ACTA ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM XIX./VIII.
1053--1056

AZ EGRI TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

TANULMÁNYOK A FÖLDRAJZTUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

EGER
1989

Szerkesztő:

KISS PÉTER

Főszerkesztő:

VAJON IMRE

HU ISSN 0239-1422
ISBN 963 7752 13 7

Felelős kiadó: Szűcs László
főiskolai főigazgató

BALOGH VIKTÓRIA

A ZSEBSZÁMOLÓGÉP ALKALMAZÁSA AZ ÁLTALÁNOS ISKOLAI MATEMATIKAOKTATÁSBAN

ABSTRAKTO: (La aplikado de poŝkalkuliloj en la kadro de la matematika instruado.) La rolo de la aplikado de poŝkalkulmaŝinoj plialtiĝos estonte en kadro de la matematika instruado.

La kalkulmaŝinojn oni povas disponigi al la servo de la evoluigo de la kalkulkapablo de la gelernantoj, ĉar ili la atendeblajn solvojn de la taskoj antaŭtaksas kaj ni certigas al tio sufiĉan tempon por cerbe kalkuli. La gelernantoj tiel povas elformi metodojn por simpligi la kalkuladon. Dum la aplikado de la maŝinoj ili observas la ŝanĝadon de la grandeco de la nombroj kaj sekve evoluas ilia koncepto pri numeroj kaj ili povas bone orientiĝi en la amasoj de la numeroj. En la taskosolvadoj ili atingos la konscian, rapidan kaj precizan solvojn. Tio ĉesigas la streĉitecon kun la solvado de la taskoj kaj tiel la science agado translokiĝas al la planado de la solvometodo, kaj al la trarigardo de la finfaro de la tasko - de la komenco ĝis la lasta momento.

La ekkono de la internaj ecoj de kalkulmaŝinoj, - la ekzamenado de unikaj kapabloj de maŝinoj helpas la konscian aplikadon de kalkuliloj kaj ilian utiligon per maksimala plenumkapablo.

La kalkulmaŝinoj povas esti pozitivaj motivantaj iloj de sukcese matematiko-instruado, se ilin ne nur mekanike, - per la enbatado de la klovetoj laŭsignoj - ni donas en la manojn de la gelernantoj.

I.

Az ember segítőeszközöket, gépeket hozott létre a munkájának megkönnyítésére, pl: az irodákban írógépeket - egyre több teljesítményre képeseket -, háztartási gépeket és eszközöket, a kávéőrlőtől a programhozható mosógépekig.

Nem meglepő az sem, hogy évszázadok óta kísérleteznek a számolást megkönnyítő eszközökkel!

- táblázatokat készítettek - hatvány, gyöktáblázatokat, szögfüggvény táblázatokat stb. - és ezek alkalmazását, mindenki elfogadja, sőt tantervekben kiemelt az alkalmazásuk!

A számológépek őse az abakusz, amelynél a pálcikák hosszával tudtak összeadni és kivonni, többszörözni, felosztani, majd újabbak jelentek meg:

- a golyós számológépek, a scsoti - sokáig elfogadott eszközök az oktatásban, kereskedelemben,
- a fogaskerekekkel működő mechanikus gépek a 17. században jelennek meg: Pascal (1641-ban) majd Leibniz (1673-ban) mutatta be számológépét.

Ezek a gépek a 19. században egyre elterjedtebbé válnak, - tömeggyártásuk 1930-as évekre alakult.

- az elektromos asztali számológépek az 1950-es években fejlődtek és már papírszalagokra is kiírnak adatokat, - üzletekben, hivatalokban terjednek el.
- az elektronikus, tranzisztorokkal működtetett számológépek az 1962-es években robbanásszerűen hódítanak!
- a zsebszámológépek pályafutása az 1970-71-es években kezdődik, - egyre tökéletesebbek, s egyre kisebb méretükkel, működési élettartamukkal, energia forrásukkal válnak népszerűbbé. Ma már fényhatására működő vagy karóra méretű számológépek is mindennapi eszközök!

Mégis, az iskolai oktatásban sokáig vitatott kérdés a zsebszámológépek alkalmazása, - féltve a tanulók számolási készségének visszafejlődését!

A mai iskolásgyermek - a jövő embere - lépten-nyomon találkozni fog számológépekkel a hivatalokban, a kereskedelemben, különböző munkahelyeken, illetve gyakran fog találkozni pontos és gyors számolást igénylő feladattal, helyzetekkel, - legyen akár háziasszony vagy bolti kiszolgáló, kisiparos vagy termelő valamilyen munkahelyen! - A tervezés területét nem is

említem, hiszen ott már a kompjuterek világa alakul!
Mindezek miatt az iskolának feladata - tudomásul venni a számológépek létét és megismertetni a tanulókat a gépek kezelésével, maximális teljesítőképességeiknek felismertetésével és a legegyszerűbb számolási eljárásokkal!
A folyamatban lévő tantervi reform dokumentumai már kiemelik: Mégis sokan aggódva szólnak vagy vitatkoznak azon, hogy a gyermekek elfelejtenek fejben vagy írásban számolni!
Válasz: Ez nem következhet be, ha a tanár megfelelően átgondolva, - éppen a számolási készség fejlesztése szolgálatában, megfelelő metodikával alkalmazza oktatásában a számológépet!

II.

Az általános iskolai tagozatos matematikai osztályokban 1981-es évtől kísérletet végeztünk a szebszámológépek alkalmazására. A legegyszerűbb számológépek is alkalmasak a négy alapművelet, a %-számítás, a hatványozás, esetleg a gyökvonás elvégzésére.
Meghatároztuk azt a tananyagot, amelynek keretében osztályonként megtervezhető a zsebszámológép megismertetése és használata. Önálló óraszámokat nem jelöltünk a zsebszámológépekkel való munkához. Az adott témák keretében került feldolgozásra az új eljárás és a gépek alkalmazása az előírt követelmények elérésére.

5. osztály

Egyszerű számológépek alkalmazása a műveletek (+; -; x; ÷; és hatványozás) elvégzésére, számítások ellenőrzésére összeadás, kivonás és osztás, konstanssal való szorzás és osztás esetén.
Számok valahányadik hatványának kiszámítása: a más számrendszerek helyiértékeinek meghatározása. (Számolás természetes számok és tizedes törtek körében.) Korrektúra hibásan beadott adatok esetén, számok pontossága - nyolcjegyű számok - számkörbővítés.

Követelmény

Tudják a számológépet kezelni, alkalmazni egyszerű műveletek és műveletsorok elvégzésére. Alkalmazzák számítások ellenőrzésére a természetes és tizedestörtek körében.

6. osztály

Számológéppel negatív szám szorzása, osztása. Egész számok. Százalékérték, százalékláb, alap kiszámítása számológéppel.
Számok reciprokértékének tizedestört alakja. Számológép pontossága kerekített értékekkel való számolás.
Képletek átrendezése - szorzatok összege esetén.

Követelmény

Tudják a számológépet alkalmazni a százalékérték, százalékláb és alap kiszámítására; negatív számok szorzása és osztása. Tudják a reciprokértéket meghatározni.

7. osztály

Hatványok hatványa számológéppel. Százalékkal növelt és csökkentett összeg kiszámítása. Összeg szorzása és osztása; különbség szorzása és osztása.
Egyéb azonosságok a számológéppel; láncműveletek, hatványozás összetett műveletekben. Konstanstárolás! Sorozatok előállítása. Számtani és mértani sorozatok összege. Reciprokképzés kétféle módszerrel! Lnko és lkkt meghatározása számológéppel.

Követelmény

Alkalmazása a számológépnek a hatványozásnál, százalékkal növelt és csökkentett összeg kiszámítására, az összeg és különbség szorzása, osztása elvégzésére, egyéb azonosságok alkalmazására.

Nagy számokkal végzett összeadás és szorzás esetén tudja leolvasni a kiírt kerekített érték nagyságrendjét.

8. osztály

Számológép alkalmazása geometriai számításokban. Azonosságoknál a gép lehetőségének ellenőrzése pl: egy szám osztása, szorzása összeggel, különbséggel.
Képlet átrendezések, konstanstárolás.

Követelmény

Tudja alkalmazni a számológépet a geometriai számításokban, az azonosságok megoldását megfelelő ellenőrzéssel alakítsa ki, pl: összeggel, különbséggel való osztás, szorzás esetén.

III.

A zsebszámológépből, ha maximálisan azt szeretnénk "kihozni", amire képes a gép, ahhoz meg kell tanulni a kezelését, az "én" gépem tulajdonságait meg kell ismerni, s aszerint kell a műveleteket, műveletsorokat elvégezni velük! Nem elegendő kézbe adni a gépet, és a billentyűket nyomkodni, - mert ezt bárki el tudja végezni meggondolással a billentyűzet jelrendszere alapján, - hanem érteni kell, ismerni kell belső rendszerét és annak megfelelően tudatosan, figyelmesen kell dolgozni a géppel!

1. Zsebszámológép használata közben előfordulhatnak személyi eredetű hibák, pl: rossz adatot billentyűztünk vagy helytelen műveleti jelet. A hibák egy részét észrevesszük, másik részét nem. A végeredmény szempontjából közömbös mit hibáztunk, - a számítás eredménye hibás lesz! Felmérésekkel ellenőrizték a billentyűk "téves" használatát, s ezek alapján megállapítottuk: 20-150 billentyűbenyomása között átlagosan egy, nem észrevett hibával dolgozhatnak az átlagos egyének! A hibák száma függ az egyéni adottságtól is, a pillanatnyi lelkiállapottól, a számológép kezelésé-

nek módjától, a gép érzékenységétől, a munkavégzés gyorsaságától stb. Nagyon fontos tehát a számítások ellenőrzése, illetve a várható értékek előrebecslése! Természetesen a tanár előzetes számítása alapján a munka ellenőrzése mindig biztosított!
A hibás adatokat korrigálhatjuk! A legegyszerűbb gépek is rendelkeznek ilyen tulajdonságokkal:

a) A [C] billentyűvel a kijelzőrendszerben látható adatok törölhetők, - a gépet új műveletre készíti elő, C = Clear szó kezdőbetűje mindent töröl!

b) A [0] -val is lehet törölni, de csak a műveletek eredményét törli, a beírt adatokat nem, - az [=] jelre az első adatot visszaadja!
Ez ellenőrzendő tulajdonsága a gépnek, mert géptípusonként változó, - és hiba forrása lehet a számolásnak!

c) A [CE] billentyű is töröl, de alkalmas egy hibás adat törlésére, azaz a műveletsor folytatható az adat javítása után, pl: a 178 + 346 összeget szeretnénk számítani, de véletlenül 356-ot ütöttünk a gépbe. A [CE] -billentyű benyomásával a hibás adat javítható! Az [ ] -jellel ellenőrizni kell az előzetesen beírt adatot, mert a gép a [CE] -billentyű benyomása után 0 -át jelez!
Gépenként változó tulajdonság az is, hogy műveleti jel beírásával vagy anélkül folytatható a művelet!
Programja: 178 [+] 356 [CE] [=] [+] 346 [=] 534
Különösen célszerűnek látszik a [CE] billentyű szerepe, ha hosszabb adatsor beírása közben hibázunk, s így nem kell az egész adatsort újra beírni egy elhibázott adat beütése miatt. Hasonlóan javítható a hibásan beírt műveleti jel is!

2. A zsebszámológépekkel való munka feltételezi a várható eredmények állandó előrebecslését és az utólagos ellenőrzést. A kísérletező tagozatos osztályok nevelői arról számoltak be, hogy a várható eredmény "becslése" ugrásszerűen fejleszti a tanulók fejszámoló képességét!
- fejlődik a számok nagyságrendjének vizsgálata, azaz érzékelése;

- fejlődik a műveleti tulajdonságoknak, műveletsoroknak, a művelet sorrendjének, sőt átrendezési technikájának és szerepüknek felismerése;
- fejlődik a műveleti azonosságok alkalmazásának, felismerésének képessége és a műveleti azonosságok átírásának képessége.

Mindezek vizsgálatára és a gondolkodásra a gép jelenléte motiválja a tanulókat! A tanár is tudatosan adhat ötleteket a konkrét feladatok kapcsán a kerekítésekre, a fejszámolás eljárására.

Maguk a tanárok említik, hogy a "becslés", "kerekítés", "fejszámolás", "azonosságok alakulása" ennyire intenzív alkalmazása kimaradt a korábbi gyakorlatukból - talán időkímélés az írásbeli számolás hosszas végzése miatt!

3. Ismerni kell a számológépek sajátos tulajdonságait, - hogy mely területeken jelentkezhetnek eltérések? Pl:

- tizedestört adatokkal másként és másként bánnak a gépek, a gép típusától függően! Vannak gépek, amelyek a végtelen tizedestörtek utolsó helyiértékén kerekítik a számokat, más gépek nem! Vannak "lebegőpontos" számológépek, amelyek mindig csak két tizedesjegyre kerekített értékkel dolgoznak! Vannak gépek, amelyek 8 helyiértéket írnak ki, de vannak tíz helyiértékűek! Vannak gépek, amelyek a 0.3333333 számnak a 0 egészét kijelzi, más gépek ez .33333333 alakban írják ki. Az előző 7 tizedesjeggyel, az utóbbi 8 tizedesjeggyel, pedig mindkettő nyolc-számjegyes gép!

- a gépek "befogadóképessége" más és más! A legáltalánosabb gépekbe beírható legnagyobb értékű szám: 99 999 999 és a legkisebb értékű szám: 0.000 0001 (1 milliomod). Ha ezekhez a számokhoz hozzáadunk vagy tizedessel megszorozzuk, akkor "túlcsordulás", illeltve "alulcsordulás" következik be.

Az "alulcsordulást" figyelmeztetés nélkül 0-val jelzi a gép. Ez általában azonosan jelenik meg különböző gépeknél!

