MÁTYÁS FERENC

WYTHOFF PÁROK REKURZÍV SOROZATOK TAGJAIBÓL

Abstract: **(Wythoff pairs with respect linear recurrences)** - Let $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recurrence defined by integer constants A,B,G_0,G_1 and the recurrence $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ $(n>1)$ where $A^2+4B>0$, $G_0^2+G_1^2\neq 0$. If α and β are the roots of equation $x^2-Ax-B=0$, then we have $G_n=a\,\alpha^n-b\,\beta^n$.
Many authors have discussed the properties of Wythoff pairs $\left(u_n;\ v_n\right)$, which are formed by letting $u_1=1$ and taking u_n as the smallest positive integer not yet used, and letting $v_n=u_n+n$.
In this paper we deal with the connections between second order linear recurrences G and Wythoff pairs with respect linear recurrences which are defined by $\left(u'_n;v'_n\right)=\left(\left[n\alpha^r\right];\left[n\alpha^s\right]\right)$, where r and s are fixed integers with $1\leq r<s$, α is the root of polynomial x^2-Ax-B with the greatest absolute value and $[x]$ denotes the integer part of the real number x.

I.

Definiáljuk a $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatot az A,B,G_0,G_1 rögzített egészekkel, melyekre

$D=A^2+4B \neq 0$ és a $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ $(n>1)$ rekurzív formulával. Az $x^2-Ax-B=0$ egyenletet a G sorozat karakterisztikus egyenletének nevezzük, és ha gyökeit α , illetve β jelöli, akkor

$$G_n=a\,\alpha^n - b\,\beta^n \,, \tag{1}$$

ahol $a=\frac{G_1-\beta G_0}{\alpha-\beta}$, $b=\frac{G_1-\alpha G_0}{\alpha-\beta}$ (lásd I. Niven, H.S.ZUCKERMANN 1978. 89.oldal.) A $G=G\left(1,1,G_0,G_1\right)$ sorozatot Fibonacci-típusúnak nevezzük.

Értelmezzük továbbá az $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ és $\left\{v_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat az alábbi módon: $u_n:=1$, $v_n:=2$ és $k>1$ esetén $u_k:=m$, $v_k:=u_k+k$, ahol m az a legkisebb pozitív egész, amelyre $u_i \neq m$, $v_i \neq m$ ha $1 \leq i < k$. Az $u_1, u_2, \ldots$, ill. $v_1, v_2 \ldots$ számokat Wythoff számoknak, a belőlük képzett $\left(u_1;v_1\right)$, $\left(u_2;v_2\right)$,... párokat Wythoff pároknak nevezzük. Ez alapján pl. az első öt Wythoff pár a következő: (1;2),(3;5),(4;7),(6;10),(8;13). Az $\left(u_n;v_n\right)$ párok tulajdonságait vizsgálták többek között A.F.HORADAM 1978, R. SILBER 1976, 1977; M.BICKNELL-JOHNSON 1985, V.E.HOGGATT, Jr., A.A.HILLMAN 1978, V.E.HOGGATT, Jr; M.BICKNELL-JOHNSON, R.SARSFIELD 1979.

A Wythoff párok egy-egy tulajdonságát meghagyva általánosított Wythoff párokhoz juthatunk. Így pl. meghagyva az $\left\{u_n\right\}$, $\left\{v_n\right\}$ számok azon tulajdonságát, hogy a pozitív egészeket diszjunkt osztályokba sorolják (lásd G.E.BERGUM, V.E.HOGGATT 1980; V.E.HOGGATT, Jr., M.BICKNELL-JOHNSON 1984) eljuthatunk az alábbi általánosított Wythoff számokhoz: $U_n=2u_n-n$, $V_n=v_n+n$, $Z_n=u_n+2n-1$. V.E.HOGGATT, Jr., M. BICKNELL-JOHNSON 1982-ben bebizonyította, hogy az $\left\{U_n\right\}, \left\{V_n\right\}, \left\{Z_n\right\}$ számok a pozitív egész három diszjunkt osztályát adják. Az $\left[U_n; V_n; Z_n\right]$ számhármast Wythoff hármasnak is nevezik. Pl. az első három ilyen hármas:

(1;3;2), (4;7;6), (5;10;9)

Az így általánosított Wythoff számok és a G=G (1,1,1,3) sorozat között talált érdekes kapcsolatot M.BICKNELL-JOHNSON 1985-ben.

