H. MOLNÁR SÁNDOR*

LINEÁRIS REKUZÍV SOROZATOK EGY ELOSZLÁSI TULAJDONSÁGÁRÓL

Abstract: (On a distribution property of linear reccurences)

Let $G=\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recurrence of real numbers defined by the recursion $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ for $n\geq 2$, where A and B are non-zero real numbers and the initial terms G_0, $G_1(\neq 0)$ are given. The distribution properties of these sequences have been studied by several authors. For example Tichy showed that there are infinitely many sequences G which are everywhere dense modulo 1 on the unit interval but they not uniformly distributed. However the characteristic plynomials of the sequences in Tichy's construction have positive discriminants. In present paper we extend this result for sequences having negative discriminants furthermore we give the asymptotic distribution functions, too.

----

* A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273. sz. pályázata támogatta.

Legyen $G=\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy másodrendű lineáris rekuziv sorozat definiálva a

(1) $$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \qquad n\geq 2$$

formulával, ahol A és B zérustól különböző valós számok, és a G_0, G_1 $(\neq 0)$ kezdőértékek szintén valós számok. A G sorozat

$$f(x)=x^2-Ax-B$$

karakterisztikus polinomjának a $D=A^2+4B$ diszkriminánsát egyidejűleg a G sorozat diszkriminánsának is nevezzük. Ismeretes, hogy ha a karakterisztikus polinomnak két különböző zérushelye van -- amit α -val és β -val jelölünk --, akkor G_n explicit alakja

(2) $$G_n = a\,\alpha^n + b\,\beta^n \qquad (n\geq 0)$$

ahol

(3) $$a = \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \qquad \text{és} \qquad b = -\frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta}$$

A (2) egyenletet Binet formulának nevezzük. $A=B=G_1=1$, $G_0=0$ esetén a G sorozat az ismert Fibonacci sorozattal azonos, amit F-el jelölünk. Az (1) sorozat nemdegenerált, ha α/β nem egységgyök.

Dolgozatunkban másodrendű lineáris rekurzív sorozatok modulo 1 eloszlásával foglalkozunk, így szükségünk lesz néhány további alapveztő fogalomra is.

Az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényének az

$$F: [0,1] \longrightarrow R,\ x \longrightarrow F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}\left(\{x_n\}\right)$$

függvényt nevezzük, ahol 1_I az I intervallum karakterisztikus függvényét, míg az $\{x\} = x - [x]$ az x valós szám törtrészét jelöli, tehát $1_{[0,x[}(\{x_n\})$ értéke 1 ha $\{x_n\} \in [0,x[$, és zérus, ha $\{x_n\} \notin [0,x[$.

Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor egyenletes eloszlású modulo 1, ha $F(x)=x \quad (0 \le x \le 1)$ teljesül.

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat mod 1 egyenletes eloszlású legyen, az hogy a

$$\Delta_N (x_n) = \sup_{0 \le x \le 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}(\{x_n\}) - x \right|$$

discrepancia zérushoz konvergáljon, ha $N \to \infty$. (ld.pl. L. KUIPERS és H. NIEDERREITER (1974).)

H.WEYL (1916), közismert dolgozatában bizonyította, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású mod 1, ha

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\,dx \tag{4}$$

teljesül minden olyan valós változós, valós vagy komplex értékű folytonos f függvényre, melynek periodusa 1. Minthogy az összes folytonos 1 periódusú függvény egyenletesen approximálható trigonometrikus polinomokkal, ebből következik a Weyl kritérium: Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású modulo 1, ha

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \tag{5}$$

minden $h \neq 0$ egész számra igaz.

A mod 1 eloszlással kapcsolatos alapvető eredmények megtalálhatók a L. KUIPERS és H. NIEDERREITER (1974) és E. HLAWKA (1979) monográfiákban.

Lineáris rekurzív sorozatokkal kapcsolatosan felvetődő eloszlási problémákat már számos szerző tanulmányozott. Példaként csak a témánkhoz szorosan kapcsolódó dolgozatok közül említünk néhányat.

R.L. DUNCAN (1967) és L. KUIPERS (1969) a $\left\{\log_{10} F_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatról megmutatták, hogy mod 1 egyenletes eloszlású, ahol F_n a Fibonacci sorozat n-dik elemét jelöli. Eredményüket L. KUIPERS 1982-ben általánosította tetszőleges $b > 1$, $b \in N$ alapú logaritmusra.

