PERGE IMRE

A MATEMATIKAI ANALÍZIS NÉHÁNY FILOZÓFIAI PROBLÉMÁJÁRÓL

A matematika és a filozófia kapcsolata rendkívül sokrétű. E sokrétűség alapját a mindkét tudományban meglevő általánosságra való törekvésben kell keresnünk. A filozófia ugyanis a valóság egészét, nem pedig valamely speciális szakterületét vizsgálja és éppen ez az egyik jellegzetes vonása, amely megkülönbözteti a szaktudományoktól. Hasonlóan a matematika is bizonyos tekintetben a valóság egészét vizsgálja, amennyiben általános és egymástól igen távoleső területeken érvényes közös összefüggéseket tár fel.

Érthető tehát, hogy a filozófia mindig komoly érdeklődést tanúsított a matematika iránt (az ókor filozófusai általában matematikusok voltak, de az újkor filozófusai is szép számmal matematikusok is), és mindig igyekezett a matematika eredményeit a maga rendszerébe beépíteni. Ugyanakkor a mai matematikusok közül is számosan foglalkoznak a filozófiával, közelebbről a matematika filozófiai problémáival.

A matematika filozófiai problémái közül e dolgozatban csak a matematika egy részterületének az analízisnek a legfontosabb és alapvetőbb fogalmainak az elemzését mutatjuk be:

- a függvénykapcsolatok és a valóság jelenségei;
- a végtelen kicsinyek és a végtelen oszthatóság problémája;
- a határérték fogalma;
- a matematikai végtelen

fejezetekben. A szóbanforgó matematikai filozófiai problémák természetesen kapcsolódnak a matematika más fejezeteihez is, ezek részletesebb elemzésétől azonban az alapvető fogalmak jobb megértése céljából eltekintünk.

1. A függvénykapcsolatok és a valóság jelenségei

A "mennyiség" fogalma az az alapfogalom, amellyel a természettudomány, technika bármely területén lépten-nyomon találkozunk. Általában mennyiségen értjük mindazt, ami mérhető és számmal vagy számokkal jellemezhető. Más szavakkal, mennyiségnek nevezünk minden olyan tárgyat, dolgot, amely megmérhető közvetlen módon vagy matematikailag tökéletesített módszerekkel. A mérés legegyszerűbb formája abban áll, hogy a megmérendő tárgy jellegének megfelelő "egységet" választunk, majd meghatározzuk, hogy az egység hányszor "foglaltatik" a mérendő tárgyban. A mérés ezen egyszerű formájának matematikai tökéletesítése és további fejlődése a matematikai analízis számos alapvető fogalmára vezetett, pl. differenciálhányados, integrál stb. fogalmára.

Magában a matematikában, konkrétan az analízisben sem fordulnak elő konkrét mennyiségek, hanem általános elméletei a legkülönbözőbb mennyiségekre alkalmazhatók. Ezt azáltal érhetjük el, hogy a mennyiségek konkrét jellegétől elvonatkoztatunk, absztrahálunk és a tételeket és törvényeket csak azok kvantitatív, számszerű értékeire fogalmazzuk meg. Ennek megfelelően absztrakt mennyiségeket tekintünk, valamilyen jellel, betűvel jelöljük azokat és semmit sem teszünk fel konkrét fizikai vagy más jelentésükről, amellyel azok bírhatnak. Éppen ezért a matematikai elméletek egyformà sikerrel alkalmazhatók bármilyen konkrét mennyiségi vizsgálatnál. Ebben fejeződik ki a matematikai elméletnek az általánossága, univerzitása, amit általában véve absztraktságnak nevezünk és olykor egyesek helytelenül ezen a gyakorlattól és a valóságtól való elszakadást értik. F. Engels így ír ezzel kapcsolatban:
"... Hogy ezeket az alakokat és viszonyokat tiszta alakjukban tanulmányozhassuk, teljesen el kell azokat szakítani tartalmuktól és azt elkülöníteni mint olyat, amely a tárgy szempontjából közömbös."

A nagyfokú absztrakció, amely a matematika lényegéhez tartozik, nem jelenti a valóságos világtól való elszakadást, éppen ellenkezőleg, lehetőséget ad arra, hogy a valóság sokszínű és bonyolult összefüggéseiből a lényeget ki lehessen ragadni és az összefüggéseket szigorú és félreérthetetlen törvényekkel lehessen kifejezni.