A "felülcsordulást" a gép jelzi [vagy E jellel. (Error = hiba) és tizedespont jelentik meg az adatban. Ezzel az adattal nem lehet tovább dolgozni, mert a gép a billentyűk használatára nem reagál, pl:

98765432 $\boxed{\times}$ 1230 $\boxed{=}$ 1214.8148[

A gépek áttérnek a számok normál alakjával való kijelzésre, - egyes gépek ezt jelzik is - de helyiérték hiánya miatt csak néhány tizedesjeggyel jelölik!
Milyen valódi nagyságrendű a fenti szorzat értéke?

$1214.8148 \cdot 10^8$ 121 481 480 000, azaz

"Százhuszonegyezer-négyszáznyolcvanegy millió..."
10^8 hatvány a gép 8 helyiértékének hatványalakja.
(A tudományos célú számológépek rendelkeznek a számok normálalakjával való számolás lehetőségével! A gépen $\boxed{\text{EXP}}$ = exponens, azaz kitevőt jelölő billentyű van!)

- A legegyszerűbb gépek nem rendelkeznek a "magasabb rangú" műveletek átrendező-képességével, pl: szorzatok összegét hibásan végzi, ha a gép használója erre nincs figyelemmel! A műveletláncot át kell rendezni vagy a részeredményeket papírra lejegyezni és a gépet tudatosan kell használni! (Ezért javasoljuk, hogy bal kézzel kezeljük a gépet, mert a számítások részeredményeinek, vagy eredményeinek bejegyzését kezünkben tartott íróeszközzel azonnal jegyezni tudjuk!)
Pl: $\boxed{120 \cdot 5 + 43 \cdot 7 =}$ szorzatok összege

a) 120 $\boxed{\times}$ 5 $\boxed{+}$ 43 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{=}$ 4501 eredmény hibás, mert a 120 és 5 szorzatához adott 43-at szorozza 7-tel!

$A \cdot B + C \cdot D = (A \cdot B + C) \cdot D$

b) Előre tervezve a tanuló egyszerűsítheti a feladatot:
43 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{+}$ 600 $\boxed{=}$ **901** eredmény helyes; mert a $120 \cdot 5 = 600$ szorzatot fejben elvégezve egyszerűsítettük a feladat kiszámítását.

c) A memóriával rendelkező gépek esetén az első szorzatot az $\boxed{M^+}$ billentyűvel elhelyezzük, majd a második szorat után $\boxed{M^-}$ vagy $\boxed{\text{RM}}$ billentyűvel visszahívjuk és hozzáadjuk a kijelzőn kiírt szorzathoz.
Tekintsük most más adatokkal a feladatot:

$\boxed{12 \cdot 15{,}4 + 16 \cdot 23{,}6 =}$

12 $\boxed{\times}$ 15.4 $\boxed{=}$ $\boxed{M}$ 16 $\boxed{\times}$ 23,6 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{RM}$ $\boxed{=}$ <u>562.4</u>

d) De előfordul, hogy a memóriát már más adat tárolására igénybevettük, akkor a "képlet átrendezését" kell alkalmazni úgy, hogy az $A \cdot B + C \cdot D$ művelet aritmetikailag egyező legyen:

$\left(\frac{A \times B}{C} + D \right) \times C$ műveletsorral, azaz

A $\boxed{\times}$ B $\boxed{\div}$ C $\boxed{+}$ D $\boxed{\times}$ C $\boxed{=}$ lesz a számolás "programja".

Mostmár a legegyszerűbb géppel, memória nélkül is összegezhetők szorzatok, pl:

12 $\boxed{\times}$ 15.4 $\boxed{\div}$ 16 $\boxed{+}$ 23,6 $\boxed{\times}$ 16 $\boxed{=}$ <u>562.4</u> az eredmény megegyezik az előző módszerrel kiszámított eredménnyel!

A gépek rendelkezhetnek <u>konstanstároló-képességgel.</u> Ennek segítségével tudunk a gépekkel növekvő vagy csökkenő sorozatokat képezni! De <u>ez a tulajdonság nem egységesen jelenik meg</u> minden géptípusnál, - ezért a gép használójának kell megvizsgálni a konstanstárolóképességet!

a) Próbaként végezzük el a következő műveletet:

1/a. 13 $\boxed{+}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

8, 21, 34,...

vagy 13 $\boxed{+}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

13, 26, 39, 52,...

Ha az $\boxed{=}$ beütésére nincs változás a kijelzőregiszteren, akkor a gép nem rendelkezik a sorozatképzés ezen tulajdonságával. (Itt az első tag a konstans!)

2/a. 200 $\boxed{=}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

200, 175, 150, 125,...

Általában az egyszerű géptípusoknál nincs konstanstárolás összeadásra és kivonásra nézve. (A kivonandó a konstans!)

b) De még a <u>szorzásra és osztásra nézve</u> lehet konstanstároló képessége. A legegyszerűbb géptípusok is rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal!

1/b. 2 [x] 3 [=] [=] [=] [=]

6, 12, 24, 48...

Az elsőnek beírt tényezőt tekinti konstansnak.

2/b. 24 [ ] 2 [=] [=] [=] [=]

12, 6, 3,...

Osztásnál az osztó a konstans.

A konstanstároló képesség <u>géptípustól függ,</u> ezért ezt a kísérletet mindig végezzük el. Pl:

SHARP EL-80169S típusú gép csak a szorzásra és osztásra nézve, a FACIT-gép pedig az összeadás, szorzás, osztásra nézve rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Több géptípus mind a négy alapműveletre nézve konstanstároló.

c) Ezt a képességet alkalmazzuk hatványozásnál, pl: Mennyi 3^7 értéke?

3 [x] [=] [=] [=] [=] [=] [=] <u>2197</u>

(De összetettebb gépek [y^x] függvényértékkel számolják ki a hatványértékeket!)

A hatványazonosságok gyakorlására - hatványok szorzata, hányadosa és hatványa számításokhoz - változatos feladatok jelölhetők.

d) <u>Más jellegű konstanstároló képessége</u> is lehet a zsebszámológépeknek, pl:

1/d. <u>Azonos tagot</u> adunk különböző számokhoz, pl: 1526; 17; 3.4; és a 83-hoz szeretnénk 1985-öt hozzáadni.

Ha a gép rendelkezik ezzel a képességgel, akkor 0 [+] 1985 beírása után a kijelzőn megjelenik <u>1985.</u>

Ezután csak beírjuk az adott számokat és az [=] jelre megkapjuk 1985-

tel nagyobb értékeket!

Tehát: 0	+	1985	=	1985
	+	1526	=	3511
		17	=	2002
		3,4	=	1988.4
		83	=	2068

Hasonlóan <u>ellenőrizhető kivonásra is</u> ez a képessége a gépnek: Egy adott számból különböző értékek kivonása!

2/d. <u>A szorzó</u> konstanstárolása, - általában a legegyszerűbb gépeknek is képessége. Nagyon hasznos akkor, ha több számmal ugyanezt a szorzást kell elvégezni, pl: táblázatot kell készíteni.

Mennyi a kör kerülete 1; 1.5; 2; 2.7; 3 stb. centiméter sugár esetén?

A kör kerület képlete: $\underbrace{2 \cdot \pi}_{\text{konstans;}} \cdot \underbrace{r}_{\text{változó érték}}$

<u>A gép programja:</u>

2	x	3.14	x	1	=	6.28
				1.5	=	
				2	=	
				2.7	=	

r	1	1.5	2	2.7	3	3.6	4.7
$2r\pi$	6.28	9.42	12.56	16.986	18.84		

Hasaonlóan felbonthatók a geometriai számítások képletei konstans és változó értékekre. Ezzel a vizsgálódással tartalmilag is mélyül a felszín és térfogatszámítás, sőt az inverz feladatokra is -- felszín - vagy térfogatból adatok meghatározása -- kellő idő marad.

3/d. A számok <u>valahányad részét</u> is hasonlóan számoljuk konstanstárolással!

Mennyi az 5-öd része: 795; 15340; 202.125 számoknak?

5 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$ 1 ezzel hívjuk elő a konstanst

795 $\boxed{=}$

15 340 $\boxed{=}$

202.125 $\boxed{=}$

Más gép az első osztás után megőrzi az osztót konstansként!

Matematikai lehetetlenség jelzése is másképpen jelenik meg gépenként, pl. 0-való osztásra programozzuk a gépet!

Megjelenik az E vagy jel, de géptípustól függően egyéb jelzést is láthatunk:

- villogó 0-jel
- 0.[
- több tizedespont
- a kijelzőn csupa 0-számjegy
- vagy minden fény eltűnik.

Amíg a készüléken a hiba jelzése van, addig további műveletet végezni nem lehet. A hibajelzését csak a $\boxed{C}$ - billentyűvel szüntethetjük meg!
Még sorolhatók lennének a gépek sajátos képességei, a gépek belső tulajdonságai, - de ezeket tudatos használat közben ismerhetjük meg! A gépek kezelői utasításai nagyon szűkszavúak vagy sokszor nincsennek, nem magyar szövegűek! Így a tanulókat célszerű ezekre felkészíteni.

IV.

A zsebszámológépek alkalmazásával a matematikai ismeretek is mélyülnek! Segíti az összefüggések mélyebb megértését, pl: a törtrész - százalékérték számítás; az egész - és alap kiszámítása; az arány - százalékláb számítása között! A százalékkal növelt és csökkentett értékek meghatározása leegyszerűsödik, - a hosszas következtetési eljárást felváltja a gépre alkalmasabb számításmód!

Az arányossági feladatoknál segíti a "változás arányával való szorzás, illetve osztás" műveleti eljárás megértését! A racionális számok vizsgálatára sokféle alkalom kínálkozik! A gépek segítésével több feladat megoldása tervezhető és az egész feladat kimenetelét kell tervezni, hogy ne apró, széthulló számításokkal jussunk a megoldáshoz! Pl:
126 tanulónak táborozási költsége 56700 Ft. Utólag jelentkezett még 10 pajtás. Mennyit fizettek be a táborozásért?

a) Hagyományos számítások jelennek meg a füzetekben, széthulló műveletek!

56700 : 126 = 450 Ft/fő
630
00

450 · 136
1350
2700
<u>61200 Ft</u>

b) Az egész feladat átgondolására utaló tervezés lenne szükséges még az írásbeli számolásnál is! Egyszerűsítési lehetőséget kínál!

$$\frac{56\,700}{\underset{63}{\cancel{126}}} \cdot \overset{68}{\cancel{136}} = \frac{\overset{900}{\cancel{6300}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \cdot 68 = 68 \cdot 900 = \underline{61\,200\ (Ft)}$$

c) Géppel ellenőrizzék a számítást - legalább néhányan!

$$56700\ \boxed{\div}\ 126\ \boxed{\times}\ 136 = \underline{61\,200}\ (Ft)$$

Az írásbeli számolásnál is célszerű az egész feladat megoldási algoritmusának a megtervezése! <u>Ezt a gondolkodásmódot is a zsebszámológép jelenléte segíti!</u> Egy műveletsorral, -- esetleg memória használat megtervezésével -- célszerű a feladatot előkészíteni a géppel való kiszámításra!
Ma már az osztályok tanulóinak 80-90 %-a rendelkezik saját tulajdonú zsebszámológéppel - így jelezték a kísérletező nevelők!
Az iskolák szertárába is bekerültek már zsebszámológépek! Annál érdekesebb a feladatok megoldása, minél többféle géppel számolnak a gyerekek,

így van lehetőség a gépi tulajdonságok vizsgálatára (kerekítés, számok alakja stb.)!

V.

Matematika oktatásunk alapvető célkitűzése a tantárgy megszerettetése. Zsebszámológépekkel érdekes feladatok, játékok is végrehajthatók! Szakköri keretben, iskolán kívüli foglalkozáson bemutathatók és közösen játszhatók a zsebszámológéppel, pl:

1. Polindrom előállítása

Az olyan számok, amelyek visszafelé olvasva is ugyanazt a számok adják, pl: 121; 323, 89198 stb.

Feladat: Keressük meg az összes háromjegyű négyzetszám-polindromot! Hányat találtunk? (Ezekhez a számokhoz könnyen eljuthatunk, ha 10 és 31 közé eső egész számokat négyzetre emeljük!)

2. Szerencsés számok

Adott képzési szabállyal számsorozatot írunk fel, s ez elvezethet az 1-es számhoz. A sorozat kiinduló eleme "szerencsés szám".

a) Legyen a sorozat kezdőeleme tetszésszerinti pozitív egész szám, és minden további elemét úgy képezzük, hogy az előtte álló elem számjegyeit négyzetreemeljük és ezek összegét vesszük, pl:

7, 49, 97, 139, 10, 1

16+81= 97

Ha azt tapasztaljuk, hogy a sorozat néhány lépés után eléri az 1-et - a kezdő számot pl: a 7-est "szerencsés számnak" nevezzük.

b) Induljunk ki a 9-es számból! Az előbbi képzési móddal állítsuk elő a sorozatot!

(Megfigyelhető, hogy 8 elemű ciklus keletkezik, melynek elemei: 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16 és megismétlődően!) Így a 9-es nem szerencsés!

c) Válasszuk kiinduló elemnek a következő számokat: 6, 8, 13, 19, 21, 23, 30.
Melyek szerencsés számok? A nem szerencsés számok 8 elemű ciklusaiban szereplő elemeket hasonlítsuk össze a 9-cel kezdődött sorozat 8 elemű ciklusával! (Ugyanezek a számok, csak más és más a ciklus első eleme!)

d) Válasszuk ki az $50 < x \leqq 100$ számok közül a szerencsés számokat! (Ha pontos a sorozatképzés, 9 ilyen szám van!) További vizsgálatokat érdemes végezni a szerencsés számokról, pl: végtelen sok szerencsés szám van stb.

3. Háromjegyű számok pólusa: 495

Tetszésszerinti háromjegyű számból indulunk ki, melynek minden számjegye különböző. Legyen ez pl: 326. Ebből a legkisebb és legnagyobb háromjegyű számot állítsuk elő és számítsuk ki a különbségüket!