M.B. GREGORI és J. M. METZGER 1978-ban a $\lim_{n\to\infty} \sin\left(G_n x \Pi\right)$ határértéket vizsgálták, ahol G_n Fibonacci típusu sorozat, vagyis A=B=1, és x egy tetszőleges valós szám. Bizonyították, hogy a határérték akkor és csak akkor létezik, ha x eleme a $Q(\sqrt{5})$ egy -- általuk meghatározott -- H részhalmazának. Eredményüket H. MOLNÁR SÁNDOR 1983-ban általánosította az $A, G_0, G_1 \in Z$ és B=1 esetre, majd 1984-ben módszert adott a határérték meghatározására és azon $x \in R$ számok megkeresésére, melyekkel a határérték létezik, abban az esetben, ha a karakterisztikus polinom egyik zérushelye P.V. szám. (Az $\alpha \in R$ algebrai egész számot Pisot-Viyayaraghavan féle számnak -- P.V. számnak -- nevezzük, ha $\alpha > 1$ és összes α -tól különböző konjugáltjainak abszolut értéke egynél kisebb.)

KISS PÉTER és R.F.TICHY (megjelenés alatt), a G_{n+1}/G_n sorozat mod 1 asszimptotikus eloszlásfüggvényét állították elő negatív diszkirinánsú G sorozatokra.

-M.B.LEVIN és I.E. SPARLINSZKIJ 1979-ben konstruáltak olyan paramétereket, melyekkel képezett G sorozat egyenletes eloszlású mod 1.

KISS PÉTER és H.MOLNÁR SÁNDOR (1982), kontinuum sok olyan $x \in R$ és $y \in R$ számot adtak meg, melyekkel egy G egészelemű lineáris rekuzív sorozatból képezett $\{x \cdot G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1[$ intervallumban, de nem egyenletes eloszlású, illeltve az $\{y \cdot G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak mod 1 végtelen sok torlódási pontja van, de nem mindenütt sűrű a $[0,1[$ intervallumban. Az említett dolgozatban a szerzők feltételezik, hogy a karakterisztikus polinom egyik zérushelye P.V. szám. R.F.TICHY megjelenés alatt levő dolgozatában végtelen sok valósértékű másodrendű G sorozatot ad meg, melyek mod 1 nem egyenletes eloszlásúak, de a $[0,1[$ intervallumban mindenütt sűrűek.

KISS P. és H. MOLNÁR S. (1982) M.B LEVIN és I.E. SPARLINSZKI (1979) és R.F. TICHY megjelenés alatt lévő dolgozataiban közös, hogy a karakterisztikus polinomok zérushelyei valós számok. Most megmutatjuk, hogy végtelen sok olyan valósértékű G másodrendű lináris rekuzív sorozat létezik negatív diszkriminánssal is, melyekre $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1[$ -ben, de nem egyenletes eloszlású ott. Bizonyításunk konstruktív és a modulo 1 aszimptotikus eloszlás függvényt is előállítjuk.

Ha $D=A^2+4B<0$, akkor (2)-ben α, β valamint a, b komplex konjugált számok, s így α, β, a és b felírhatók

(6) $$\alpha = r\, e^{i2\pi\Theta}, \qquad \beta = r\, e^{-i2\pi\Theta}$$

és

(7) $$a = \frac{1}{2} r_1 e^{i2\pi\omega}, \qquad b = \frac{1}{2} r_1 e^{-i2\pi\omega}$$

alakban is, ahol

$$\Theta = \frac{1}{2\Pi} \text{ arctg } \frac{\sqrt{-D}}{A} ,$$

$$\omega = \frac{1}{2\Pi} \text{ arctg } \frac{A G_0 - 2 G_1}{G_0 \sqrt{-D}}$$

és r, r_1 pozitív számok. $r_1 \neq 0$ mert $D<0$, továbbá feltehető, hogy

$$0<\Theta,\ \omega < \frac{1}{2} .$$

Így (2) és (3) alapján

(8)
$$G_n = \frac{1}{2} r_1 r^n e^{i 2\pi(\omega+n\Theta)} + \frac{1}{2} r_1 r^n e^{-i 2\pi(\omega+n\Theta)} =$$
$$= r_1 r^n \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)$$

adódik

Érvényes a következő:

1. TÉTEL: Legyen A egy valós szám, melyre $-2 < A < 2$ és

$$\Theta = \frac{1}{2\Pi} \arccos (A/2)$$

irracionális. Legyen $B=-1$, $G_1 \neq 0$; $G_0, G_1 \in R$ és

$$G_n = A\, G_{n-1} + B\, G_{n-2} \qquad (\text{ha } n \geq 2) .$$

Ha $r_1 = 2\ |a| \geq 2$ egész szám, akkor $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a $[0,1[$ intervallumban.