Ugyancsak ismert, hogy az eredeti Wythoff számok generálhatók a Fibonacci típusú sorozatok karakterisztikus egyenletének $\varphi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ gyökével az alábbi módon:

$$u_n = \left[n\,\varphi\right] \quad , \quad v_n = \left[n\,\varphi^2\right] \qquad (2)$$

ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli (Pl. W.W.ROUSE BALL 1962.) E kapcsolat alapján felvetődik, hogy mely Fibonacci típusú sorozat elemeiből képezhető véges, illetve végtelen sok Wythoff pár. Erre már megadtuk a választ (lásd MÁTYÁS 1982.)

Jelen dolgozatben e kérdéssel általánosabban foglalkozunk. (2) analógiájára értelmezzük az

$$u'_n = \left[n\,\alpha^r\right] \quad , \quad v'_n = \left[n\,\alpha^s\right] \qquad (3)$$

egészeket, ahol $1 \le r < s$ fix egész, α pedig legyen az $A>0,\ B\neq0,\ D=A^2+4B>0,\ G_0^2+G_1^2\neq0$ feltételeket kielégítő $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)$ sorozat karakterisztikus egyenletének nagyobb abszolut értékű (egyben pozitív) gyöke.

Célunk megadni azokat a G sorozatokat, amelyeknek a tagjaiból végtelen sok $\left(u'_n; v'_n\right)$ pár képezhető. Megjegyezzük, hogy $r=1$, $s=2$, $\alpha=\varphi$

esetben az eredeti Wythoff párokat kapjuk, így dolgozatunk speciális esetként tartalmazza 1982-ben elért eredményünket.

II.

Tétel: Az $A>0,\ B\neq 0,\ D=A^2+4B>0$ és $G_0^2+G_1^2\neq 0$ feltételeket kielégítő $G=G\left(A,B,G_0,G_1\right)$ sorozat $\left(G_n,G_{n+k}\right)$ elemeiből akkor és csak akkor képezhető végtelen sok $\left(u_i',v_i'\right)$ Wythoff pár ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

(i) $a>0,\ k=s-r,\ (0<)\ |\beta|<1,\ b\neq 0$ és ha $\beta>0$, akkor $b<0$;

(ii) $a>0,\ k=s-r$ és $b=0$;

(iii) $a=0\ (b\neq 0),\ |\beta|>1,\ \alpha^{s-r}=\beta^k$ valamely $k=k_0>1$ egészre és ha $\beta>1$, akkor $b<0$.

(Megjegyzés: G-re tett feltételekből adódik, hogy $\alpha>1,\ \alpha>|\beta|\neq 0$.)

A tétel bizonyítását egy segédtétel bizonyításával kezdjük.

Segédtétel: A tétel feltételeit kielégítő G sorozat tagjaiból akkor és csak akkor képezhető végtelen sok (3) típusú Wythoff pár, ha a

$$\frac{G_n}{\alpha_r} \leq i < \frac{G_n}{\alpha_r} + \frac{1}{\alpha_r} \qquad (4)$$

$$\frac{G_{n+k}}{\alpha^s} \leq i < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} + \frac{1}{\alpha^s}$$

egyenlőtlenség rendszer végtelen sok n, n+k, i pozitív egészre fennáll.

<u>A segédtétel bizonyítása:</u> A $\left(G_n, G_{n+k}\right)$ pár akkor és csak akkor alkot (3) típusú Wythoff párt, ha $\left(G_n, G_{n+k}\right)=\left(\left[i\alpha^r\right], \left[i\alpha^s\right]\right)$ valamely i pozitív egészre. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy i kielégíti a

$$G_n \leq i \quad \alpha^r < G_n+1$$

$$G_{n+k} \leq i \quad \alpha^s < G_{n+k}+1$$

egyenlőtlenség rendszert. α^r -rel, ill. α^s -sel történő osztás után -- mivel $\alpha>1$ -- adódik (4).

Megjegyezzük, hogy (4) megoldhatóságával ekvivalens a jobboldalak felcserélésével nyert

$$\frac{G_n}{\alpha^r} \leq i < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} + \frac{1}{\alpha^s}$$

$$\frac{G_{n+k}}{\alpha^s} \leq i < \frac{G_n}{\alpha^r} + \frac{1}{\alpha^r} \qquad (5)$$

egyenlőtlenség rendszer megoldhatósága. Ezért a bizonyítás további részében (4) és (5) közül mindig az alkalmasabb alakot fogjuk használni.