$632 - 236 = 396$ A kapott különbségből is képezzük a legnagyobb és
$963 - 369 = 594$ legkisebb számok különbségét és folytassuk tovább!
$954 - 459 = \boxed{495}$

A 495-ből már újabb legnagyobb és legkisebb szám különbsége nem képezhető, itt megállt a számítás!
Feladat: Több háromjegyű szám hasonló vizsgálata után indokoljuk, miért vezet el mindig a képzett legnagyobb és legkisebb számok különbsége a 495-ös számhoz - vagyis miért 495 a "pólusa" a háromjegyű számoknak?
(Figyeljük meg: az első kapott különbségben a középső szám 9-es; az első és utolsó számjegyek összege 9!)

4. 13-mal, 11-gyel és 7-tel osztható számok

Bármelyik abcabc alaku háromjegyű szám osztható 13-mal, 11-gyel és 7-tel! Miért? Írjunk a gépbe tetszőleges háromjegyű számot és ugyanazt a háromszámot írjuk mellé. Az így nyert 6-jegyű számot osszuk el egymás után 13-mal, 11-gyel és 7-tel!

pl: 422422 $\boxed{\div}$ 13 $\boxed{\div}$ 11 $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ 422

Azért mert 13 $\boxed{\times}$ 11 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{=}$ 1001

és 422 $\boxed{\times}$ 1001 $\boxed{=}$ 422422

5. Játék számokkal

a) Háromjegyű, azonos számjegyű számok négyzetét miért számíthatjuk ki az alábbi módon? (Próbáljuk ki más számokra is!)

$$777^2 = \begin{array}{r} 7 \\ 777 \\ \underline{77777} \\ 86247 \end{array} \cdot 7 = 603729$$

b) Vizsgáljuk és igazoljuk, hogy a szorzás tényezőiben és a szorzatban az 1, 2, 3..., 9 számjegyek vannak!

$1738 \cdot 4 = 6952$

$198 \cdot 27 = 5346$

$483 \cdot 12 = 5796$

Keressünk további - hasonló tulajdonságú szorzatokat.

c) Igazoljuk, hogy a $(10 \cdot a+b)(10 \cdot c+d)$ szorzatánál érvényes az alábbi egyenlőség!

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$ A tényezőkben a számjegyeket felcseréltük a szorzat mégis egyenlő!

$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$

$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$

6. Kedvenc szám

Ha valakinek van "kedvenc" számjegye, annak tömeges előállítására több módszer lehetséges, - és megkaphatja a "kedvenc" számjegyét a számológép kijelzőjének minden helyiértékén!

a) 12345679-et szorozzunk meg a kedvenc szám 9-szeresével!

12345679 [x] 5 [x] 9 [=] 55555555

kedvenc

A szorzandóból csak a 0 és 8-as hiányzik!

A szorzás sorrendje fontos!

b) 15873 [x] 7 K [=] KKKKKK

K = Kevenc szám

Állítsunk elő más módszerekkel is kedvenc számot. Indokoljuk az előállítás módját!

7. Szavak írása számológéppel

A számológép számjegyei betűket képeznek, ha gépet "fejjel lefelé" tartjuk.

1 = I	2 = Z	3 = E	4 = h	5 = S
6 = g	7 = L	8 = B	9 = b	0 = o-betűnek olvasható!

A szöveget mindig az utolsó betűvel kezdjük beírni, pl:

ZOLI ⟶ 1702 SZELI ⟶ 17325

Mi volt a világ gazdasági válságának oka?

71077345 számról leolvasható!

További játékos feladatok oldhatók meg a zsebszámológéppel (Csákány Antal: Mit tud a zsebszámológép? Műszaki Kiadó 1981)

- "Megoldatlan probléma" - egy adott szabállyal képzett sorozat valahányadik elemétől 4, 2, 1 elemek ismétlődése következik.

- "Számok generálása" véletlenszerűen számológéppel, pl: kockadobás helyettesítésére. (De akár 4-jegyű számok is generálhatók!)

- "Naptár-számítás" Adott dátum milyen napra esik pl: 1900 március 1. - 2000. február 28. között.

- Vetélkedő játékok: ügyességi játékok pl: "A zérus a cél", "Vagy-vagy" stb.

KRYSTYNA BIALEK AND ALEKSANDER GRYTCZUK

SOME REMARKS ON CERTAIN DIOPHANTINE EQUATIONS

ABSTRACT: *The paper gives results on the solutions of the equations*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=m, \quad x^p+y^p=z^2,$$

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \text{and} \quad \frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

where m,n *are integers and* p (>3) *is a prime.*

1. Introduction

In this paper we give some remarks concerning the following problemens:

1^o Let $\varphi_n(x,y)$ denotes the form of degree $n\geq 3$ and let $m\in Z$ then the equation

(1.1) $$\varphi_n(x,y)=m$$

has $N_1\leq n$ so called regular solutions in $\langle x,y\rangle \in Z^2$.

2^o If $(x,y)=1$ and $p>3$ is a prime and the equation

(1.2) $$x^p+y^p=z^2$$

has a solution in integers x,y,z then

$$p|z \quad \text{or} \quad p|\varphi(z),$$

where φ denotes the Euler function.

3^o Let

(1.3) $$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

and

(1.4) $$\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Erdös and Straus conjectured, that the equation (1.3) has a positive solution in integers x,y,z for every natural number $n\geq 2$ (see [4], Open problems, p.58 ; No 18). Similar conjecture was posed by Sierpinski (see [4], Open problems, p.58, No 19) for the equation (1.4).

We give explicit form of solutions of (1.3) for $n=4k$, $4k+2$, $4k+3$, $8k+5$; $k=1,2,\dots$ and for $n=4k$, $4k+2$, $4k+3$; $k=1,2,\dots$ of the equation (1.4).

2. Regular solutions of the equation $\varphi_n(x,y)=m$.

J.H.Evertse [2] proved that if

(2.1) $$N = \mathrm{card}\ \left\{ (x,y) \in Z^2 \ ;\ \varphi_n(x,y)=m \right\},$$

where $n\geq3$, $\varphi_n(x,1)$ is a polynomial, which has three district roots and $t=\omega(|m|)$, where $\omega(|m|)$ denotes the number of distinct prime divisors of $|m|$, then

(2.2) $$N \leq n \left(7^{15\left[\binom{n}{3}+1\right]^2} + 6\cdot7^{2\binom{n}{3}(t+1)} \right)$$

An improvement of (2.2) was given by E.Bombieri and W.M.Schmidt [1]. Let $F(x,y) \in Z[x,y]$ be an irreducible form of degree $n\geq3$ and let $N_{n,m}$ be the number of solutions of the equation

(2.3) $$\varphi_n(x,y) = m$$

in integers x,y such that $(x,y)=1$, then

(2.4) $$N_{n,m} < C_1 n^{1+t}$$

where C_1 is an absolute constant. If $n > C_2$, then

(2.5) $$N_{n,m} < 215\ n^{1+t}$$

where $(x,y)\equiv(-x,-y)$.

In this part we consider so called regular solutions of (2.3).

Let $\varphi_n(x,y) \in Z[x,y]$ and $n\geq3$, and let

(2.6) $$\varphi_n(x,y) = a_0x^n+a_1x^{n-1}y+ \dots +a_ny^n = m.$$

Let $d=\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$, $|m|>1$, $m \nmid d$ and suppose that (2.6) has at least two solutions. Let

(2.7) $$\langle x_k, y_k\rangle \in Z^2 \ , \ k=1,2,\ldots$$

denote the sequence of solutions of (2.6). The sequence (2.7) will be called regular if

(a) for every $i<k$, $\det \begin{bmatrix} x_i , & y_i \\ x_k , & y_k \end{bmatrix} \neq 0$

(b) for every $i<k$, $\left(m , \ \det \begin{bmatrix} x_i , & y_i \\ x_k , & y_k \end{bmatrix} \right) = 1$.

We prove the following theorem:

<u>THEOREM 1</u>. Let N_1 denote the number of regular solutions of (2.6) and let $|m|>1$, $m \nmid d$, where $d=\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$. Then

(2.8) $$N_1 \leq n.$$

<u>PROOF</u>. Suppose that the equation (2.6) has $N_1 > n$ regular solutions

$$\langle x_1, y_1\rangle, \ \langle x_2, y_2\rangle, \ \ldots \ , \ \langle x_{n+1}, y_{n+1}\rangle,$$

then from (2.6) we get

(2.9) $$\begin{cases} a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} y_1 + \ \ldots \qquad + a_n y_1^n = m \\ a_0 x_2^n + a_1 x_2^{n-1} y_2 + \ \ldots \qquad + a_n y_2^n = m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 x_{n+1}^n + a_1 x_{n+1}^{n-1} y_{n+1} + \ \ldots \ + a_n y_{n+1}^n = m \end{cases}$$

The fundamental determinant of the system (2.9) has the form

(2.10)
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^n, & x_1^{n-1}y_1, & \dots, & y_1^n \\ x_2^n, & x_2^{n-1}y_2, & \dots, & y_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^n, & x_{n+1}^{n-1}y_{n+1}, & \dots, & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

It is easy to see that from (2.10)

(2.11)
$$\Delta = \prod_{1 \le i < k \le n+1} \left(y_k x_i - x_k y_i \right) =$$

$$= \prod_{1 \le i < k \le n+1} \det \begin{bmatrix} x_i & , & y_i \\ x_k & , & y_k \end{bmatrix}$$

follows. Thus by (2.11) and (a) it follows that $\Delta \neq 0$, and therefore by Crammer's ruele we obtain

(2.12) $$a_0 = \frac{m \cdot \Delta_1'}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{m \cdot \Delta_2'}{\Delta}, \dots, a_n = \frac{m \cdot \Delta_{n+1}'}{\Delta}$$

Since $a_i \in Z$, from (2.12) we have

(2.13) $$\Delta \mid m \cdot \Delta_i' \quad \text{for every } i=1,2,\dots,n+1.$$

But $(m,\Delta)=1$, since from (b) $\left(m \, , \, \det \begin{bmatrix} x_i , y_i \\ x_k , y_k \end{bmatrix} \right) = 1$ and from (2.13) we get

(2.14) $$\Delta \mid \Delta_i' \quad \text{for every } i=1,2,\dots,n+1.$$

Thus by (2.14) and (2.12) it follows

$$a_0 = m \frac{\Delta_1'}{\Delta}, \quad a_1 = m \frac{\Delta_2'}{\Delta}, \quad \dots, \quad a_n = m \frac{\Delta_{n+1}'}{\Delta}$$

where

$$\frac{\Delta_i'}{\Delta} \in Z \quad \text{for every } i=1,2,\dots,n+1,$$

and therefore $m|a_j$ for $j=0,1,\dots,n$. Since $d = \left(a_0, a_1, \dots, a_n\right)$, thus $d|a_j$ and therefore $m|d$. It contradicts to our conditions $|m|>1$ and $m\nmid d$ so the proof is complete.

We remark that by similar method we can prove the well-known Lagrange's theorem concerning the number of solutions of the congruence

$$f(x)\equiv 0 \pmod p,$$

where $f \in Z[x]$ and p is a prime (comp.[3]).

3. On the equation $x^p + y^p = z^2$

In 1977 G.Terjanian [8] proved that if the equation

$$x^{2p} + y^{2p} = z^{2p} ,$$

where p is odd, has a solution in integers x,y,z, then

$$2p|x \quad \text{or} \quad 2p|y .$$

In 1981 A.Rotkiewicz [5] improved this result showing that if $x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}$ has a solution in integers x,y,z, where p is and odd prime, then $8p^3|x$ or $8p^3|y$.

In 1982 A.Rotkiewicz [6] obtained that if $(x,y)=1$ and $p>3$ is a prime and $p|z$ and $2\nmid z$ or $p\nmid z$ and $2|z$, then the equation

$$x^p + y^p = z^2 \tag{3.1}$$

has no solution in integers x,y,z.

For other results see also [7].

In this part we prove the following theorem:

<u>THEOREM 2</u>. Suppose that $(x,y)=1$ and $p>3$ is a prime. If the equation (3.1) has a solution in integers x,y,z, then

$$p|z \quad \text{or} \quad p|\varphi(z) , \tag{3.2}$$

where φ denotes the Euler function.

PROOF. First, we prove that if $(x,y)=1$, $n<m$ and

(3.3) $$x^n + y^n \mid x^m - y^m,$$

then

(3.4) $$n \mid m .$$

Since $m > n$ thus $m = nq + r$, where $0 \le r < n$. We consider two cases:

(i) q is an odd number,

(ii) q is an even number.

In the case (i), we have

(3.5) $x^m - y^m =$

$$= x^r \left(x^n+y^n\right)\left(x^{n(q-1)}-x^{n(q-2)}y+\ldots-y^{n(q-1)}\right)-y^{nq}\left(x^r+y^r\right).$$

Since $\left(x^n + y^n , y^{nq}\right) = 1$ thus from (3.3) and (3.5) we get

(3.6) $$x^n + y^n \mid x^r + y^r ,$$

which is impossible if $r>0$. Thus $r=0$ and therefore $n|m$.

In case (ii) we have $q = 2^\alpha q'$, where $(2,q')=1$, $\alpha \ge 1$ and therefore for $m = n\, 2^\alpha q' + r$, $0 \le r < n$ we get

(3.7) $$x^m-y^m=x^r\left[\left(x^{nq'}\right)^{2^\alpha}-\left(y^{nq'}\right)^{2^\alpha}\right] + \left(y^{nq'}\right)^{2^\alpha}\left(x^r-y^r\right).$$

Since

$$x^n+y^n \;\Big|\; x^r\left[\left(x^{nq'}\right)^{2^\alpha}-\left(y^{nq'}\right)^{2^\alpha}\right]$$

thus by assumption (3.3) and (3.7) we obtain

$$x^n + y^n \mid x^r - y^r ,$$

and similarly as above it is impossible if $r>0$. Thus $r=0$ and $n|m$ follows. Since $(x,y)=1$,

(3.8) $$\left(x, x^n+y^n\right)=1 \quad \text{and} \quad \left(y, x^n+y^n\right)=1$$

and therefore from Euler's theorem we have

$$x^{\varphi\left(x^n+y^n\right)} \equiv 1 \quad \left(\bmod\left(x^n+y^n\right)\right) \tag{3.9}$$

and

$$y^{\varphi\left(x^n+y^n\right)} \equiv 1 \quad \left(\bmod\left(x^n+y^n\right)\right). \tag{3.10}$$

From (3.9) and (3.10) we get

$$x^n+y^n \;\Big|\; x^{\varphi\left(x^n+y^n\right)} - y^{\varphi\left(x^n+y^n\right)}. \tag{3.11}$$

By (3.3) , (3.14) it follows that

$$n \;\Big|\; \varphi\left(x^n+y^n\right). \tag{3.12}$$

If the equation (3.1) has a solution in integers x,y,z such that $(x,y)=1$, then

$$\varphi\left(x^p+y^p\right) = \varphi\left(z^2\right). \tag{3.13}$$

From (3.13) and (3.12) we get

$$p \;\Big|\; \varphi\left(z^2\right). \tag{3.14}$$

It is easy to see that $\varphi\left(z^2\right) = z\ \varphi(z)$ for arbitrary fixed integer z, therefore we get

$$p|z \quad \text{or} \quad p|\varphi(z)$$

and the proof is finished.