Az együttesen vizsgált mennyiségek között gyakran egyesek változnak, mások állandók maradnak. A változás, mozgás első jellemző tulajdonsága annak, amit jelenségnek, folyamatnak nevezünk. "A mozgásban lévő anyag vizsgálata során, amit azonnal megfigyelhetünk, a jelenségek egyetemes, általános és kölcsönös összefüggése kölcsönös feltételezettsége."

A jelenségeket úgy foghatjuk fel, mint egy abban a jelenségben résztvevő valamely mennyiség változását, amely más mennyiségek változásától függ. A változó mennyiségek bevezetése a matematikába, a matematika történetének egyik legjelentősebb pillanatának tekinthető. Erről F. Engels is így ír: "Fordulópont volt a matematikában a Descartes-féle változó mennyiség; ennek köszönhető, hogy a matematikába bevonult a mozgás, a dialektika, és ugyanennek köszönhető, hogy közvetlenül szükséggessé vált a differenciál és integrálszámítás, amely azonnal létre is jön..." (A természet dialektikája 268. old.)

Mint már mondottuk, minden jelenséget, vagy folyamatot mint néhány változó mennyiség kölcsönös változását tekinthetjük. Ez a filozófiai fogalom, felfogás az analízis legfontosabb fogalmára, a függvénykapcsolat fogalmára vezetett. A jelenségek, vagy folyamatok egy bizonyos csoportjának teljesen absztrakt alakja a matematika nyelvén

$$y = f(x) \qquad x(x_1; x_2; \ldots ; x_n)$$

Az adott folyamatban résztvevő mennyiségek közötti függvénykapcsolat meghatározása és leírása a természettudomány fő feladata. A folyamatban megnyilvánuló és a folyamatra jellemző függvénykapcsolatot a folyamat törvényének is nevezzük, úgy is szoktuk mondani, hogy ez az összefüggés leírja a folyamatot.

A függvény gondolata közelebbről az okozati függés általános elvéből fejlődött ki. Az okság a jelenségek egyetemes törvényszerűségének egyik formája. A tudás elsősorban az okok ismerete. Az ok és okozat fogalmának ismeretében elkülöníthetjük az egységes objektív folyamat ilyen vagy olyan oldalait. "Hogy az egyes jelenségeket megértsük, ki kell ragadnunk őket az általános összefüggésükből és elszigetelten kell szemügyre vennünk őket, akkor a váltakozó mozgások közül az egyik okként, a másik okozatként fog megjelenni". (Engels: A természet dialektikája 241. old.)

Az ok és okozat kölcsönös viszonyban álló fogalmak. Az okság pedig olyan jelenségkapcsolat, amelyben az egyik létezését minden esetben követi a másik létrejötte.

Mint már említettük a függvény, és a funkcionális összefüggés fogalma amely ugyancsak a jelenségek objektív létező összefüggéseit tükrözi, az okozati függésből fejlődött ki.

$$y = f(x)$$

Az ok és okozat összefüggése kölcsönös, a kettő kölcsönhatásban van; nemcsak az történik, hogy az ok létrehozza az okozatot, hanem az okozat aktívan hat az okra, megváltoztatja az okot. A kölcsönhatás folyamán az ok és okozat helyet is cserélhet. Ez adta a gondolatot az inverz függvény bevezetéséhez

$$x = f(y)$$

Végül az is ismeretes, hogy az okozat újabb jelenségek okává válik és így ismétlődve létrejöt az oksági láncolat, amelynek az analízisbeli megfelelője az összetett függvény.

$$y = f_1(f_2(x))$$

A függvényláncolat, amelynek segítségével a függvényt megadjuk természetesen több láncszemből is állhat.

Hangsúlyozni szeretnénk viszont, hogy az ok-okozati összefüggés és a függvénykapcsolat matematikai fogalma között lényeges különbség van. Míg az okozati függés elve feltételezi az összes vagy a legfontosabb tényleges okok kiválasztását, amelyek az ismert okozatra vezetnek, addig a függvénykapcsolat pusztán a mennyiségek közötti kapcsolatot adja meg, annak feltevése nélkül, hogy a mennyiségek közül az egyiknek a változása tényleges oka a másik megváltozásának. Például a levegő hőmérsékletének változása 24 óra alatt számos ok megváltozásának a következménye. A függvénykapcsolat viszont megállapítható egyszerűen a hőmérséklet és a 24 órai időköz között is, jólehet az idő folyása önmagában természetesen nem oka a hőmérséklet változásának, ennek ellenére ez a függvénykapcsolat fontosnak bizonyulhat pl. a fizikában.

