazok számossága ekvivalenciareláció. A véges halmazok R rendszerében íly módon nyert osztályozás vezetett bennünket a természetes számokhoz mint R osztályaihoz. A természetes szám tehát nem más, mint egymással ekvivalens halmazok egy osztálya. Ezzel szemben, ha egy A halmaz bijektív módon leképezhető a B egy valódi részhalmazára, akkor A halmaz számosságát kisebbnek neveztük, mint B halmazét. Azt is mondtuk, hogy véges halmazok körében nem lényeges a bijektív leképezés módja. A végtelen halmazok körében más a helyzet. Mert véges $A := \{a,b,c,d,e\}$ halmazt a $B := \{1,2,3,4,5\}$ halmazra leképezhetjük úgy, hogy $\{(a;1),(b;2),\ldots,(e;5)\}$, de úgy is, hogy $\{(b;1),(e;2),(d;3),(a;4),(c;5)\}$ Ha valamely bijektív leképezésnél mind a két halmaz egyszerre merül ki, akkor valamennyi bijektív leképezésnél ez történik. A végtelen $N := \{1,2,3,4,5,\ldots\}$ és $P := \{1,3,5,7,\ldots\}$ halmazok $n \longrightarrow 2n-1$ leképezésénél N minden elemének kölcsönösen egyértelműen megfelel P egy eleme. Mint véges halmazok esetében N és P halmazok esetében N és P halmazokat egyenlő számosságúaknak nevezzük. P-t most úgy képezzük le, hogy minden elemnek önmagát feleltetjük meg N-ben. Ekkor P halmazt N egy valódi részhalmazára, nevezetesen önmagára képeztük le. Az N és P egyenlő számossága itt nehezebben látható.

Persze ez nem csak számhalmazoknál van így.

Végtelen halmazok körében előfordulhat, hogy A halmaz B-re és egyúttal B valamelyik valódi részhalmazára is leképezhető. Véges halmazoknál ez nem lehetséges és éppen emiatt értelmezhetjük a számosságokra vonatkozó kisebb-nagyobb relációt. Végtelen halmazok összehasodnlítása nem ilyen egyszerű. Egy halmazhoz csak egy számosságot rendelünk hozzá. Nem támaszkodhatunk arra, hogy egy halmazt egyszer a másik halmazra, majd annak egy valódi részhalmazára képeztük le bijektív módon. Amennyiben sikerül az egyik halmazt a másikra csak egyetlen egyszer is bijektíven leképezni, akkor a két halmazt egyenlő számosságúnak tekintjük. Nem törődünk tehát azzal, hogy ezenkívül a halmaz a másik valódi részhalmazára leképezhető-e vagy sem. Ha tehát nem találunk olyan leképezést, amellyel az egyik végtelen halmazt a másikra leképezhetnénk, akkor nincs jogunk arra, hogy egyenlő számosságukat kétségbe vonjuk. Azt kell bizonyítanunk ehhez, hogy nem lehetséges az egyiknek a másikra való bijektív leképezése. Itt tehát lényegesen más a helyzet mint véges halmazoknál.

c/ Az elemek számának fogalma is megváltozik a végtelen halmazoknál; itt nem beszélünk elemek számáról, hanem csak egy halmaz számosságáról.
d/ Véges halmazok körében, amint azt már említettük egy halmaz sohasem lehet ekvivalens valódi részhalmazával. A végtelen halmazok körében a valódi rész ekvivalens lehet az egésszel. A végtelen halmazok körében nem érvényes tehát Euklides tanítása; a rész mindig kisebb az egésznél.
Az, hogy egy végtelen halmaz ekvivalens lehet egy valódi rész halmazával a végtelen halmazok jellemző tulajdonsága. Tehát a végesben megszokott tulajdonságok a fogalmaknak végtelenbe való kiterjesztésével nem mind mennek át a végtelenbe.
Az, hogy a végtelen halmaznak van vele ekvivalens valódi része objektív igazság. Ez az objektív igazság viszont nem az anyagi világban, hanem a matematikai fogalmak világában érvényes.
Ezt az objektív igazságot bizonyos definíciók megváltoztatásával nem lehet megszüntetni. Az a vélemény, hogy a végtelen halmazok körében nincs értelme a nagyság szerinti megkülönböztetésnek; a végtelen az végtelen, megszüntet és egybeolvaszt minden különbözőséget a priori vélemény.