4. On a conjecture of Erdös - Straus and Sierpinski.

In this part we prove two theorems.

THEOREM 3. The equation

(4.1) $$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

has a solution in positive integers x, y, z for every $n=4k$, $4k+2$, $4k+3$, $8k+5$, where $k=1,2,\ldots$

The proof follows from the following identities:

$$\frac{4}{4k} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{4}{4k+2} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$$

$$\frac{4}{4k+3} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(4k+3)}$$

$$\frac{4}{8k+5} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(8k+5)} + \frac{1}{2(k+1)(8k+5)}$$

<u>THEOREM 4</u>. The equation

(4.2) $$\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

has a solution in positive integers x, y, z for every $n=4k$, $4k+2$, $4k+3$, where $k=1,2,\ldots$

The proof follows from the following identities:

$$\frac{5}{4k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{5}{4k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$$

$$\frac{5}{4k+3} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{(k+1)(4k+3)} .$$

REFERENCES

[1] E.Bombieri and W.M.Schmidt, On Thue's equation , Invent. Math. (1987), 69-81.

[2] J.H.Evertse , Upper bounds for the numbers of solutions of diophantine equations , Math. Centre Tracts , (1983), No 168,125

[3] A.Grytczuk , Sur une methode de demonstration du theoreme de Lagrange sur des racines congruence $f(x)\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, Discuss. Math. I(1975), 15-16.

[4] W.Narkiewicz , Classical problems in Number Theory , PWN Warszawa, 1986.

[5] A.Rotkiewicz , On Fermat's equation with exponent 2p , Coll. Math. (1981), 101-102.

[6] A.Rotkiewicz , On the equation $x^p+y^p=z^2$, Bull. de l'Acad. Polon. Sci. Vol. XXX, No 5-6, (1982), 211-214.

[7] A.Rotkiewicz and A.Schinzel , On the diophantine equation $x^p+y^{2p}=z^2$, Coll. Math. (1987), 147-152.

[8] G.Terjanian , Sur l'equation $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$, C.R. Acad. Sci. Paris, 285 (1977), 973-975.

CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAI KÍSÉRLET ÖSSZEFOGLALÁSA. II. RÉSZ.

A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK. A VEKTOROK FELBONTÁSA. A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK.

ABSTRACT: (A geometric experiment made in secondary school, 2nd part. Similarity transformations. Breaking up of vectors. Trigonometrical functions) This article is the second part of a summary written on a secondary school experiment. As no summary was written on the first part it is necessary to say some words about it. We dealt with the axial reflecting and with its constituents the other congruentity transformations. Then with the help of these we examined the features of geometric formations. Finally we explained the vector as the sum total of the derivational arrows of shifting, and the possible operations as well. We examine the material of the second year in this article. We explained the central elongation, the similarity transformation as the product of multiplication of the congruentity and central elongation, and we examined the characteristic features of the formations as well. We generally examinded the circular functions by the help of the coordinates of the vectors.

We thought it was important to give the circular functions of the negative, the $\alpha \pm 180^0$, the $180^0 - \alpha$ and the $90^0 - \alpha$ angles as easily as possible by the help of the congruentity transformations.

A középiskolai geometria II. osztályos tananyagának tárgyalását a címben fel nem tüntetett Pythagoras tétellel kezdtük. Felhívtuk a figyelmet arra, hogy a tanév során a derékszögű háromszögek vizsgálata központi kérdés lesz.

A Pythagoras-tétel bizonyítását két egybevágó négyzet különböző darabolásával bizonyítottuk. A tétel megfordítását is kimondtuk, s a háromszögek egybevágóságát felhasználva bizonyítottuk is. Részben gyakorlás céljából, részben pedig, hogy ne kelljen örökké táblázat után nyúlni a négyzet oldala és átlója, valamint a szabályos háromszög oldala és magassága közötti kapcsolatot rögzítettük. Később ez igen sok haszonnal járt. Nem kötelező tananyagként, inkább csak gyakorlásként meghatároztuk a háromszög oldalaiból a háromszög magasságait és a terüaületét is.

A hasonlósági transzformációk

A sík önmagára történő újabb leképezésének előkészítése céljából az alábbi tételeket igazoltuk:

1. Egy szög szárai t metsző g_1 és g_2 párhuzamos egyenesek és azok eltolással nyertgt g'_1 és g'_2 képei a szög ugyanazon száraiból egyenlő szakaszokat metszenek ki. Az állítás igazolása az eltolás tulajdonságainak felhasználásával történt. Ha pl: a g_1-et a szög csúcsára illesztettük és olyan eltolást alkalmaztunk, amely g_1-et g_2-be vitte -- s ezt véges sokszor alkalmaztuk -- akkor szakasz egyenlő és arányos részekre történő osztására nyertünk eljárást.

2. Ha egy szög szárait párhuzamos egyenespárokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával. (Párhuzams szelők tétele).
   A bizonyításnál leszögeztük, hogy elegendő az állítást két párhuzamos egyenespárra elvégezni. A bizonyítást egyébként a minden szakember által jól ismert módon végeztük. Csak a bizonyítás utolsó gondolatánál kellett elfogadható indoklást találni. Természetesen néhány lépés után elkészítettük két-két szakasz aránya különbségének abszolutértékét, amiről kiderült, hogy $\frac{1}{n}$-nél kisebb. Itt azt mondtuk, hogy n minden határon túl való növelésével akármilyen kicsiny $\frac{1}{n}$ számok jönnek létre, amelyeknél kisebb nem negatív szám csak a nulla lehet.

így adódott a két-két megfelelő szakasz arányának egyenlősége, illetve a tételben kimondott állítás.

A tétel egyszerűbb alakban történő kimondását segítette az, hogy rájöttünk, ha az egyik egyenest a szög csúcsára illesztjük és a két párból egyet-egyet egybeesőnek választunk, akkor a bizonyításban szereplő két párhuzamos egyenespár helyett két párhuzamos egyenest is mondhatunk. Vagyis, ha egy szög szárait két párhuzamos egyenessel metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok aránya a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok arányával egyenlő. Ekkor az így kimondott tétel megfordítását könnyű volt megfogalmazni (3. tétel). A bizonyítást indirekt módszerrel a legegyszerűbb esetben el is végeztük, a többi esetet szorgalmi feladatnak megjelölve beszéltük meg az érdeklődőkkel órán kívül.

A témakör 4. állítása a következő volt. Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a párhuzamosokból a szárak közé eső szakaszok aránya egyenlő a párhuzamos egyeneseknek a szög száraiból kimetszett megfelelő szakaszainak arányával.

Gyakorlásul és összefoglalásul egy szög szárait két párhuzamos egyenessel metszettünk és tanulmányoztuk a felírható arányokat. Itt foglalkoztunk azzal a tétellel, hogy a háromszög belső szögfelelője a szemközti oldalt a szöget bezáró két oldalának arányában osztja ketté.

Az itt felvázolt anyag után értelmeztük a centrális nyújtást, mint a síknak azt az önmagára történő leképezését, amelynél egy O pont fixpont, és a sík tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontját rendeli az OP félegyenesen, amelyre $OP' = m \cdot OP$, ahol $m > 0$ valós szám. Szóltunk itt a kicsinyítésről, a nagyításról, és alkalom nyílt a transzformáció, az azonos leképezés, valamint az invariáns egyenes fogalmának mélyítésére. Beláttuk, hogy egyenestartó és hogy ha egy egyenes nem illeszkedik az O pontra, akkor a képével párhuzamos az egyenes.

Megmutattuk, hogy a centrális nyújtást a centruma és egy megfelelő pontjára egyértelműen meghatározta. (Abban az esetben is, amelyben a tetszőleges pont illeszkedik a centrum és a megfelelő pontpár egyenesére.) Kimutattuk a centrális nyújtás szögtartó és aránytartó tulajdonságát s megmutattuk azt is, hogy ha az AB szakasz párhuzamos és egyirányú az A'B' szakasszal, akkor létezik olyan centrális nyújtás, amely egyik szakaszt a másikba viszi, továbbá ha AB = A'B' is fennáll, akkor eltolás viszi át egyik szakaszt a másikba.

Foglalkoztunk kör centrális nyújtással nyert képével (kör), s centrális nyújtások szorzatával is (centrális nyújtás vagy eltolás).

Az elmondott állításokat a centrális nyújtást megelőző tételek segítségével mind bizonyítottuk.

A következő fejezetben értelmeztük a hasonlósági transzformációt. A sík minden olyan önmagára történő leképezését, amely egybevágóságuk és centrális nyújtások összetételéből áll hasonlósági leképezésnek vagy hasonlóságnak neveztük.

Ez az értelmezés azért is bizonyult szerencsésnek, mert a tanulók az egybevágóság és a centrális nyújtás közös tulajdonságait felidézték és előálltak a hasonlóság tulajdonságai.

Ezek: 1. A hasonlóság transzformáció, van inverze és az is hasonlóság.
2. Egyenes képe egyenes, félegyenes képe félegyenes, szakasz képe szakasz.
3. Aránytartó.
4. Szögtartó.
5. Párhuzamos egyenesek képei párhuzamosak.
6. Hasonlóságok összetétele is hasonlóság.

Nem volt nehéz belátni, hogy az egybevágóságok, a centrális nyújtások mind hasonlóságok, s a hasonlóságok halmaza tartalmazza az azonos leképezést (ha az egybevágóság és a centrális nyújtás is azonosság). Ha az egybevágóság centrális tükrözés, s a centrális nyújtás szorzatát negatív tényezőjű fixponttal rendelkező (fixpont a centrum) hasonlósági leképezésnek nevezzük.

Gondot fordítottunk a hasonlóság és az alakzatok hasonlósága (reláció) feltünő megkülönböztetésére. Két geometriai alakzatot akkor neveztünk hasonlónak, ha létezik olyan hasonlósági leképezés, amely egyiket a másikba viszi.

Ezek után hasonló alakzatok tulajdonságaival foglalkoztunk, majd körök, négyzetek, téglalapok, háromszögek hasonlóságát vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy az adott feltételek mellett létezik olyan hasonlósági leképezés, amely egyik alakzatot a másikba átviszi. A háromszögek esetét különös gonddal kezeltük, akár az egybevágóságnál. Úgy érzékeltük, hogy a háromszögek egybevágósága, illetve hasonlósága konkrét tartalmat nyert minden korábbi tárgyalásmóddal szemben. Csak példaként mutatunk be egy bizonyítást a háromszögek hasonlóságának négy alapesetéből egyet.

Tétel: Két háromszög hasonló, ha két-két oldaluk aránya és az ezek által bezárt egy-egy szögük egyenlő.

Bizonyítás: Legyen $c_2:c_1 = b_2:b_1$ és $\alpha_1 = \alpha_2$. Az A_1 centrumú $m = c_2:c_1$ ($= b_2:b_1$) tényezőjű centrális nyújtás az $A_1B_1C_1$ háromszöget olyan $A_3B_3C_3$ háromszögekre viszi, amelynek oldalai

$$c_3=(c_2:c_1)\cdot c_1=c_2; \qquad b_3=(b_2:b_1)\cdot b_1=b_2; \qquad \alpha_3 = \alpha_1.$$

Az $A_3B_3C_3$ háromszög egybevágó az $A_2B_2C_2$ háromszöggel, tehát van olyan egybevágóság, amely az $A_3B_3C_3$ háromszöget az $A_2B_2C_2$ háromszögbe viszi. A centrális nyújtás és egybevágóság összetételéből álló hasonlósági leképezés az $A_1B_1C_1$ háromszöget az $A_2B_2C_2$ háromszögbe viszi, tehát hasonlók.

Minden további esetben megalkottuk a hasonlósági leképezéseket, amelyeket a tanulók különösebb probléma nélkül magukévá tették.

A transzformációs szemlélet előnye itt is fényesen megmutatkozott. A háromszögek hasonlóságának felhasználásával bizonyítottuk a derékszögű háromszögekre a magasság-; és befogótételt és Pythagoras tételét, majd összehasonlítottuk a számtani és mértani közepet, a magasság-; és befogótétel lehetőséget adott irracionális szám hosszúságú szakasz szerkesztésére.

A hasonlóságot felhasználtuk a háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel bizonyítására, majd hasonló sokszögek kerületének és területének arányát is megvizsgáltuk.

A térszemlélet fejlesztése érdekében a térbeli egybevágósági transzformációk sorát bővítettük a térbeli forgással és pontra vonatkozó tükrözéssel, majd értelmeztük a térbeli centrális nyújtást. A tér minden olyan önmagára történő leképezését, amely térbeli egybevágóságok és térbeli centrális nyújtások összetételéből áll elő, térbeli hasonlósági leképezésnek neveztük.

Értelmeztük a térbeli alakzatok hasonlóságát is (hasonlóan a síkbelihez) és vizsgáltuk a testek felszínének, térfogatának arányát, végül bebizonyítottuk, hogy a gúla alaplapjával párhuzamos síkmetszeteinek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint csúcstól mért távolságaik négyzetei.