<u>A tétel bizonyítása:</u> A bizonyítást a feltételek szükséges voltának igazolásával kezdjük $a=\frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta}\neq 0$ esetben.

- Mivel $\lim_{i\to\infty} u_i' = \lim_{i\to\infty}\left[i\alpha^r\right] = \infty$, ill. $\lim_{i\to\infty} v_i' = \lim_{i\to\infty}\left[i\alpha^s\right] = \infty$ így szükséges, hogy a G sorozat elemei között is végtelen sok különböző pozitív tag legyen. A G sorozatra tett feltételek miatt

$$\alpha > 1, \quad |\beta| < \alpha, \quad \text{s így}$$

$$G_n = a\,\alpha^n - b\,\beta^n = a\,\alpha^n\left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)$$

alapján ez csak akkor lehetsége, ha $a > 0$.

- Bizonyítjuk továbbá, hogy ha (5)-nek végtelen sok $n, n+k, i$ pozitív egész megoldása van, akkor k nem lehet tetszőleges. Ugyanis elegendően nagy n, illetve $n+k$ értékekre $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ miatt igazak az alábbi becslések:

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^n < G_n = a\,\alpha^n\left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right) < 2\,a\,\alpha^n$$

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^{n+k} < G_{n+k} < 2\,a\,\alpha^{n+k}$$

Alkalmazva ezt (5)-től (ugyancsak elég nagy n, $n+k$ esetén)

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^{n-r} < \frac{G_n}{\alpha^r} < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} + \frac{1}{\alpha^s} < 2\,a\,\alpha^{n+k-s} + \alpha^{-s} < 3\,a\,\alpha^{n+k-s}$$

ill.

$$\frac{1}{2}\,a\,\alpha^{n+k-s} < \frac{G_{n+k}}{\alpha^s} < \frac{G_n}{\alpha^r} + \frac{1}{\alpha^r} < 2\,a\,\alpha^{n-r} + \alpha^{-r} < 3\,a\,\alpha^{n-r},$$

melyekből $C_1 < k < C_2$ adódik, ahol C_1, C_2 az előzőekből meghatározható konstansok.

- (5)-ből $G_n=a\,\alpha^n-b\,\beta^n$ alakját használva a

$$G_{n-r}-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}+b\beta^{n-r}\le i<G_{n-r}+\frac{a\alpha^{n+k}-b\beta^{n+k}}{\alpha^s}-a\alpha^{n-r}+b\beta^{n-r}+\frac{1}{\alpha^s}$$

$$G_{n-r}+\frac{a\alpha^{n+k}-b\beta^{n+k}}{\alpha^s}-a\alpha^{n-r}+b\beta^{n-r}\le i<G_{n-r}-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}+b\beta^{n-r}+\frac{1}{\alpha^r}$$

egyenlőtlenségekhez jutunk, melyek ha végtelen sok n, n+k, i gészre igazak, akkor ugyancsak végtelen sok n, n+k-ra igaz a belőlük nyerhető

$$-\frac{1}{\alpha^s}-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}<\frac{a\alpha^{n+k}-b\beta^{n+k}}{\alpha^s}-a\alpha^{n-r}<-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}+\frac{1}{\alpha^r},$$

majd átalakítva a

$$-\frac{1}{\alpha^r}<a\alpha^{n-r}\left(\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\alpha^{k-s+r}-\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+1-\alpha^{k-s+r}\right)<\frac{1}{\alpha^s}\quad(6)$$

egyenlőtlenség is.

De $a>0$, $\alpha>1$, $|\beta|<\alpha$ és elég nagy n-ek esetén $C_1<k<C_2$ miatt (6) csak akkor oldható meg végtelen sok pozitív n, n+k egészre, ha $\alpha^{k-s+r}=1$, mely $\alpha>1$ miatt csak k=s-r esetén teljesül.

- Mivel k=s-r, így (6)-ból a

$$-\frac{1}{\alpha^r}<b\beta^{n-r}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^s-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right)<\frac{1}{\alpha^s}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, melynek $0\ne|\beta|<\alpha$ és $1\le r<s$ miatt csak akkor lehet végtelen sok pozitív n egész megoldása, ha $|\beta|\le 1$, vagy $b=0$. A $|\beta|=1$ és $b\ne 0$ esetet kizárhatjuk a további vizsgálatból, ugyanis $\beta=\pm 1$ esetén α is egész, s így a

$$a\,\alpha^n - b\,\beta^n = G_n = \left[i\,\alpha^r\right] = i\,\alpha^r$$

$$a\,\alpha^{n+s-r} - b\,\beta^{n+s-r} = G_{n+s-r} = \left[i\,\alpha^s\right] = i\,\alpha^s$$

egyenlőségekből $\alpha = \pm 1$ következne, ami a G sorozatra tett

$$A = \alpha + \beta > 0$$

$$D = \left(\alpha - \beta\right)^2 > 0$$

feltételek miatt lehetetlen.