A matematikai függvény tehát egyszerűen változó mennyiségek összefüggését szabályozó törvény és semmiféle ok-okozati összefüggés nem következik belőle. Az megint más kérdés, hogy az ok-okozati összefüggés gondolata hozta létre a matematikában a függvények bevezetését. Az ok-okozati összefüggés bizonyos értelemben bővebb, de ugyanakkor szűkebb is mint a függvényfogalom.

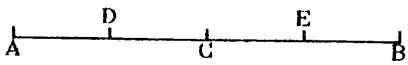
A függvényfogalom segítségével lehet egzakt matematikai módon jellemezni a mozgást is. Ha egy mozgó részecskét, amelynek koordinátája x,y,z, a tér egyetlen pontjába koncentrálunk, és ha a t az idő mértékét jelöli, akkok a részecske mozgását teljesen le lehet írni, megadva x,y,z koordinátáit a t idő függvényeként:

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t)$$

Vigyázni kell azonban arra, hogy bármennyire nélkülözhetetlen és fontos is ez a kapcsolat, abból hogy a P részecske a t időpillanatban a tér (x,y,z) koordinátájú pontjában van a P részecske nyugalmi vagy mozgási állapotára nem lehet következtetni.

2. A végtelen kicsinyek és a végtelen oszthatóság problémája

A "végtelenig" való osztás olyan mennyiségeket szolgáltat, melyek egyre kisebbekké válnak. Az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk ezt az eljárást egy adott A B hosszúsági egyenesre. Ezt először megfelezzük (C) a



fél részeket újra kétfelé osztjuk és így tovább határtalanul.

A részek hosszúságát törtszámok fejezik ki.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

A részek száma viszont egyre nagyobb és nagyobb lesz

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$$

Hiába halmozzuk az osztásokat, a részek száma sohasem lesz végtelen, és hiába osztjuk újra meg újra valamely részt, az eredmény sohasem lesz nulla. A legkisebb részben is megvan még valami a nagyságból, mert összerakva visszaállítják az eredeti nagyságot. A tiszta nulla azonban bármely nagy számok legyenek is, sohasem szolgáltatnak véges mennyiséget.

Ezek a mennyiségek kiirthatatlanul magukban hordják eredetük jellegét. A végtelen kicsiny vonalat nem szabad összezavarni a végtelen kicsiny felülettel. Az egyetlen eshetőség csak annyi, hogy eredetüknél fogva szomszédos végtelen kicsinyek, amelyek pl. a vonalak világából való végtelen kicsinyek végre olyan közel jutnak egymáshoz, hogy a különbségük is nullához képest végtelen kicsinnyé válik. A végtelen kicsiny egyenes és a végtelen kicsiny görbe között a különbség nemcsak önmagában végtelen kicsiny, hanem hozzájuk képest is az.

Azoknak a végtelen kicsinyeknek, amelyekről az egymáshoz közeledés feltételezhető, egy családba tartoznak, hisz bizonyos lényeges vonás mindegyikükben közösen megvan.

A görbe vonal és az egyenes vonal, ámbár különböző eredetűek, megegyeznek abban a közös tulajdonságban, hogy csak egy kiterjedésük van, ami megengedi, hogy egy kategóriába kerülhessenek és lehetővé teszi végtelen kicsinyek egymáshoz való közeledését.

Összefoglalva tehát a végtelen kicsiny sohasem nulla, mindvégig megőrzi azoknak a mennyiségeknek a jellemvonásait, amelyből származik.

Ezt az eljárást, amit itt ismertettünk, úgy lehet tekinteni, mint "a végtelen oszthatóság" filozófiai elvének matematikai kifejezését.