Bizonyítottuk, hogy minden kocka, minden gömb hasonló és minden olyan téglatest hasonló, amelyek megfelelő élpárjainak aránya egyenlő.

Vektorok felbontása

A továbbiakban is arra törekedtünk, hogy az új ismeretek közlését tételek formájában végezzük el és lehetőleg bizonyítsunk. Ekkor már jelentkezett is a bizonyítási igény, igaz inkább a jobb tanulók esetében. Ez azonban a továbbtanulni szándékozók szempontjából óriási pozitívum.

Bebizonyítottuk, hogy ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok nem kollineárisak, akkor bármely az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal nem komplanáris $\underline{v}$ vektor egyértelműen állítható elő az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor segítségével $\underline{v} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ alakban, ahol α és β valós számok. Ezt úgy is kifejeztük, hogy $\underline{v}$ előállítható az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjaként. Beláttuk azt is, hogy ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokra az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = 0$ áll fenn, ahol α, β és γ nem mind nullák, akkor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok komplanárisak.

Igazoltuk még, hogy a tér bármely vektora egyértelműen állítható elő a nem komplanáris $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kominációjaként. Beszéltünk az egymástól lineárisan függő és független vektorokról. A tér két $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorát <u>lineárisan függőnek</u> nevezzük, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$, <u>lineárisan független,</u> ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$. Persze ebből az is következik, hogy a tér bármely két kollineáris vektora egymástól lineárisan függő, s két nem kollineáris vektora egymástól lineárisan független.

A tér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorhármasát lineárisan függőnek nevezzük, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$, lineárisan függetlennek, ha $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$. Ebből következik, hogy a tér bármely komplanáris vektorhármasa egymástól lineárisan függő, nem komplanáris vektorhármasa lineárisan független, s bármely vektornégyese egymástól lineárisan függő.

A vektorok koordinátái

Mivel a komplanáris vektorok egy síkbeli reprezentánsaikkal megadhatók, síkbeli vektoroknak neveztük azokat.

A továbbiakban tekintettük a sík két nem kollineáris e_1 és e_2, a tér három nem komplanáris $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ és $\underline{e}_3$ vektorát. ezeket alapvektoroknak (bázisvektoroknak) neveztük.

Ekkor a sík $\underline{a}$, illetve a tér $\underline{b}$ vektora egyértelműen állítható elő $\underline{a} = x.\underline{e}_1 + y.\underline{e}_2$, illetve $\underline{b} = x.\underline{e}_1 + y.\underline{e}_2 + z.\underline{e}_3$ alakban, ahol x, y, z valós számok.

Az előállításban szereplő x, y, z számokat a vektor koordinátáinak neveztük az alapvektorokra nézve.

A vektor végtelen sok elemű halmaz, tetszőleges pontból induló representánsával megadható.

Ha a koordinátarendszer origóját választjuk a vektorok kezdőpontjának, helyvektorokról beszélünk. Megalkottuk a Descartes-féle koordinátarendszer fogalmát, és felvettünk alapvektoroknak a tengelyek egységpontjaiba mutató helyvektorokat. Ezek után bármely pontba mutató helyvektor előállítható a három alapvektor (síkban két alapvektor) lineáris kombinációjaként, s megállapítottuk, vektor koordinátái a helyvektor végpontjának koordinátáival egyenlők.

Ezek alapján a vektor hossza mint egy téglatest (téglalap) átlójának hosszaként adódott. Ezek után a koordinátákkal adott vektorokkal végzett műveletekre megfogalmazott tételek bizonyítása szinte önálló munkával történt. A bizonyítási igény a tanulók zöménél ekkor már feltámadt.

A két pont távolságára vonatkozó összefüggés, a szakasz adott arányban történő felosztása valamint két vektor egyállásúsága szükséges és elégséges feltételének megfogalmazása és bizonyítása semmilyen nehézséget nem jelentett.

A trigonometriából a szögfüggvények értelmezését végeztük el. Az irányszögű egységhelyvektor koordinátáit, illetve azok megfelelő hányadosait neveztük az φ szög cosinusának, sinusának, tangensének, illetve cotangensének.

Mivel a helyvektor koordinátái a végpont koordinátával egyenlők, először az előjelek meghatározását végeztük el, majd mivel a vektor felbontása egyértelmű, értelmeztük a négy szögfüggvényt, ügyelve arra, hogy pontosan adjuk meg azok értelmezési tartományát. Miután felismerték a tanulók a periodicitást, meghatároztuk a 30^0, 45^0, 60^0-os szögek szögfüggvényértékeit, egy közelítő grafikont készítettünk mind a négy függvényhez.

Azonos léptékeket használunk a négy függvény grafikonjának készítésére, együttes szemlélése segített az alapvető összefüggések rögzítésében.

A negatív szögek, az $\alpha + 180^0$-nek, a $180^0 - \alpha$, illetve a $90^0 - \alpha$ szögek szögfüggvényeinek meghatározásakor a pontok koordinátáinak változását vizsgáltuk a tengelyekre, az origóra, illetve az y = x egyenesre vonatkozó tükrözések esetén.

Nagyon szemléletesen lehetett így megadni a függvények paritásának fogalmát is. A szögfüggvények egyéb tulajdonságainak vizsgálata természetesen időben megtárgyalásra került, itt inkább azt emeltük ki, hogyan lehetett a transzformációkat, illetve a vektorokat a szögfüggvények fogalmának kialakításánál felhasználni.

Ezen tananyag tárgyalása megmutatta, hogy a transzformációs szemléletű geometria, a fogalmak definiálása, az állítások tételszerű kimondása, azok bizonyításának igénye -- legalábbis az igény felkeltése -- kevesebb energiát használt el tanulótól, tanártól egyaránt ahhoz, hogy jó színvonalon sajátítsák el a tanulók a tananyagot.

Irodalom

1. Az érvényben lévő általános iskolai tanterv.
2. Az érvényben lévő középiskolai tanterv.
3. A forgalomban lévő általános iskolai tankönyvek.
4. A forgalomban lévő középiskolai tankönyvek.
5. Dr. Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó 1960.
6. Dr. Pelle Béla: Geometria. Tankönyvkiadó 1974.
7. Dr. Cservenyák János: A geometria középiskolai szintű feldolgozása transzformációkkal és vektorokkal. Egyetemi doktori disszertáció. 1977.

CSÓKE LAJOS

STURM TÉTELÉNEK GYAKORLATI ALKALMAZÁSÁRÓL

ABSTRACT: *(Praktical aplication of Sturm's theory)*
In the numerical methods of Mathematics there are a lot of procedure on approximatly calculation of the real roots of a polynomial with real coeffitients.
All the systems need an interval, which contents a root of the polynomial.
The application of Sturm's theory gives a method for calculation of the number and sign of the real roots.
In this paper we show a computer program which, applicates Sturm's theory completing with the system of binary researching, for finding useable intervals. (Their lenghts are not greater then 5 units).

A klasszikus matematika jónéhány numerikus eljárást ismer a függvények zérushelyének közelitő meghatározására. Ezek gyakorlati alkalmazása a számitástechnika elterjedésével egyre nagyobb teret kapott. Különös jelentőségü a valós együtthatós polinomok zérushelyének meghatározása. Egy-egy gyök tetszőleges pontossággal kiszámitható, és még harmad-negyedfok esetén is megkiméli a felhasználót a fárasztó számolási munkától. A különböző eljárások közös vonása, hogy feltételezik egy zárt intervallum ismeretét, ahol a polinomnak van (lehetőleg egy) zérushelye. Igy ezek sikeres alkalmazásánál szükségünk van ilyen intervallumok meghatározására. Sturm tételének ([1] 259.old.) alkalmazása lehetőséget ad a polinom valós gyökei számának és előjelének meghatározására. Sturm tételének alkalmazását hátráltatta, annak számolásigényessége, igy a gyökök számának meghatározásához szivesebben alkalmaznak becslési módszereket. A mellékelt számitógépes program bináris keresés módszerének felhasználásával a (-10000; +10000) intervallumba eső gyököket lokalizálja ugy, hogy megad egy legfeljebb 5 egység hosszu intervallumot, melyben a polinomnak pontosan egy zérushelye van. Ha a behatárolt intervallumban a zérushelyek különbségének abszolut értéke kisebb mint egy, ugy kiválaszt egy olyan egységnyi hosszu intervallumot, melyben található legalább egy gyök.

A program müködéséhez kapcsolódó fontosabb megjegyzések:
A polinom fokszámának és együtthatóinak beolvasása után a program generálja a polinom Sturm-féle rendszerét és a rendszer polinomjainak együtthatóit a H(I,K) kétdimenziós tömbben helyezi el. Az első index a rendszerhez tartozó polinom sorszámát, a második a polinom megfelelő fokszámu tagjához tartozó együttható sorszámát regisztrálja.
A rendszer tagjai:

$$h_0(x)=p(x),\ h_1(x)=p'(x),\ldots,\ h_k(x) = h_{k+1}(x)\cdot q_{n+1}(x)-h_{k+2}(x)$$
$$(K=0,1,\ldots,n)$$

A rendszer meghatározásakor kijelzi, ha a polinomnak többszörös gyöke van.
A következő fázisban megállapitja a negativ illetve a nem negativ gyökök számát.
A $-\infty$-ben vett előjelváltozások számát G(1), a 0-nál G(3), $+\infty$-ben G(2) gyüjti. A Sturm-féle rendszer valamennyi polinomjának előjele megegyezik főegyütthatójának előjelével

+ ∞ -ben, illetve - ∞ -ben a főegyüttható előjelével, ha annak fokszáma páros, és főegyüttható -1 szeresének előjelével, ha annak fokszáma páratlan. Egy tetszőleges c helyen a rendszer bármely tagjának előjelét a $h_k(c)$ előjele adja meg. Miután a rendszer tagjaihoz tartozó előjelek sorozatában az előjel változások száma pontosan eggyel csökken, ha a növekvő helyettesitési értékek sorozata a polinom egy gyökén halad át, igy G(1) - G(3) a negativ, G(3) - G(2) a nem negativ gyökök számát adja.

Amennyiben a polinomnak van valós gyöke, akkor a program megvizsgálja, hogy azok mindegyikére teljesül-e hogy abszolut értékük nagyobb mint 10000. (Ez az érték változtatható). Ha van -10000 és +10000 közé eső gyök, akkor bináris kereséssel szükiti a gyök elhelyezkedését megadó intervallumot. Ha egy pozitiv és egy negativ előjelü gyököt lokalizált, az eljárást akkor fejezi be, ha a végpontok különbségének abszolut értéke nem nagyobb mint 5. Ha a lokalizált intervallumban több gyök található, akkor az intervallumot 1 hosszuságura szükiti.

Gyakorlatilag az eljárás alkalmazható egy gyök adott pontosságu meghatározására is, de erre a célra hatékonyabb eljárások is ismeretesek.

```
1 REM *GYOKKERESES STURM MODSZEREVEL*
2 PRINT " *GYOKKERESES STURM MODSZEREVEL* "
5 B$=" INTERVALLUMBAN PONTOSAN EGY GYOK VAN!"
10 INPUT"A POLINOM FOKSZAMA:";N
15 PRINT"AZ EGYUTTHATOK/A(N)-A(0)/:"
17 REM *AZ EGY.HATOK BEOLV+A MARADEKRENDSZER GENERALASA*
20 DIM H(N,N),A(N),B(N-1)
30 FOR I=0 TO N: INPUT H(0,N-I):NEXT
35 FOR I=0 TO N-1: H(1,N-1-I)=H(0,N-I)*(N-I):NEXT
```

```
40 FOR J=2 TO N
50 FOR K=0 TO N+2-J: A(K)=H(J-2,K): NEXT
60 FOR K=0 TO N+1-J: B(K)=H(J-1,K): NEXT
70 T=K-1: K=T
72 FOR I=0 TO N+2-J
75 W=N+2-J-I
80 IF K>W THEN 110
85 IF B(T)=0 THEN PRINT"TOBBSZOROS GYOK!":GOSUB 800: STOP
90 C=A(N+2-J-I)/B(T)
100 FOR L=0 TO K: A=N-I+2-J-L: A(A)=A(A)-C*B(K-L): NEXT L:
    NEXT I
110 FOR L=0 TO K-1: H(J,L)=-A(L): NEXT L: NEXT J
120 FOR I=0 TO N
130 S=-1: IF N-I=INT((N-I)/2)*2 THEN S=1
140 A(N-I)=-1: IF S*H(I,N-I)>=0 THEN A(N-I)=1
145 NEXT: P=1: GOSUB 500
150 FOR I=0 TO N
160 A(N-I)=-1: IF H(I,N-I)>=0 THEN A(N-I)=1
165 NEXT: P=2: GOSUB 500
170 FOR I=0 TO N
180 A(N-I)=-1: IF H(I,0)>=0 THEN A(N-I)=1
190 NEXT: P=3: GOSUB 500
200 PRINT"A NEGATIV VALOS GYOKOK SZAMA=";G(1)-G(3)
210 PRINT"A POZITIV VALOS GYOKOK SZAMA=";G(3)-G(2)
215 IF G(3)-G(2)>0 THEN C=10000: GOSUB 900: REM *POZITIV GYOK
    BEHATAROLAS*
216 IF G(1)-G(3)>0 THEN C=-10000: GOSUB 1020: REM *NEGATIV
    GYOK BEHATAROLAS*
217 STOP
500 REM *AZ ELOJELVALTASOK SZAMANAK M.H.*
501 G(P)=0: X=A(N): FOR I=0 TO N-1
```

```
510 IF X<>A(N-1-I) AND A(N-1-I)<>0 THEN G(P)=G(P)+1:
    X=A(N-1-I)
520 NEXT I: RETURN
600 REM *A HELY.ERTEKEK ELOJELENEK M.H.*
601 FOR V=0 TO N: Z=V: S=H(V,N-Z)
602 IF V=N THEN 610
605 FOR I=Z+1 TO N: S=S*C+H(V,N-I): NEXT
610 Y=-1: IF S>0 THEN Y=1
615 IF S=0 THEN Y=0
620 A(N-V)=Y: NEXT: RETURN
800 FOR V=0 TO N: FOR Z=V TO N
810 PRINT H(V,N-Z);"  ";:NEXT: PRINT: NEXT
900 REM *+GYOK*:GOSUB 600: P=4:GOSUB 500
905 IF G(3)-G(4)=0 THEN PRINT "A POZITIV GYOKOK NAGYOBBAK
    MINT 10000":RETURN
907 G(3)=G(4)
910 L=C:FOR J=1 TO 2 STEP 0: C=INT(5*(U+L))/10: GOSUB 600:
    GOSUB 500
920 IF G(3)-G(4)=1 THEN A=G(4): GOSUB 1000: IF WE=1 THEN
    WE=0: RETURN
925 IF G(3)-G(4)>1 THEN U=C: A=G(4)
930 IF G(3)-G(4)=0 THEN L=C
950 IF L-U<5 THEN PRINT "A(Z)"; U; "-"; L;"  INTERVALLUMBAN";
    G(3)-A;" GYOK VAN!":RETURN
970 NEXT
1000 IF ABS(C-U)<5 THEN PRINT"A(Z) ";U;"-";C;B$:WE=1:RETURN
1010 L=C: RETURN
1015 PRINT U,C,L: PRINT G(3),G(4)
1020 REM* - GYOK *: GOSUB 600: P=4: GOSUB 500
1025 IF G(3)-G(4)=0 THEN PRINT"A NEGATIV GYOKOK KISEBBEK MINT
     - 10000": RETURN
```

```
1026 G(1)=G(4)
1030 U=0: L=C: FOR J=1 TO 2  STEP  0:  C=INT(5*(U+L))/10:  IF
     WA=0 THEN GOSUB 1150
1035 GOSUB 600: GOSUB 500
1040 IF G(1)-G(4)=1 THEN U=C: A=G(4):  GOSUB  1110:  IF  WE=1
     THEN WE=0: RETURN
1050 IF G(1)-G(4)=>1 THEN U=C: A=G(4)
1060 IF G(1)-G(4)=0 THEN L=C: FI=0
1065 E=ABS(L-U)
1070 IF E<2 THEN GOSUB 1130: RETURN
1080 NEXT
1090 IF U-L<5 THEN PRINT" A(Z) ";U;"-";L;B$:WE=1: RETURN
1100 L=C: RETURN
1110 IF ABS(L-U)<5 THEN PRINT" A(Z) ";L;"-";U;B$:WE=1:RETURN
1120 RETURN
1130 PRINT"A(Z)";L;"-  ";U;"  INTERVALLUMBAN";G(1)-A;"  GYOK
     VAN!": RETURN
1150 S=H(0,N)
1155 FOR I=1 TO N: S=S*C+H(0,N-I): NEXT
1160 IF S=0 THEN PRINT C;"ZERUSHELYE A POLINOMNAK":STOP
1170 RETURN
```