A következő tétel megfogalmazásához néhány jelölést vezetünk be. Legyen n egy egész szám,

$$K_n = \begin{cases} n \text{ ha } n \ge 0 \\ \max\{n, -r_1\} \text{ ha } n < 0 \end{cases}$$

és legyen

$$L_n(x) = \begin{cases} \min\{n+x,\ r_1\} & \text{ha} \quad n \ge 0 \\ \max\{n+x, -r_1\} & \text{ha} \quad n < 0 \end{cases}$$

Ezen jelölések alkalmazásával bizonyítjuk a következőt.

2. TÉTEL: Legyen A egy valós szám, melyre

$-2 < A < 2$ és $\Theta = \frac{1}{2\Pi} \arccos(A/2)$ irracionális.

Legyen $B=-1$, $G_1 \neq 0$ és $G_0, G_1 \in R$. Ekkor a

$$G_n = A\,G_{n-1} + B\,G_{n-2} \qquad (\text{ha} \quad n \ge 2)$$

lineáris rekuzív sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye

$$F: [0,1] \longrightarrow R,\ x \longrightarrow F(x) = \frac{1}{\Pi} \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \left(\arccos\left(\frac{K_j}{r_1}\right) - \arccos\left(\frac{L_j(x)}{r_1}\right)\right).$$

Következmény: Kontinuum sok valósértékű lineáris rekurzív sorozat van negatív diszkriminánssal, amely modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a $[0,1[$ intervallumban.

Az 1. Tétel bizonyítása.

Legyen $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ a tétel feltételeit kielégítő sorozat. (8) alapján

(9) $\qquad G_n = r_1 r^n \cos 2\Pi(\omega + n\Theta)$,

ahol

$$r = |\alpha| = \left| \frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2} \right| = \left| \frac{A+i\sqrt{4-A^2}}{2} \right| = 1 .$$

Ezt figyelembe véve a (9)-ből

(10) $G_n = r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)$

adódik.

Legyen $c \in [0,1[$. Mivel $r_1 \geq 2$ létezik olyan $d \in [0,1[$, hogy

$$\cos 2\Pi\, d = \frac{c}{r_1} .$$

A Θ irracionális szám, ezért mint ismeretes az

$$\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(\omega+n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$$

sorozat egyenletes eloszlású mod 1. Ekkor viszont mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1[$ intervallumban, s így ki lehet választani olyan $\left(\omega+n_j\Theta\right)_{j=0}^{\infty}$ részsorozatotát, mely mod 1 konvergál d-hez. De akkor a

$$\left(G_{n_j}\right)_{j=0}^{\infty} = \left(r_1 \cos 2\Pi\left(\omega+n_j\Theta\right)\right)_{j=0}^{\infty}$$

konvergál a tetszőlegesen választott $c \in [0,1[$ számhoz, amiért is a c számnak tetszőleges pozitív környezetében van a $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak eleme, tehát $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ mindenütt sűrű $[0,1[$ -ben. De akkor mod 1 is sűrű.

Bizonyítjuk azonban, hogy nem egyenletes eloszlású. Ehhez felhasználjuk a Weyl kritériumot. Mivel Θ irracionális, ezért $\left(\omega+n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$ egyenletes eloszlású mod 1, s így a (4) relációt alkalmazhatjuk az

$$f(x) = e^{2\pi i h r_1 \cos 2\pi x}$$

•

-re és így (5)-ből

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i hG_n} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i hr_1\cos 2\pi(\omega+n\Theta)} =$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i hr_1\cos 2\pi x}dx$$

adódik.

De $h \neq 0$ esetén könnyen belátható, hogy

$$\int_0^1 e^{2\pi i h\cos 2\pi x}dx = I_0\left(4\,\Pi hr_1\right) \neq 0 \quad ,$$

ezért a $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(r_1\ \cos\ 2\Pi(\omega+n\Theta)\right)_{n=0}^{\infty}$ nem egyenletes eloszlású mod 1.