A "végtelen oszthatóság" elve az időnek és a térnek azt a tulajdonságát fejezi ki, hogy nem atomos, hanem folytonos szerkezetű: nincs legkisebb időtartam, bármely időtartamot részekre lehet osztani, és nincs legkisebb térrész; bármely térrészt kisebb részekre lehet osztani. Az, hogy pl. a valós számok halmaza analóg tulajdonságú, azt jelenti, hogy a valós számok segítségével képesek vagyunk a térben és időben lejátszódó folyamatok (mozgások) mennyiségi összefüggéseinek leírására.

Az, hogy a tér és az idő atomos vagy folytonos szerkezetű-e, igen régi filozófiai vitakérdés. Mai szemmel tekintve azt kell mondanunk, hogy itt nem filozófiai, hanem természettudományos kérdésről van szó. A tér és az idő folytonosságának a feltételezése ugyanis olyan tudományos hipotézis, amely a jelenségeknek nemcsak a magyarázatát könnyíti meg, hanem a jelenségek lefolyásának előrelátását és kiszámítását is lehetővé teszi, s így a gyakorlat számára nélkülözhetetlen.

Az energiáról viszont az derült ki, hogy bizonyos jelenségek esetén a folytonosság feltevése ellentmond a tapasztalatnak. Lehetséges tehát, hogy sem a "folytonos", sem az "atomos" fogalmak önmagukban nem alkalmasak a fizikai mennyiségek hű jellemzésére, ez azonban nyilván nem filozófiai, hanem fizikai probléma.

3. A határérték fogalma

Az analízisben a határérték fogalma alapvető szerepet játszik. Az analízis majd minden fogalmát a határérték segítségével értelmezzük és a határátmenettel, ezzel az általános matematikai operációval kapcsolatosak az analízis műveletei, a differenciálás és az integrál is. Ezért olyan fontos részletesebben foglalkozni a határ, határéték fogalmával.

A közönséges beszédben határ szóval jelöljük azt a választó vonalat, amelyet nem szabad átlépni. Ez a választóvonal azonban elérhető és érinthető.

A matematika nyelvén a határ olyan válaszfal, amelyet nemcsak hogy átlépni nem szabad, de érinteni is tilos, csupán közeledni lehet hozzá. A távolság tetszés szerint csökkenthető, de szigorúan véve sohasem semmisülhet meg. A végtelen kicsinyek határa a nulla: folyton közelednek feléje, de el nem érik soha.

A matematikai határ fogalma tehát szükségképpen felkelti a végtelen kicsiny eszméjét, avagy helyesebben a végtelen kicsiny elválaszthatatlan a határtól, megjelöli azt a távolságot, amely közte és a közelébe jutott tárgy között van. Kölcsönösen kiegészítik és feltételezik egymást. Dialektikus egységet alkotnak.

Pl. valamely kör azon beírt és körülírt sokszögek határa, amelynél az oldalak száma minden határon túl növekszik. A beírt és körülírt sokszögek között, valamint a köztük és a kör között lévő különbség ugyanis kisebbé válhat minden adott nagyságnál.

De, valamely kör átmérője már nem lehet határa pl. a húroknak, mert semmi sem zárja ki, hogy ezek a húrok a kör középpontján menjenek keresztül és átmérővé váljanak. Valamely kör húrjának az ismerete semmi újat nem mond az átmérőről, mert közös a természetük, egy a lényegük. Egyszerűen a kisebbnek és a nagyobbnak a kérdése.

Egészen másképpen áll a dolog a sokszögre és körre vonatkozóan. E két tárgy természeténél fogva különbözik egymástól. A kör nem valami kisebb vagy nagyobb oldalszámú sokszög, nincsenek oldalai. Bármily sok oldala legyen is egy sokszögnek, mégsem lesz soha kör, -- megmarad mindig sokszögnek. Másrészt azonban a sokszög folyton közeledik a körhöz és a köztük lévő különbség kisebb lehet minden adott nagyságnál, elenyészővé válik.

Ez a végtelen kicsinyekkel való számítás célja. Mindig az a tárgya, hogy a határok módszereit vagy valamely analóg eljárást alkalmazva, két különböző természetű dolgot állítson egymás mellé. Az egyik már ismert, a másikról még nem tudjuk, hogy hogyan férkőzzünk hozzá. Ha feltehetjük, hogy a két tárgy mind jobban és jobban "szomszédja" lehet egymásnak, a probléma meg van oldva és ismertté válik számunkra.