GYOKKERESES STURM MODSZEREVEL

```
   A POLINOM FOKSZAMA:? 4
AZ EGYUTTHATOK/A(N)-A(0)/:
? 1
? -62
? 1104
? -4258
? -5425
```

A NEGATIV VALOS GYOKOK SZAMA= 1

A POZITIV VALOS GYOKOK SZAMA= 3

A(Z) 24.3 - 31.2 INTERVALLUMBAN 2 GYOK VAN!

A(Z)-1.3 - 0 INTERVALLUMBAN 1 GYOK VAN!

IRODALOM

[1] A.G. Kuros: Felsőbb algebra. Tankönyvkiadó, Budapest 1967.

[2] Obádovics J. Gyula: Gyakorlati számitási eljárások, Gondolat Kiadó, 1972.

[3] Ury László: Commodore 64 BASIC felhasználási kézikönyv, LSI Alkalmazástechnikai Tanácsadó Szolgálat, Budapest, 1985.

PÉTER KISS* AND BUI MINH PHONG**

RECIPROCAL SUM OF PRIME DIVISORS OF LUCAS NUMBERS

ABSTARCT: *In this paper, among others, we show that for any non-degenerate Lucas sequence the reciprocal sum of the prime divisors of the n^{th} term is less than $\log\log\log n + c$ for any $n>n_0$. The constant c is an absolute one, only n_0 depends on the parameters of the sequence. It is an extension of a result of P. Erdős who proved it for Mersenne numbers.*

Let $R = \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a Lucas sequence of integers defined by

$$R_n = A\,R_{n-1} + B\,R_{n-2} \quad (n>1),$$

where A,B are fixed non-zero integers and the initial terms are $R_0=0$, $R_1=1$. Throughout the paper we assume that $(A,B)=1$ and the sequence is non-degenerate, that is if α and β denote the roots of the characteristic polynomial x^2-Ax-B, then α/β is not a root of unity. It is known that in this case

$$R_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{1}$$

for any $n\geq 0$. Furthermore if p is a prime and $p\nmid B$, then there are terms in R such that $p|R_n$. We shall denote the

---

Research partially supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research grant No. 273 and 907** respectively.*

least index with such property by $r(p)$, i.e. $r(p)=n$ if $p|R_n$ but $p\nmid R_m$ for $0<m<n$. In this case we say p is a primitive prime divisor of R_n. For primes p with $p|B$ there is no term $R_n (n\geq 1)$ divisible by p if $(A,B)=1$; in this case we assume $r(p)=\infty$. If p is a prime, $p\nmid B$, $D=A^2+4B$ and (D/p) denotes the Legendre's symbol with $(D/p)=0$ if $p|D$ then, as it is well known,

(2) $$r(p) \mid (p-(D/p))$$

and

(3) $$p \mid R_n \quad \text{if and only if} \quad r(p)|n$$

(see e.g. [2]).

In the special case $(A;B)=(3;-2)$ the terms of the sequence R are $R_n=2^n-1$. For this sequence P. Erdős [1] proved that there are positive constants c' and c'' such that

$$\sum_{p|(2^n-1)} \frac{1}{p} < \log\log\log n + c'$$

for the distinct prime divisors and

$$\sum_{d|(2^n-1)} \frac{1}{d} < c''.\log\log n$$

for the distinct positive divisors of the terms. Erdős noted that similar results hold for the divisors of the numbers a^n-1 ($a>1$ is an integer) but he asked wether the constants c' and c'' in this case depend on a or not.

In this paper, using a little modification of Erdős' argument, we extend these results for Lucas numbers furthermore we give their improvements by showing that the constants in the inequalities do not depend on the sequence.

We note that $R_n\neq 0$ if $n\neq 0$ (since α/β is not a root of unity) and we shall write 1 for the reciprocal sum of the divisors of R_n if $R_n=1$.

<u>THEOREM</u>. There are positive absolute constants c and c_0, which do not depend on the sequence R, such that

(4) $$\sum_{p|R_n} \frac{1}{p} < \log\log\log n + c$$

and

(5) $$\sum_{d|R_n} \frac{1}{d} < c_0 \log\log n$$

for any $n>n_0$, where n_0 depends only on the sequence R.

We note that similar results can be obtained if $(A,B)>1$ but in this case the constants c and c_0 are not absolute ones, they depend on A and B

We also note that in the case $R_n=2^n-1$ C. Pomerance [3] obtained results for special divisors. Let $E(n) = \sum 1/d$, where the summation is extended for positive integers d for which $d|(2^n-1)$ and $d\nmid(2^m-1)$ if $0<m<n$, further let $F(n)=\sum 1/d$, where d runs over the integers for which $d|(2^n-1)$ and $d>n$. Among others Pomerance proved that

$$E(n) \geq \frac{1}{n} \exp\left\{(1+o(1))\sqrt{\log\log n}\right\}$$

for infinitely many n and the set of n with

$$E(n) < \frac{1}{n}(\log n)^{-f(n)}$$

has logarithmic density 1 for any function f for which $f(n) \to 0$ as $n \to \infty$, furthermore.

$$F(n) < \exp\left\{-\log n \log\log\log n / 2 \log\log n\right\}$$

for all large n.

<u>PROOF OF THE THEOREM</u>. In the proof we shall use positive real numbers $c_1, c_2, \ldots$, wich are absolute constants, and

$k_1, k_2, \ldots,$ which depend on the sequence R.

First we consider inequality (4). Let

$$A(n) = \sum_{p \mid R_n} \frac{1}{p}.$$

By (3) we can write

$$A(n) = \sum_{d \mid n} \sum_{r(p)=d} \frac{1}{p}.$$

and A(n) can be divided into three parts:

$$A_1(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \le \log n}} \sum_{r(p)=d} \frac{1}{p},$$

$$A_2(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d > \log n}} \sum_{\substack{r(p)=d \\ p \le n}} \frac{1}{p}$$

and

$$A_3(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d > \log n}} \sum_{\substack{r(p)=d \\ p > n}} \frac{1}{p}$$

such that

(6) $$A(n) = A_1(n) + A_2(n) + A_3(n).$$

By (1) and (2) it is easy to see that there are at most $k_1 d/\log d$ primes such that $r(p)=d$, so the number of primes in sum $A_1(n)$ is at most

$$(\log n)\cdot k_1 \cdot \frac{\log n}{\log\log n} = k_1 \cdot \frac{\log^2 n}{\log\log n}.$$

It implies, using the estimation $p_i < c_1 i \cdot \log i$ for the i^{th} prime, that

$$A_1(n) < \sum_{p \le y} \frac{1}{p} ,$$

where

(7) $$y = k_1 c_1 \frac{\log^2 n}{\log \log n} \cdot \log \frac{k_1 \cdot \log^2 n}{\log \log n} < \log^3 n$$

for any sufficiently large n. We know that

(8) $$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} < \log \log x + c_2$$

thus by (7) and (8)

(9) $$A_1(n) < \log \log \log n + c_3$$

follows.

Now we give an estimation for $A_2(n)$ supposing that n is sufficiently large. It is enough to deal with the sum

(10) $$A_2'(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d > \log n}} \sum_{\substack{r(p)=d \\ p \le n \\ p < d^3}} \frac{1}{p}$$

since

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d > \log n}} \sum_{\substack{r(p)=d \\ p \ge d^3}} \frac{1}{p} \le \sum_{d > \log n} \frac{1}{d^3} \cdot \frac{k_1 d}{\log d} < c_4$$

and so

(11) $$A_2(n) < A_2'(n) + c_4 .$$

We can write $A_2'(n)$ in the form

(12) $$A_2'(n) = \sum_{i=0}^{N} \sum_i \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) ,$$

where N is an integer defined by

$$(\log n)^{2^N} < n \le (\log n)^{2^{N+1}}$$

and the summation in $\sum_i$ is extended for primes p for which

$$(\log n)^{2^i} < p \le (\log n)^{2^{i+1}}$$

and for which the conditons in (10) are satisfied. We note that $O(1/\log n)$ in (12) can be different from zero only if there is a prime p such that $\log n - 1 < p \le \log n$, $r(p)=p+1$ and $(p+1)|n$. Since $r(p)=d$, $d|n$ and $p<d^3$ for the primes in $\sum_i$, by (2),

$$(p-(D/p),n) \ge d > \sqrt[3]{p} > \left[\log n\right]^{2^i/3}$$

follows and $(D/p)\ne 0$ if n is large.

Let x be a real number with conditons

$$y_1 = (\log n)^{2^i} < x \le (\log n)^{2^{i+1}} = y_2$$

and let $Q(i,x)$ be a set of primes p defined by

$$Q(i,x) = \left\{p : p<x,\ (p-(D/p),\ n) > \left[\log n\right]^{2^i/3}\right\}.$$

If $q(i,x)$ denotes the cardinality of the set $Q(i,x)$, then evidently

$$(13) \qquad \prod_{p<x} (p-(D/p),\ n) > \left[\log n\right]^{2^i q(i,x)/3}.$$

On the other hand Erdős proved that

$$\prod_{p<x} (p-1,\ n) < \exp\left\{c_6 x \cdot \log\log n/\log x\right\}$$

for any $x>(\log n)^{16}$ and $x\le n$ (see (15) and (21) in [1]) and we can similarly obtain that

$$\prod_{p<x} (p+1,\ n) < \exp\left\{c_6 x \cdot \log\log n/\log x\right\},$$

thus

$$(14) \qquad \prod_{p<x} (p-(D/p),\ n) < \prod_{p<x} (p-1,\ n)\cdot(p+1,\ n) <$$

$$< \exp\left\{c_7 x \cdot \log\log n/\log x\right\}.$$

Comparing (13) with (14)

(15) $$q(i,x) < \frac{c_n x}{2^i \cdot \log x}$$

follows for $i \geq 4$.

Let $a(m)$ be an arithmetical function such that $a(m)=1$ if m is a prime satisfying the conditions for the primes in $\sum_i^{(i)}$ and $a(m)=0$ otherwise. Then

$$\sum_{m \leq x} a(m) \leq q(i,x)$$

by the definiton of $q(i,x)$ and, using (15) and the fact $y_2 = y_1^2$, by Abel's identity we have

(16) $$\sum_i \frac{1}{p} = \sum_{y_1 < m \leq y_2} a(m) \cdot \frac{1}{m} \leq$$

$$\leq \frac{c_8}{2^{2i+1} \cdot \log \log n} + \frac{c_8}{2^i} \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{dt}{t \cdot \log t} < \frac{c_9}{2^i}$$

for any $i \geq 4$. But by (8)

$$\sum_{i=0}^{3} \sum_i \frac{1}{p} \leq \sum_{p \leq (\log n)^{16}} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq \log n} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) = O(1)$$

since $p \geq d-1$ if $r(p)=d$, and so by (8) and (16) we obtain

(17) $$A_2'(n) = c_9 \cdot \sum_{i=4}^{N} \frac{1}{2^i} + O(1) < c_{10} .$$

For the third summand of $A(n)$ we also get $A_3(n)=O(1)$. Namely R_n has at most $k_1 n/\log n$ distinct prime divisors greater than n, and so really

(18) $$A_3(n) \leq \sum_{\substack{p \mid R_n \\ p > n}} \frac{1}{p} < \frac{1}{n} \cdot \frac{k_1 n}{\log n} < c_{11}$$

if n is sufficiently large.