e/ A végtelen halmazok számosságai az úgynevezett végtelen számosságok a természetes számok általánosításai és bizonyos mértékig kifejezik, hogy egy végtelen halmaznak hány eleme van. Minden számosságnál van nagyobb számosság, amely minden a halmazban szereplő számosságnál nagyobb. A sok aktuális végtelen halmaz összehasonlítható "nagyság" szempontjából. Ugyanis, ha adott két halmaz, akkor a következő esetek lehetségesek:

I. Egyik halmaz a másikra, bijektív módon leképezhető. Ekkor a két halmaz számossága egyenlő.
II. Az egyik halmaz bijekív módon leképezhető, a másik egy valódi részhalmazára, s ezenkívül a másik halmazra is. Ekkor az előbbi eset áll fenn, a két halmaz egyenlő számosságú.
III. Az egyik halmaz leképezhető kölcsönösen egyértelmű módon a másik egy valódi részhalmazára és a másik halmaz is az egyik egy valódi részhalmazára. Ekkor a két számosság ugyancsak egyenló (Cantor-Bernstein tétel).
IV. Az egyik halmaz leképezhető bijektív módon, a másik halmaz egy való-

di részhalmazára, de nem képezhető le kölcsönösen egyértelmű módon a másik halmazra. Ekkor az egyik halmaz kisebb számosságú mint a másik.

Két tetszőleges véges vagy végtelen halmaz "nagyság" szempontjából tehát mindig összehasonlítható.

A számosságok között definiálható az összeadás, a szorzás, a hatványozás; ezekre a természetes számok közötti hasonló műveletek számos tulajdonsága érvényben marad.

A felvetett kérdés megválaszolása csak részleges. Még sok olyan tulajdonság van, amelyek véges halmazok körében érvényesek a végtelen halmazok körében nem.

6/ A végtelen halmazok absztrakt elmélete, a végtelen halmazok tételei igazságot fejeznek-e ki?

A természettudományokban az igazság és az alkalmazhatóság egybeesik.

A halmazelmélet igazságkritériuma a logikai igazságfogalommal van szoros kapcsolatban; a halmazelmélet tételei nem kerülhetnek összeütközésbe a logika tételeivel, törvényeivel. A halmazelmélet igazságkritériumának a logikai ellentmondástalanságot tekintjük. Egy halmazelméleti rendszernek, olyannak kell lennie, hogy ne lehessen benne egy tételt és annak tagadását is bizonyítani. A logikából tudjuk, hogy az ellentmondástalanság elve helyes gondolkodási törvény abban az értelemben, hogy eszerint gondolkodva és következtetve az anyagi jelenségek széles körében gondolkodásunk összhangban van a tapasztalattal, a tényekkel. Ez nem ellenkezik a dialektikus materialista világszemlélettel -- amely arra tanít, hogy a szüntelen változások közepette egy viszonylagos állandóság, stabilitás is mutatkozik --, sőt annak része.

7/ A végtelen halmazok elméletének stabilitása -- rövid időre -- akkor ingott meg, amikor ellentmondásokat, antinómiákat fedeztek fel benne. Az összes dolgok és összes számosságok, az összes rendszeámok, a Russell, a Richard féle antinómiákat tanórákon elemezzük. Az antinómiákhoz, azok kiküszöböléséhez kapcsolódó filozófiai nézeteket (logicista, intuicionista, formalista, dialektikus materializmus) megismertetjük hallgatóinkkal. Elemezzük az axiomatizálás kérdéseit is.

Az antinómiákkal, az axiomatizálással kapcsolatos filozófiai vonatkozások jelentősek és érdekesek, de mivel különböző irodalmakban megtalálhatóak, ezért ezek tárgyalására itt nem térünk ki. (Eredeti összeállításunk ezeket is tartalmazza.)

A világ törvényszerűségei megismerhetőek, de ez a megismerés egy folyamat az emberiség történelmi fejlődése során. Példázza ezt a halmazelmélet fejlődése is. Az axiomatizálás napjainkig stabilizálta a halmazelméletet. Ez a stabilitás azonban viszonylagos. A későbbi fejlődés felvethet problémákat, amelyek alapján az eddigi eredmények (axiómarendszerek) kiegészítésre szorulnak, később még további korrekciók szükségessége merülhet fel. Ez a folyamat egészében véve fejlődés, hiszen a felmerült kérdésekre adott válaszok így egyre pontosabbakká válnak.