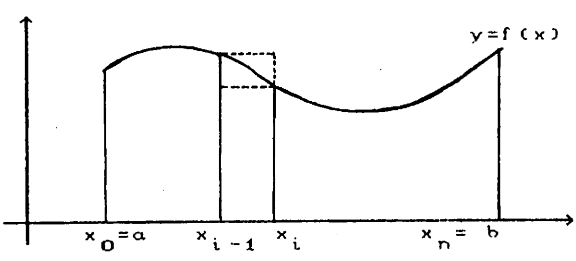
Így áll elő az a látszólag paradox eredmény, hogy az egyik tárgy ismerete hozzásegít a másik tárgy ismeretéhez, éppen annál az oknál fogva, mert különböző természetűek. Az eljárás titka határtalan közelíthetőségükben rejlik.

Szükséges, hogy minden határ és a hozzá közeledő változó tárgy között legyen valami szerkezeti egyenlőség. Egy vonal pl. nem lehet a határa valamely felületnek vagy erőnek. A vonalnak vonal, a területnek terület a határa. Példák: a differenciálhányados

$$f'\left[x_0\right] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

az adott y=f(x) fv. x_0 pontbeli érintő iránytangense, amelyet a szelők ismert iránytangenseinek segítségével határozhatunk meg, vagy fizikai értelmezés szerint az ismert átlagsebességek segítségével meghatározott x_0 időpontban vett pillanatnyi sebesség stb.

A határozott integrál, vagyis az



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\left(x_i - x_{i-1}\right)\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i - x_{i-1}\right) =$$

$$= \lim_{\max\left(x_i - x_{i-1}\right)\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \left(x_i - x_{i-1}\right) =$$

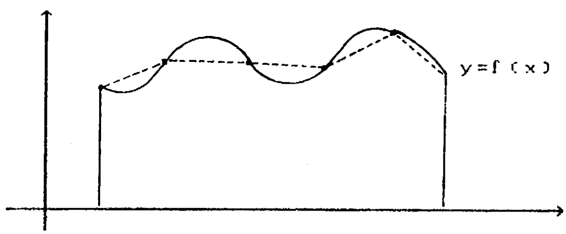
$$= \lim_{\max\left(x_i - x_{i-1}\right)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

ahol
$$m_i = \min_{x\in\left[x_i \ \ x_i\right]} f(x) \, ,$$

$$M_i = \max_{x\in\left[x_{i-1}, x_i\right]} f(x) \text{ és}$$

$$m_i \leq f\left(\xi_i\right) \leq M_i$$

határértékek, pl. a jelzett téglalapok területe összegeinek segítségével, az adott intervallum felosztásának finomításával egyre jobban megközelíti határát, amely ugyancsak terület, a függvény alatti terület.



A görbe vonal ívhossza a beírt poligonok hosszának határa, midőn a felosztást minden határon túl finomítjuk stb.

Valamennyi példánál megfigyelhető, hogy a két tárgy alapjában véve logikailag különbözik egymástól, és a különbség meg is marad, függetlenül nagyságuk vagy kicsiny voltuk fokától. Egy szelő és érintő, egy egyenes és görbe vonal, egy sík és egy görbült felület stb. logikailag különbözik, más minőség.

A matematikai határ első feltétele tehát az, hogy legyen az értelmezésben valami olyan sajátosság, elem, amely "összeférhetetlen" a második értelmezésével.

Szükséges azonban még az is, hogy az az elem, amely összeférhetetlen a második értelmezésével, tetszés szerint változtatható legyen (mennyiségi változás), amíg csak el nem jutunk a teljes közeledés fokához. (Új minőség).

A határok mechanizmusa általában tehát azon alapszik, hogy az összeférhetetlenséget kifejező elemet változtathatjuk.

A meghatározás értelmében a változó tárgy nem közeledhet egyszerre két különféle határhoz, de ugyanakkor több eredetileg különböző változó tárgy tarthat ugyanazon határ felé, melynél ha elérhetnénk, vége volna a köztük lévő különbségnek.

Egyazon határt több, különböző úton is meg lehet közelíteni. Ennek pedig igen nagy jelentősége van. Mert ha a változó, amelyet kiválasztottunk, hogy valamely határ tulajdonságába bepillantást engedjen, nem elégít ki bennünket, vagy ha a vele való művelet nagyon bonyolult és sok fáradtságot kíván, szabad ezt elvetni és egy másikkal pótolni, amelynek ugyanaz a határa mint az elsőnek, de jobban megfelel célunknak.