Thus by (6), (9), (11), (17) and (18)

$$\sum_{p \mid R_n} \frac{1}{p} = A(n) < \log\log\log n + c_{12} \tag{19}$$

follows which proves (4) with $c = c_{12}$.

For the reciprocal sum of the positive divisors of R_n we have

$$\sum_{p \mid R_n} \frac{1}{d} < \prod_{p \mid R_n} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) = \prod_{p \mid R_n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) <$$

$$< \prod_{p \mid R_n} e^{1/(p-1)} = \exp\left\{ \sum_{p \mid R_n} \frac{1}{p-1} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ c_{13} + \sum_{p \mid R_n} \frac{1}{p} \right\}$$

and so by (19)

$$\sum_{d \mid R_n} \frac{1}{d} < \exp\left\{ c_{14} + \log\log\log n \right\}$$

follows which implies inequality (5) with $c_0 = e^{c_{14}}$.

REFERENCES

[1] P. Erdős, On the sum $\sum_{d \mid 2^n - 1} d^{-1}$, Israel J. Math., 9 (1971), 43-48.

[2] D.H. Lehmer, An extended theory of Lucas' function, Ann. of Math., 31 (1930), 419-448.

[3] C. Pomerance, On primitive divisors of Mersenne numbers, Acta Arithm., 46 (1986), 355-367.

MÁTYÁS FERENC

PITAGORASZI SZÁMHÁRMASOK ÉS A LUCAS SOROZAT

ABSTRACT *(Pythagorean triples and the Lucas sequence) We define the sequence* $L=\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ *by the integers* $L_0=2$, $L_1=1$ *and the recurrence* $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$, $n>1$. *This sequence is called Lucas sequence and the terms of it are the Lucas numbers.* x_0, y_0, z_0 *positive integers are called Pythagorean triple if* $x_0^2+y_0^2=z_0^2$. *If for this* x_0, y_0, z_0 *triple* $(x_0, y_0, z_0)=1$ *is also true then* x_0, y_0, z_0 *triple will be called primitive Pythagorean triple.*

In this paper we deal with the connection between the Lucas numbers and the Pythagorean triples. Let A, B, C $(A\neq 0)$ *be arbitrary, but fixed integers. We prove the following two theorems:*

THEOREM 1. $(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C)$ *triples are Pythagorean triples for every even* $n(\geq 0)$ *if and only if*

$$A\equiv 0 \pmod 2,\quad B=-\left(\frac{A}{2}\right)^2+2 \quad\text{and}\quad C=\left(\frac{A}{2}\right)^2+2 ,$$

while for every odd $n(\geq 1)$ *if and only if*

$$A\equiv 0 \pmod 2,\quad B=-\left(\frac{A}{2}\right)^2-2 \quad\text{and}\quad C=\left(\frac{A}{2}\right)^2-2 .$$

THEOREM 2. Under the conditions of Theorem 1. the $(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C)$ *triples are primitive Pythagorean*

triples if and only if $\left(L_n,\frac{A}{2}\right)=1$, $L_n > \frac{A}{2}$ *and:*

if $A\equiv 0 \pmod 4$, then $n\equiv\pm 2 \pmod 6$ or $n\equiv\pm 1 \pmod 6$

if $A\equiv 2 \pmod 4$, then $n\equiv 0 \pmod 6$ or $n\equiv 3 \pmod 6$

I.

Az $L_0=2$, $L_1=1$ kezdőtagokkal és az $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ $(n>1)$ rekurziós formulával definiált sorozatot Lucas sorozatnak, tagjait Lucas számoknak nevezzük. E rekurzív definíció mellett jól ismert a sorozat tagjainak explicit alakja is:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad n \geq 0 . \tag{1}$$

(lásd pl. [4]).

Ugyancsak jól ismert a pitagoraszi számhármas fogalma, mellyel az $x^2+y^2=z^2$ diofantikus egyenlet pozitiv egész megoldásait szokás nevezni. Tudjuk, hogy az összes (zérust nem tartalmazó) megoldások előállitásához elegendő meghatározni az ugynevezett alapmegoldásokat, azaz $x_0^2+y_0^2=z_0^2$ mellett az $\left(x_0,y_0,z_0\right)=1$ feltételt is kielégitő számhármasokat. Jól ismert, hogy az összes alapmegoldás:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\,m\cdot t \\ y_0 &= m^2-t^2 \\ z_0 &= m^2+t^2 \end{aligned} \tag{2}$$

alakú, ahol $(m,t)=1$, $m>t$ és $m+t\equiv 1 \pmod 2$.

M. Bicknell-Johnson [2] a Fibonacci sorozat $\left(F_0=0,\ F_1=1\right.$ és $\left.F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n>1\right)$ és a pitagoraszi számhármasok kapcsolatát vizsgálva megoldotta az $F_n^2 \pm F_m^2 = K^2$ (K rögzitett egész) egyenletet. L. Bernstein [1]-ben szintén a Fibonacci sorozat és az $x^2+y^2=z^2$ diofantoszi egyenlet alapmegoldásait vizsgálva jutott el az ikerprim-probléma egy átfogalmazásához. A Lucas sorozat és a pitagoraszi számhármasok kapcsolatára vonatkozó problémát vet fel H.T.Freitag [3]-ben: Mely n-re lesz a $\left(2L_n, L_{2n}-3, L_{2n}-1\right)$ számhármas pitagorászi számhármas? Ezen dolgozat tárgya e felvetett probléma egy lehetséges általánositása s annak - az alapmegoldások meghatározását is tartalmazó - megoldása.

II.

Legyenek A,B,C ($A\neq0$) tetszőleges, de rögzitett egész számok.

1. TÉTEL Az $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ számhármas pitagoraszi számhármast alkot minden páros $n\geq0$ -ra akkor és csak akkor, ha $A \equiv 0 \pmod 2$, $B = -\left(\frac{A}{2}\right)^2+2$ és $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2+2$, mig minden páratlan $n\geq1$ -re akkor és csak akkor, ha $A \equiv 0 \pmod 2$, $B = -\left(\frac{A}{2}\right)^2-2$ és $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2-2$.

2. TÉTEL Az 1. Tétel feltételeinek megfelelő $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ számhármas akkor és csak akkor alapmegoldás, ha $\left(L_n, \frac{A}{2}\right)=1$, $L_n > \frac{A}{2}$ és

ha $A \equiv 0 \pmod 4$, akkor $n \equiv \pm 2 \pmod 6$ vagy $n \equiv \pm 1 \pmod 6$

ha $A \equiv 2 \pmod 4$, akkor $n \equiv 0 \pmod 6$ vagy $n \equiv 3 \pmod 6$.

A tételek bizonyitásához szükségünk van a következő lemmára.

LEMMA: $L_{2n} = L_n^2+2$, ha $n \geq 1$ páratlan és

$L_{2n} = L_n^2-2$, ha $n \geq 0$ páros egész szám.

BIZONYITÁS: A Lucas számok (1)-beli explicit alakját használva

$$L_n^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} = L_{2n}+2(-1)^n ,$$

melyből a Lemma állitása nyilvánvaló.

1. TÉTEL BIZONYITÁSA. Tételezzük fel, hogy $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ minden $n\geq 0$ páros egészre megoldása az $x^2+y^2=z^2$ egyenletnek, vagyis $\left(AL_n\right)^2+\left(L_{2n}+B\right)^2 = \left(L_{2n}+C\right)^2$. Lemmánk alapján $L_{2n}+B = L_n^2+B-2$ és $L_{2n}+C = L_n^2+C-2$, igy az

$$\left(AL_n\right)^2+\left(L_n^2+B-2\right)^2 = \left(L_n^2+C-2\right)^2$$

egyenlethez jutunk, melyet

$$L_n^2 \left(A^2+2B-2C\right) = \left(C+B-4\right) \left(C-B\right) \tag{3}$$

alakra hozhatunk. Mivel (3) minden $n\geq 0$ páros egészre fennáll és $L_n\neq 0$, ezért az $A^2+2B-2C=0$ és $(C+B-4)(C-B)=0$ egyenlőségeknek kell teljesülni. Nyilván $C>B$, igy ez csak $B = -\left(\frac{A}{2}\right)^2+2$ és $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2+2$ esetén lehetséges, továbbá A,B,C egész volta miatt szükséges, hogy A páros szám legyen.

Ha $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ minden páratlan $n\geq 1$ egészre pitagoraszi számhármas, akkor lemmánk segitségével a következőket irhatjuk:

$$\left(AL_n\right)^2+\left(L_n^2+B+2\right)^2 = \left(L_n^2+C+2\right)^2,$$

melyből az

$$L_n^2 \left(A^2+2B-2C\right) = \left(C+B+4\right) \left(C-B\right) \tag{4}$$

adódik. Mivel (4) minden páratlan $n\geq 1$ -re igaz, és $L_n\neq 0$, igy az $A^2+2B-2C=0$ és $(C+B+4)(C-B)=0$ egyenletrendszernek kell teljesülni, melyet megoldva – $C>B$ miatt – $B = -\left(\frac{A}{2}\right)^2-2$ és $C = \left(\frac{A}{2}\right)^2-2$ adódik, ahol A-nak szintén páros egésznek kell lennie.

A tétel feltételeinek elégséges voltát (3), ill. (4) minden $n\geq 0$ -ra való megoldhatósága, továbbá a lemmánk n paritásától függő állítása szolgáltatja.

Megjegyzés. Tételünk speciális esetként választ ad H.T.Freitag által felvetett problémára, ugyanis ha $A=2$, $B=-3$ és $C=-1$, akkor a $\left(2L_n, L_{2n}-3, L_{2n}-1\right)$ hármas minden páratlan $n\geq 1$ egészre pitagorászi számhármast ad. Az így előállítható pithagoraszi számhármasok: (2,0,2) (8,15,17), (22,120,122),..

2. TÉTEL BIZONYITÁSA. Vizsgáljuk meg tételünk állítását páros $n\geq 0$ egészekre. Az 1. tételünk szerint páros n-re $\left(AL_n, L_{2n}+B, L_{2n}+C\right)$ pontosan akkor pitagoraszi számhármas, ha A páros és

$$\left(AL_n,\ L_n^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2,\ L_n^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2\right)$$

alakú. (2) szerint ez pontosan akkor lehet alapmegoldás, ha – A páros voltát is figyelembevéve – létezik olyan pozitiv egész m és t, melyre

(6) $\quad AL_n = 2mt,\ L_n^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 = m^2-t^2$ és $L_n^2+\left(\frac{A}{2}\right)^2 = m^2+t^2,$

ahol $(m,t)=1$, $m>n$ és $m+n\equiv 1 \pmod 2$. (6)-ból $m=L_n$ és $t = \frac{A}{2}$ adódik, azaz (5) akkor és csak akkor alapmegoldás, ha

$\left(L_n, \frac{A}{2}\right)=1$, $L_n > \frac{A}{2}$ és L_n, ill. $\frac{A}{2}$ paritása különböző. Azaz, ha $A\equiv 0 \pmod 4$, akkor L_n páratlan kell hogy legyen, mely – L_n rekurziv definicióját figyelembevéve – páros n-ekre pontosan akkor teljesül, ha $n\equiv\pm 2 \pmod 6$. Ha pedig $A\equiv 2 \pmod 4$, akkor L_n, páros. Ugyancsak L_n rekurziv definiciójából könnyen nyerhető, hogy páros n-ekre L_n pontosan akkor páros, ha $n\equiv 0 \pmod 6$.

Páratlan n-ekre az állitás az előzőhöz hasonlóan bizonyitható.

Megjegyzés. Alkalmazva tételünket a már vizsgált $\left(2L_n, L_{2n}-3, L_{2n}-1\right)$ pitagorászi számhármasokra (n páratlan) azt kapjuk, hogy a $\left(2 L_{6i+3}, L_{12i+6}-3, L_{12i+6}-1\right)$ számhármas minden $i\geq 0$ egész esetén egy-egy alapmegoldását szolgáltatja a $x^2+y^2=z^2$ diofantoszi egyenletnek.

IRODALOM:

[1] L.Bernstein: Primitive Pythagorean Triples, The Fibonacci Quarterly 20, No.3 (1982), 227-242.

[2] M.Bicknell-Johnson: Pythagorean Triples Containing Fibonacci Numbers: Solution for $F_n^2 \pm F_m^2 = K^2$, The Fibonacci Quarterly 17, No.1 (1979), 1-12.

[3] Herta T. Freitag: Problem B 598 and B 599. The Fibonacci Quarterly 25, No.3 (1987) 279.

[4] I.Niven - H.S.Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, Müszaki Könyvkiadó, Budapest (1978).

MOLNÁR SÁNDOR*

MÁSODRENDŰ LINEÁRIS REKURZIV SOROZATOK LOGARITMUSÁNAK ELOSZLÁSA

ABSTRACT: *(Distribution of the logarithms of terms of linear reccurences). Let* $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ *be a non-degenerate second order linear recurrence sequence of real numbers with positive terms defined by* $G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2}$ *(n>1), where A, B and the initial terms* G_0, G_1 *are fixed real numbers. In this paper it is proved that for a positive real number c the sequence* $\{\log_c G_n\}_{n=0}^{\infty}$ *is uniformly distributed modulo 1 if and only if* $\log_c \alpha$ *is not rational (*α *is the dominant root of the characteristic polynomial of the sequence* G_n*).*

Legyen a $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ k-ad rendü k>1 lineáris rekurziv sorozat definiálva az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ valós számokkal $(A_k \neq 0)$ és az

(1) $$V_n = A_1V_{n-1} + A_2V_{n-2} + \ldots + A_kV_{n-k}$$

rekurzióval $(n \geq k)$, ahol a $V_0, V_1, \ldots, V_{k-1}$ kezdő értékek rögzitett valós számok, melyek között van zérustól különböző.

---

* *A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273. sz. pályázata támogatta.*

Jelöljük a

(2) $$v(x) = x^k - A_1x^{k-1} - A_2x^{k-2} - \dots - A_k$$

karakterisztikus polinom zérushelyeit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ -val. Az (1) lineáris rekurziv sorozat (2) karakterisztikus polinomjának diszkriminánsát egyidejüleg a sorozat diszkriminánsának is nevezzük.