A 2. Tétel bizonyítása

A $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényének a $0 \leq x \leq 1$ helyen felvett értéke definició szerint:

$$F(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}(\{G_n\}) \ .$$

Használjuk G_n (10)-beli alakját. Így

$$F(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{[0,x[}\left(\left\{r_1\cos\ 2\Pi(\omega+n\Theta)\right\}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} 1_{[j,j+x[}\left(r_1\cos\ 2\Pi(\omega+n\Theta)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} 1_{[j,j+x[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right) + \right.$$

$$+ 1_{[[r_1],\min\{[r_1]+x,r_1\}[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right) +$$

$$\left. + 1_{[-r_1,\max\{-r_1,[-r_1]+x\}[}\left(r_1 \cos 2\Pi(\omega+n\Theta)\right)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 2\left(\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} 1_{\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{j+x}{r_1},\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{j}{r_1}\right[}(\{\omega+n\Theta\})+\right.$$

$$+ 1_{\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{\min\{[r_1]+x,r_1\}}{r_1}\right),\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{[r_1]}{r_1}\right)\right[}(\{\omega+n\Theta\}) +$$

$$\left. + 1_{\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{\max\{-r_1,[-r_1]+x\}}{r_1}\right),\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{[-r_1]}{r_1}\right)\right[}(\{\omega+n\Theta\})\right).$$

Minthogy Θ irracionális, ezért $\left(\omega+n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$ egyenletes eloszlású mod 1, így

$$F(x) = \sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} \left(\frac{1}{\Pi}\arccos\frac{j}{r_1} - \frac{1}{\Pi}\arccos\frac{j+x}{r_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{[r_1]}{r_1}\right) - \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{\min\{[r_1]+x,r_1\}}{r_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{-r_1}{r_1}\right) - \frac{1}{\Pi}\arccos\left(\frac{\max\{-r_1,[-r_1]+x\}}{r_1}\right) =$$

$$= \sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \left(\frac{1}{\Pi}\arccos\frac{k_j}{r_1} - \frac{1}{\Pi}\arccos\frac{L_j(x)}{r_1}\right) ,$$

s ez a 2. Tételt igazolja.

A következmény bizonyítása

A (3) és (7) relációkból

$$r_1 = \left| \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \right| 2$$

következik.

Ha $G_0 = 0$, $G_1 = j\ |\alpha-\beta|$, ahol $j \geq 1$ egész szám, akkor $r_1 = 2j \geq 2$ egész szám lesz.

Nyilvánvalóan kontinuum sok $A \in R$ szám létezik a $-2 < A < 2$ és $\Theta = \frac{1}{2\Pi} \arccos (A/2)$ irracionális feltételekkel, ezért az 1. Tétel feltételei kontinuum sok olyan G sorozatra teljesülnek, melynek diszkriminánsa: $D=A^2-4$ negatív, s ez a következményt igazolja.

FELHASZNÁLT IRODALOM

R.L. DUNCAN, An application of uniform destribution to the Fibonacci numbers, Fibonacci Quart., 5. (1967) 137-140.

M.B. GREGORY and J.M. METZGER, Fibonacci sine sequences, Fibonacci Quart., 16 (1978), 119-120.

E. HLAWKA, Theorie der Gleichverteilung, Bibl. Inst., Mannheim-Wien-Zurich, 1979.

P. KISS and S. MOLNÁR, On distribution of linear recurrences modulo 1, Studia Sci. Math. Hungar., 17 (1982), 113-127.

P. KISS and R.F. TICHY, Distribution of the ratios of the terms of a second order linear recurrence, Proc. Koninkl. Niederlandse Akad. Weten., A 89 (1968), 79-86.

L. KUIPERS, Remark on a paper by R.L. Duncan concerning the uniform distribution mod 1 of the sequence of the logarithms of the Fibonacci numbers, Fibonacci Quart., 7 (1969), 465-466, 473.

L. KUIPERS, A property of the Fibonacci sequence F_m , m=0,1........ Fibonacci Quart., 20 (1982), 112-113.

M.B. LEVIN and I.E. SPARLINSKY, The uniform distribution of fractional part of recurrent sequences orosz nyelven, Usp.Mat.Nank., 34. (1979), No.3 (207), 203-204.

S.H. MOLNÁR, Sine sequence of second order linear recurrences, Period, Math.Hungar., 14 (1983), 259-267.

H. MOLNÁR SÁNDOR, Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak szinuszairól, Az Egri HSMTKF közleményei, XVII. (1984), 825-833.

L. KUIPERS and H.NIEDERREITER, Uniform distribution of linear recurrence sequences, megjelenés alatt.

H.WEYL, Über die Gelichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Ann. 77. (1916), 313-352.