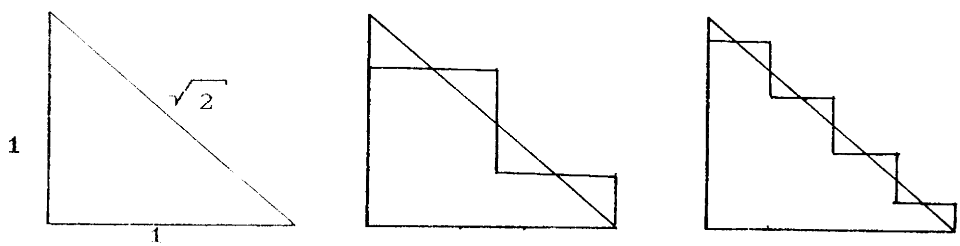
Mindezen gondolatok testesülnek meg a

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = A \qquad x_n \neq x_0$$

definícióban.

A határérték fogalma tehát egy igen fontos dialektikus mozzanak bevonulása a matematikába, olyan lépés, amellyel a matematika a keletkezés, és az elmúlás, a változás folyamatának egy mennyiségi mozzanatát megragadva, új minőségek megismerésére ad lehetőséget.

Vigyáznunk kell azonban a minden határon túl való közelítéssel is, a szemléletes okoskodás durva hibákra vezethet. Tekintsünk pl. egy egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Legyen a befogója egységnyi. Pythagorasz tétele szerint a háromszög átfogója $\sqrt{2}$ egység. Közelítsük meg e háromszög átfogóját az alábbi "törött vonallal"; először fölfelé haladunk 1/4 egységnyit, azután jobbra 1/2 egységnyit, azután fölfelé 1/2 egységnyit, megint jobbra 1/2 egységnyit, végül fölfelé 1/4 egységnyit.



Ha a lépések számát megkétszerezve az eljárást minden határon túl folytatjuk, akkor a törött vonalak egy sorozatához jutunk.

$$L_1,\ L_2,\ L_3, \dots$$

Ez a sorozat egy határgörbéhez tart, az eredeti háromszög átfogójához. A határgörbe hossza így $\sqrt{2}$. Viszont

$$L_1 = 2, \quad L_2 = 2, \quad \dots, \quad L_n = 2$$

A határoló szakasz csak látszólag a derékszögű háromszög átfogója, valójában nem.

4. A matematikai végtelen

Az emberiség világról szerzett ismeretei a történelem során fokozatosan gyarapodtak. Tapasztalataink azonban egyre-másra, itt is, ott is összeütközésbe kerületek egy lezártnak tekintett világképpel, ami fokozatosan a világ kimeríthetetlenségéről és végtelenségéről szóló nézetek kialakításához vezetett. A végtelenség fogalma kiterjed a térre, az időre, a dolgok és a jelenségek összefüggésére és magára a megismerés folyamatára is.

A végtelenség az anyagi világ létezési formáinak, a térnek és az időnek objektív tulajdonságait fejezi ki.

A végtelenség és a végesség fogalma csak a metafizikus gondolkodás számára jelent feloldhatatlan ellentétet. A valóságban a mélyebb, tudományos megismerés azt bizonyítja, hogy az anyagi világban semmi sem abszolut véges, mert a konkrét anyagi tárgyak és folyamatok más jelenségekké, folyamatokká való átalakulásukkal állandóan meghaladják a végességet és a térben és időben végtelen örök anyagi világot alkotják.

A matematikai végtelen a világszemléleti -- filozófiai végtelen fogalmának mennyiségi -- formái kifejeződésre, amely visszahat a filozófiai végtelen fogalmának fejlődésére, a matematikán belül pedig önállóan is tovább fejlődik.

A matematikusok is jó kétezer éve harcolnak a végtelennel. Nem tudják abbahagyni ezt a harcot, hisz munkájukban nélkülözhetetlen szükségük van rá. A matematikában nincs egy univerzális végtelen, több fajtája is van (alg.-i, geometriai stb.). A matematikában is többnyire jelzőként lép fel a végtelen, esetenként más és más, de mindig szabatosan körülhatárolt jelentésben. Használata azonban mindig összhanban van a "végtelen" világszemléleti jelentésével.