- Bevezetve az $f(n,j)=b\beta^{n-r}\,\frac{\alpha^j-\beta^j}{\alpha^j}$ jelölést, továbbá $G_n=a\alpha^n-b\beta^n$, k=s-r helyettesítéssel (4)

$$G_{n-r} + f(n,r) \le i < G_{n-r} + f(n,r) + \frac{1}{\alpha}\,r$$

$$(7)$$

$$G_{n-r} + f(n,s) \le i < G_{n-r} + f(n,s) + \frac{1}{\alpha}\,s$$

alakban is írható. Ahhoz, hogy a (7) egyenlőtlenség rendszert végtelen sok n, i pozitív egész kielégítse, szükséges, hogy $f(n,r)\le 0$ és $f(n,s)\le 0$ végtelen sok pozitív n-re teljesüljön, ugyanis elegendően nagy n-ekre ($|\beta|<1$ miatt) pl. $|f(n,r)|<1$ és $f(n,r)+\frac{1}{\alpha}r<1$. Így ha ezekre az n-ekre $f(n,r)>0$ lenne, akkor (7) első egyenlőtlenségéből $G_{n-r}+1\le i\le G_{n-r}$ adódna, mely lehetetlen.

(8) pedig csak akkor nem teljesül végtelen sok pozitív n egészre ha $\beta>0$ esetén $b>0$, mivel $|\beta|<\alpha$.

- Az eddigiekben igazoltuk tételünk (i) vagy (ii) feltételeinek szükségességét és most az a=0 esetet vizsgálva rátérünk az (iii) feltétel szükségességének bizonyítására.

Ha $a=0$ és $|\beta|\le 1$, akkor G_n, G_{n+k} nem lehet (u_i', v_i') pár végtelen sok n, n+k, i egészre, mivel $|G_n|=|b\beta^n|\le|b|$ minden $n\ge 0$-ra.

- Ha $a=0$ $(G_n=-b\beta^n)$ és $|\beta|>1$, akkor (5)

$$-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}\le i<-\frac{b\beta^{n+k}}{\alpha^s}+\frac{1}{\alpha^s}$$

$$-\frac{b\beta^{n+k}}{\alpha^s}\le i<-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}+\frac{1}{\alpha^r}$$

alakú, mely ha végtelen sok pozitív n, n+k, i egészre megoldható, akkor a belőle nyerhető

$$-\frac{1}{\alpha^r}<b\beta^n\left(\frac{\beta^k}{\alpha^s}-\frac{1}{\alpha^r}\right)<\frac{1}{\alpha^s} \tag{9}$$

egyenlőtlenséget is kielégíti végtelen sok n, k pozitív egész. De (9) csak akkor oldható meg végtelen sok pozitív n, k egészre, ha

$$\frac{\beta^k}{\alpha^s}-\frac{1}{\alpha^r}=0 \quad \text{vagyis} \quad \beta^k=\alpha^{s-r}$$

teljesül valamely $k=k_0$ esetén $(k_0>1,$ mert $\alpha>|\beta|>1,$ $1\le r<s)$.

- Ha $a=0$, $\beta>1$ és $b>0$, akkor $G_n=-b\beta^n<0$ minden $n\geq 0$-ra, így ebben az esetben biztosan nem képezhető $\{u_i', v_i'\}$ pár a G sorzat tagjaiból.

- A tétel feltételei elégségesek is, ugyanis az (i) esetben ha $a>0$, $k=s-r$, $0<|\beta|<1$, $b\neq 0$ akkor a $0\geq b\beta^{n-r}$ egyenlőtlenséget is kielégítő elegendően nagy n-ekre a

$$0 \leq -f(n,r) < \frac{1}{\alpha^r}$$

$$0 \leq -f(n,s) < \frac{1}{\alpha^s}$$

egyenlőtlenségek szintén teljesülnek. Így vételen sok pozitív n, i megoldása van (7)-nek, valamint a vele ekvivalens (4)-nek is.