A matematikának természetesen nem feladata a "végtelennek mint olyannak" a definiálása. A matematika feladata e tekintetben csupán annyi, hogy saját keretein belül szabatosan definiálja a "végtelen" jelzők használatát.

A végtelen a szemléleten kívül eső fogalom vizsgálatához, elemzéséhez csak gondolati eszközökkel lehet közeledni. Ezért jelentősek a filozófia számára azok a matematikai eredmények, amelyek a végtelennel kapcsoltosak. Ezen eredmények némelyikének már bizonyos közvetett tapasztalati ellenőrzése is lehetséges a matematika alkalmazásán keresztül.

A végtelen fogalmának legegyszerűbb matematikai fellépése a természetes számok sorozatának végtelensége (bármely természetes számnál van nagyobb természetes szám). Ez a fajta végtelen a filozófiában a potenciális végtelen, ami egy folyamat korlátlan továbbfolytatásának a lehetőségét jelenti. Ilyen pl. az idő is, de két irányban.

A potenciális végtelen megjelenési formája a matematikában általánosan a végtelen sorozat. Végtelen sorozathoz úgy jutunk, hogy minden természetes számhoz hozzárendelünk egy és csak egy dolgot, amit az

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots a_n , \dots$$

szimbolummal jelölünk.

Igen nagy jelentőséget tulajdonít a matematika a végtelen sorozat tagjaiból képzett

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

úgynevezett végtelen sornak is, ami végső soron az összeadás általánosítása végtelen sok tagra. Nincs tervünk itt a végtelen sorozatok és sorok elméleltével foglalkozni, azokat ismertnek tételezzük fel. Szeretnénk viszont ezeknek egy pár filozófiai vetületét felsorolni.

Elsőként azt mutatjuk meg, hogy a végtelent nem lehet úgy kezelni, mint a végest. A végesre jellemző tulajdonságok nem minden esetben vagy egyáltalán nem érvényesek a végtelenre. Vagyis a véges tulajdonságait nem lehet csak úgy mechanikusan alkalmazni a végtelenre, de ugyanakkor azt is világosan kell látni, hogy bizonyos tulajdonságok a végtelenre is jellemzők éppúgy, mint a végesre.

A matematikai végtelen fogalmát kifogástalan logikus formában csak a XIX. században tisztázták. Hogy kellőképpen értékelni tudjuk, hogy milyen problémákkal birkóztak, lássunk néhány példát.

Tekintsük az alábbi végtelen sort:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$$

Csoportosítsuk a sor tagjait így

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

A tagokat azonban másképpen is csoportosíthatjuk:

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots =$$
$$= 1 - 0 - 0 - \ldots = 1$$

Megint másképpen csoportosítva a tagokat

$$S = 1 - (1-1+1-1\pm\ldots) = 1 - S$$

Innen $2S = 1$, vagyis $S = \frac{1}{2}$

Úgy látszik, ennek a végtelen sornak az összege háromféle is lehet, 0 vagy 1, vagy 1/2. Magát Leibnizet is, aki egyike volt a XVII. század legnagyobb elméinek, és aki Newtonnal együtt a diff. és integrálszámítást felfedezte, zavarba hozta ez a végtelen sor. Ő úgy okoskodott, hogy mivel ennek a sornak a határértéke egyaránt valószínűen 0 és 1, a helyes határéték a két szám számtani közepe, 1/2 .

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a XIV. században egy "matematikus" a fenti példával akarta matematikailag igazolni, hogy a "világot semmiből is lehetett teremteni", hiszen a nullából milyen egyszerű 1-et teremteni.

Ugyanis a nulla

$$0 + 0 + 0 + \dots$$

így is írható

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots ,$$

vagy más alakban

$$1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots ,$$

illetve

$$1 - (1-1) + (1-1) + \dots = 1$$

ami mégis valami.

Lássunk még egy, Bolzanótól származó példát:

Legyen

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 \pm \dots$$

Akkor

$$S = 1 - 2\,(1-2+4-8+16-32\pm\dots) = 1 - 2\,S ,$$

vagyis így

$$3\,S = 1 \qquad \text{és így} \qquad S = \frac{1}{3} .$$

Másrészt így is írhatjuk:

$$S = 1 + (-2+4) + (-8+16) + (-32+64) + \dots =$$
$$= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \dots$$

és eszerint S a végtelenhez tart.