- Az (ii) feltétel is elégsége, ugyanis $a>0$, $k=s-r$, $b=0$ esetén

$$G_n = a\,\alpha^n \text{ , s igy (4)}$$

$$G_{n-r}=a\,\alpha^{n-r} \leq i < a\,\alpha^{n-r} + \frac{1}{\alpha^r}$$

$$G_{n-r}=a\,\alpha^{n-r} \leq i < a\,\alpha^{n-r} + \frac{1}{\alpha^s}$$

alakú, melynek $\alpha>1$, $1\leq r<s$ miatt nyilván végtelen sok pozitív n, i megoldása van, mivel $G_{n-r}=a\,\alpha^{n-r}$ egész.

- Az (iii) feltétel elégséges voltát az alábbi módon láthatjuk be.

Mivel $B\neq 0$, így $\beta\neq 0$, továbbá $G_0^2+G_1^2\neq 0$ és $a=\frac{G_1-\beta G_0}{\alpha-\beta}=0$ feltételekből $\beta=\frac{G_1}{G_0}$ következik. Esetünkben $G_n=-b\beta^n$, így $b=-G_0$. $G_n=-b\,\beta^n=G_0\left(\frac{G_1}{G_0}\right)^n$ egész szám minden $n\geq 0$ -ra, ezért $\beta=\frac{G_1}{G_0}$ egész szám, amiből $\alpha+\beta=A$ miatt α is egész. A feltétel szerint létezik olyan $k_0>1$ egész, melyre $\beta^{k_0}=\alpha^{s-r}$, így $G_n=-b\,\beta^n=i\,\alpha^r$

$$G_{n+k_0}=-b\,\beta^{n+k_0}=-b\,\beta^n\,\beta^{k_0}=i\,\alpha^r\,\beta^{k_0}=i\,\alpha^r\,\alpha^{s-r}=i\,\alpha^s$$

egyenletekből következik, hogy ha a $G_n=-b\,\beta^n=i\alpha^r$ egyenletnek végtelen sok pozitív n, i megoldása van, akkor a G sorozat G_n, G_{n+k} elemeiből végtelen sok $\{u_i', v_i'\}$ képezhető. A $G_n=-b\,\beta^n=i\alpha^r$ egyenletet pedig vételen sok pozitív n, i kielégíti, ugyanis a feltételek miatt $G_n=-b\,\beta^n>0$ végtelen sok n esetén, továbbá a $\beta^{k_0}=\alpha^{s-r}$ (α,β egészek) egyenlőségből következik, hogy α és β primhatványtényezős alakjában ugyanazok a primszámok állnak, így elegendően nagy n-ekre $\frac{G_n}{\alpha^r}=-\frac{b\beta^n}{\alpha^r}$ egész szám.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

FELHASZNÁLT IRODALOM

G.E. Bergum, V.E.Hoggatt, Jr. Some extensions of Wythoff-pairs sequences, The Fibonacci Quart., Vol. 18. 1980; 28-32.

M.Bicknell-Johnson. Generalized Wythoff numbers from simultaneous Fibonacci representations Vol. 23. 1985; 308-318. Fib. Quart.

V.E.-Hoggatt, Jr., A.A.Hillman, A property of Wythoff pairs, The Fibonacci Quart. Vol. 16. 1978; 472.

V.E.Hoggatt, Jr., M.Bicknell - Johnson, R. Sarsfield, A generalization of Wythoff's Game, The Fibonacci Quart. Val. 18. 1979; 198-211.

V.E.Hoggatt, Jr., M.Bicknell - Johnson. Additive Partitions of the Positive Integers and Generalized Fibonacci Representation, The Fibonacci Quart. Vol. 22. 1984; 2-21.

V.E.Hoggatt, Jr., M.Bicknell - Johnson. Lexicographic Ordering and Fibonacci Representations, The Fibonacci Quart. Vol. 20. 1982. 193-218.

A.F. Horadam, Wythoff Pairs, The Fibonacci "Quart. Vol. 16. 1978; 147-151.

Mátyás Ferenc. Wythoff-párok és a másodrendű sorozatok kapcsolata, Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, XVI. kötet, 1982; 547-556.

I. Niven, H.S. Zuckermann, Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Kiadó Bpl. 1978.

W.W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays. Rev. ty H.S.M. Coxeter, New York: Macmillan, 1962; 36-40.

R. Silber, A Fibonacci Property of Wythoff Pairs, The Fibonacci Quart. Vol. 14. 1976; 380-384.

R. Silber, Wythoff's Nim and Fibonacci Representations, The Fibonacci Quart. Vol. 15. 1977; 85-88.