Sőt

$$S = (1-2) + (4-8) + (16-32) + \ldots = -1-4-16 \ldots$$

pedig a minusz végtelenhez tart.

Mindezen ellentmondások azzal magyarázhatók, hogy a végesben, azaz véges összegre alkalmazható zárójelezés és zárójelfelbontás szabályát mechanikusan alkalmaztuk végtelen összegre is. Pedig csak konvergens sorokat lehet zárójelezni, azaz több tagot egyetlen taggá összevonni, ezzel sem a konvergenciaviszonyokat, sem a sorösszeget nem változtatjuk meg.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{2}\ S$$

$$\frac{1}{2}\ S = 1$$

$$S = 2$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{3}{2}\ \frac{1}{\frac{3}{4}} = 2$$

Tehát divergens sorokat zárójelezve hamis eredményre juthatunk, a fordított eljárás (zárójelfelbontás) pedig még konvergens végtelen sorok esetén sem lehetséges.

Megemlítünk még egy példát a kommutativitás mechnikus alkalmazására. Vizsgáljuk az alábbi konvergens sort:

$$L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \ln 2$$

Azt "várnánk", hogy konvergens sorok esetén érvényes a kommutativitás. A csoportosítás törvénye is érvényes! Csakhogy a végtelen nem ilyen "egyszerű".

Szorozzuk végig az eredeti sort 2-vel

$$2\,L = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} \pm \dots \quad , \quad \text{vagyis}$$

$$2\,L = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \pm \dots \quad .$$

Csoportosítsuk ezután a tagokat úgy, hogy az egyenlő nevezőjű törtek egymás mellé kerüljenek.

$$2\,L = (2-1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \dots$$

Tehát

$$2\,L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Itt azonban a jobboldalon éppen az eredeti sor áll, vagyis L , a baloldalon pedig $2\,L$.

Összefoglalva tehát ellentmondáshoz azért jutottunk, mert a véges ismert tulajdonságait a végtelenre is alkalmazni akartuk, ezeket azonban általában nem lehet átvinni a végtelenre. Ugyanakkor azt is világosan látni kell, hogy egyes végesre igaz tulajdonságok a végtelenben is érvényben maradhatnak, továbbá, hogy a végtelen és véges ellentmondása olyan új ismeretekhez vezet, amelyet a véges nem feltételez, mivel végtelen, de ugyanakkor éppúgy viselkedik mint a véges. (Lásd abszolut konv. sorok). Természetesen nem azt akarjuk mondani, hogy a végtelen ilyen, de ilyen is lehet.

A matematika azonban nem éri be csak a potenciális végtelen fogalmával. Amikor pl. egy intervallum összes valós számairól vagy egy nem véges halmaz elemeiről beszélünk, akkor nem csupán arra gondolunk, hogy akármeddig sorolhatnánk a halmaz elemeit, hanem arra is, hogy e halmaz egyszer s mindenkorra adott, befejezett, kész, már nem lehet hozzátenni sem elvenni belőle anélkül, hogy a halmaz meg ne változna. Ez a fajta végtelenség az aktuális végtelen. A végtelen halmazok az aktuális végtelen matematikai megfelelői.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Engels: A természet dialektikája. Bp. 1952.
2. Engels: Anti-Dühring. Bp. 1950.
3. Alekszandrov. A.D.: A matematika általános szemszögből
   Szovjet tanulmánygyűjtemény I. kötet
4. Kedrov: A modern természettudományok filozófiai problémái
   Bp. 1962.
5. Ruzsa: A matematika néhány filozófiai problémájáról. Bp. 1966.
6. Kónya: A matematika tárgya és helye a tudományok rendszerében.
   ACTA Universitatis Debreceniensis 1965.
7. Rényi: Dialógusok a matematikáról. Bp. 1965.
8. Perge: A matematika helye a tudományok rendszerében
   ACTA Academiae Agriensis. 1972.
9. Struik: A matematika rövid története. Bp. 1958.
10. Szász: A differenciál és integrálszámítás elemei. Bp. 1951.
11. Kalmár: A matematika alapjai (egyetemi jegyzet)