Ismeretes, hogy a V_n értékek $n=1,2,\dots$ explicit alakban is kifejezhetők az $A_1, A_2, \dots, A_k$ és az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ segitségével. Az explicit alakra csak $k=2$ esetben lesz szükségünk. Ekkor másodrendü lineáris rekurziv sorozatról beszélünk, és a szokásoknak megfelelően a $V_n = G_n$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $A_1 = A$, $A_2 = B$ jelöléseket alkalmazzuk, ahol az α és β választást az $|\alpha| \geq |\beta|$ relációnak megfelelően végezzük. Az $\alpha \neq \beta$ esetén az explicit alakot a

(3) $$G_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

Binet formula szolgáltatja, ahol $a = \left(G_1 - G_0\beta\right)/(\alpha-\beta)$ és $b = -\left(G_1 - G_0\alpha\right)/(\alpha-\beta)$.

A másodrendü lineáris rekurziv sorozatot nem elfajulónak nevezzük ha:

- $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ nem tesz eleget elsőrendü rekurziónak
- α / β nem egységgyök.

Az (1)-ből $k=2$, $A_1=A_2=V_1=1$ és $V_0=0$ választással az ismert Fibonacci sorozatot kapjuk.

Szükségünk lesz az alábbi jelölésekre és fogalmakra is. $[x]$ az x valós szám egész részét, $\{x\} = x - [x]$ pedig a törtrészét jelöli. Az 1_I szimnólummal az I intervallum karakterisztikus függvényét fogjuk jelölni.

A valós számok $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ ssorozatát modulo 1 egyenletes eloszlásunak nevezzük, ha a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} 1_{[a,b)}\left(\left\{x_n\right\}\right) = b - a$$

egyenlőség a $[0,1)$ intervallum bármely $[a,b)$ részintervallumán teljesül.

Pozitiv tagokból álló lineáris rekurziv sorozatok természetes alapu logaritmusának modulo 1 eloszlásával már számos szerző foglalkozott. R.L. Duncan [2] bizonyitotta, hogy a Fibonacci sorozat tagjainak természetes alapu logaritmusaiból alkotott sorozat, $\left(\log F_n\right)_{n=1}^{\infty}$, modulo 1 egyenletes eloszlásu. L.Kuipers [3] uj bizonyitást adott a [2] -beli tételre és igazolta, hogy az egész számokból alkotott $\left(\left[\log F_n\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat egyenletes eloszlásu. J.L.Brown,Jr. és R.L. Duncan [1] megmutatták, hogy az (1) rekurziv sorozatban $V_0, V_1, \ldots, V_{k-1}$ pozitív valós számok, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nemnegatív racionális számok és $0<|\alpha_1|<|\alpha_2|<\ldots<|\alpha_k|$ teljesül, akkor $\left(\log V_n\right)_{n=1}^{\infty}$ egyenletes eloszlásu mod 1. L. Kuipers és J.S. Shiue [6] uj bizonyitást adtak az [1] -beli tételre, továbbá igazolták, hogy ugyanilyen feltételek mellett $\left(\left[\log V_n\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ egyenletes eloszlásu. L. Kuipers [4] a [2] -beli eredményt kiterjesztette tetszőleges $c>1$ és $c\in\mathbb{Z}$ alapu logaritmusra.

Jelen dolgozatban megadjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy pozitiv tagokból álló nem elfajuló másodrendü lineáris rekurziv sorozat tagjai tetszőleges $c\in\mathbb{R}$, $c>0$ és $c\neq 1$ alapu logaritmusának sorozata modulo 1 egyenletes eloszlásu legyen.

Érvényes a következő:

<u>TÉTEL</u>: Legyen $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy pozitiv tagokból álló nem elfajuló másodrendü lineáris rekurziv sorozat és legyen $c \neq 1$ pozitiv valós szám. A $\{\log_c G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású modulo 1, ha $\log_c \alpha \notin Q$.

A TÉTEL bizonyitásához felhasználjuk az alábbi lemmát.

<u>LEMMA</u>: Ha a $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ nem elfajuló másodrendü lineáris rekurziv sorozat tagjai pozitiv valós számok, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \alpha > 0.$$

Rátérünk a bizonyitásokra.

<u>A LEMMA BIZONYITÁSA</u>: Először azt fogjuk megmutatni, hogy a LEMMA feltételei mellett $|\alpha|>|\beta|$ teljsül. Ehhez csak az $|\alpha|\neq|\beta|$ -t kell igazolni, mert a bevezetésbeli megállapodásunk szerint $|\alpha|\geq|\beta|$.

Az $|\alpha|\neq|\beta|$ valós α esetén nyilvánvaló, mert ellenkező esetben $\alpha/\beta=\pm1$ egységgyök adódna, ami ellentmond a LEMMA azon feltételének, hogy a sorozat nem elfajuló.

Ha viszont α nem valós, akkor α és β valamint a és b komplex konjugált számok és érvényesek a

(4) $\qquad \alpha = r\cdot\exp(i\Pi\theta) \qquad \beta = r\cdot\exp(-i\Pi\theta)$

és

(5) $\qquad a = r_1\cdot\exp(i\Pi\omega) \qquad b = r_1\cdot\exp(-i\Pi\omega)$

összefüggések, ahol

$$0 < \theta = \frac{1}{\Pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-D}}{A} < 1, \qquad \omega = \frac{1}{\Pi}\operatorname{arctg}\frac{AG_0-2G_1}{G_0\cdot\sqrt{-D}}$$

és $r = |\alpha|>0$, $r_1 = |a|>0$. A (4) és (5) felhasználásával a

(3) Binet formula a

(6) $$G_n = 2\, r_1 r^n \cos \Pi(\varphi + n\Theta)$$

alakot ölti.

Mivel (6) -ban $2r_1r^n$ pozitiv, $\cos \Pi(\varphi+n\Theta)$ pedig $0<\Theta<1$ miatt pozitiv és negativ értéket egyaránt felvesz ($n\in\mathbb{N}$), ezért a sorozat tagjai nem mind pozitivak. Tehát az $|\alpha|=|\beta|$, akkor sem lehetséges ha α nem valós értékü, igy az $|\alpha|>|\beta|$ reláció érvényességét beláttuk.

Tekintsük most a $\lim_{n\to\infty} \left(G_{n+1}/G_n\right)$ határértéket. A Binet formula és a nem elfajuló sorozatokra érvényes $a\neq 0$ felhasználásával

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\alpha^{n+1}+b\beta^{n+1}}{a\alpha^n+b\beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{b}{a}\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \alpha$$

A (7) határérték kiszámitásánál felhasználtuk, hogy $|\alpha|>|\beta|$ miatt $(\alpha/\beta)^n \to 0$, ha $n\to\infty$.

Megmutatjuk még, hogy $\alpha>0$ és igy teljes lesz a LEMMA bizonyitása. Az α valós szám a pozitiv elemekből álló $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat határértéke, ezért $\alpha\geq 0$. Az $|\alpha|>|\beta|\geq 0$ miatt $\alpha\neq 0$, tehát $\alpha>0$.

<u>A TÉTEL BIZONYITÁSA</u>: Legyen $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ egy nem elfajuló másodrendü lineáris rekurziv sorozat, melynek tagjai pozitivak.

A feltétel elégségességének bizonyitásához felhasználjuk J.G. van der Corput ismert tételét (Vö.[5] p. 28.): ha

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valós számoknak olyan sorozata, melyre $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$ határérték létezik és értéke irracionális szám, akkor az $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat egyenletes eloszlású mod 1.

A logaritmus függvény folytonosságát és a LEMMA-t felhasználva ki tudjuk számolni a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_c G_{n+1}-\log_c G_n\right)$ határértéket:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\log_c G_{n+1}-\log_c G_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\log_c \frac{G_{n+1}}{G_n}\right)=\log_c \alpha .$$

A LEMMA értelmében $\alpha>0$, így a (8) -beli határérték létezik. Ha $\log_c \alpha\notin\mathbb{Q}$, akkor van der Corput idézett tétele szerint $\{\log_c G_n\}_{n=0}^{\infty}$ egyenletes eloszlású modulo 1.

Megmutatjuk végül, hogy $\log_c \alpha\in\mathbb{Q}$ esetén $\{\log_c G_n\}_{n=0}^{\infty}$ nem egyenletes eloszlású modulo 1. Legyen $\log_c \alpha\in\mathbb{Q}$.

$$(9)\qquad \log_c G_n=\log_c\left(a\alpha^n+b\beta^n\right)=\log_c\left(a\alpha^n\left(1+\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)\right)=$$
$$=\log_c a+n\log_c\alpha+\log_c\left(1+\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right).$$

(Nyilvánvalóan $a>0$, egyébként $\alpha=|\alpha|>|\beta|$ miatt $G_n=a\alpha^n+b\beta^n$ nem lehetne tetszőleges $n\in\mathbb{N}$-re pozitív.) A $\{\log_c G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak véges sok torlódási pontja van modulo 1, mivel (9) jobb oldalán az első tag konstans, az utolsó zérushoz tart $(n\to\infty)$, a középsőnek pedig $\log_c\alpha\in\mathbb{Q}$ miatt modulo 1 véges sok torlódási pontja van. Ekkor viszont $\{\log_c G_n\}_{n=0}^{\infty}$ nem egyenletes eloszlású modulo 1, amivel a feltétel szükséges voltát is bizonyítottuk.

IRODALOM:

[1] J.L.Brown, JR. and R.L.Duncan, Modulo one uniform distribution of the sequence of logarithms of certain recursive sequences, Fibonacci Quart., 8. (1970) 483-486.

[2] R.L. Duncan, An application of uniform distributions to the Fibonacci numbers, Fibonacci Quart., 5. (1967) 137-140.

[3] L. Kuipers, Remark on a paper by R.L. Duncan concerning the uniform distribution mod 1 of the sequence of the logarithms of the Fibonacci numers, Fibonacci Quart., 7. (1969), 465-466, 473.

[4] L. Kuipers, A property of the Fibonacci sequence F_m, m = 0,1,..., Fibonacci Quart., 20, (1982), 112.

[5] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley, New York, (1974).

[6] L. Kuipers and J.S. Shiue, Remark on a paper by Duncan and Brown on the sequence of logarithms of certain recursive sequences, Fibonacci Quart., 11, (1973), 292-294.

NAGY LAJOSNÉ

AKTIVITÁS MATEMATIKAÓRÁKON AZ ÁLTALÁNOS ISKOLA 5--8. OSZTÁLYÁBAN CÍMŰ KUTATÁSUNK HARMADIK ÉVÉNEK MUNKÁIRÓL

ABSTRACT: (The results of the third year of a search entitled: "Activity during the mathematic lessons in the 5th--8th forms of the primary school") The Matematics Department of the Teachers' Training College Eger, Hungary and the Dr. Theodor Neubauer Pedagogical College, Erfurt, East-Germany lead a common piece of research in the field of professional methodology on the topic "Activity during the matematic lesson".

The report is to give account on the three years' work and it wants to find an answer for the following questions.

- What motivates active work during the lessons?
- The effects of problem-solving teaching techniques,
- How frequent is the evaluation of the students' work during the lessons and how efficient is it?

We summarize the questions given to 500 questionnaires. The answers we received during the personal conversations and discussions give new and interesting viewpoints to our study. The report lists the questions for which we are trying to find an answer in the next years. E.g.:

- Contror-evaluation and its relation to activity,
- Can activity be planned?
- What is the impact of the personal connection between the pupil and the teacher on the activity of the pupils.

Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematika Tanszéke (Magyarország) és a Dr. Theodor Neubauer Pedagógiai Főiskola Erfurt (NDK) Matematikaoktatás-Metodikai Tudományos szakcsoportja a matematika szakmódszertan területén közös kutatást végez: "Aktivitás a matematikaórákon" c. témakörben.

A kutatócsoport tagjai a megállapodás alapján rendszeresen tájékoztatják egymást. (Az első évek munkáiról jelent meg tájékoztatás a WZ 22. JAHRGANG. 1986. HEFT 1).

A következőkben az 1986--87-es tanévi munkánkról, problémáinkról, terveinkről tájékoztatjuk azokat, akik érdeklődnek a téma iránt, és hozzánk hasonlóan törekszenek arra, hogy nevelő és oktató munkájuk az eddiginél jobb, hatékonyabb legyen.

Megfigyeléseinket jegyzőkönyvekben rögzítettük. A 3 év alatt több mint 500 jegyzőkönyv készült. Ezek döntő többségét IV. éves matematika szakos főiskolai hallgatók készítették vidéki gyakorlatukon az ország különböző általános iskoláiban.

Az 1. sz. jegyzőkönyv az egész osztály megfigyelésére, a 2. sz. egy-egy tanuló legalább 5 matematikaórán történő megfigyelésére vonatkozott. "Az óra elemzése"-hez is 10 féle megfigyelési szempont tartozott.
Ezekből a következő kérdéseket, szempontokat emeltem ki az elemzés során:
- Mi motiválja az órai aktív magatartást?
- A problémafelvető tanítás.
- Az értékelés gyakorisága az órán és hatása a tanulói aktivitásra.

<u>A motiváció felismerhetősége -- hatékonysága</u>

A jegyzőkönyv alapján adható válaszok:

- TÖKÉLETES

- RÉSZBEN

- NEM

Felismerhető-e a motiváltság?

A motiváció hatékonysága.

Az 500 jegyzőkönyv adatait a motiváció felismerhetőségéről és hatékonyságáról a következő táblázat tartalmazza: (1/a táblázat)

	A motiváció			
	Felismerhetősége		Hatékonysága	
	Az órák száma	%	Az órák száma	%
Tökéletes	230	46	160	32
Részben	220	44	285	57
Nem	50	10	55	11
Összesen	500	100	500	100

Ha az első és második sort együtt értékeljük: az órák 90 %-ban motiválta a pedagógus, a tanulókat tökéletesen, illetve részben. A motiváció a megfigyelt órák 89 %-ban bizonyult tökéletesen, illetve részben hatékonynak. Ez az érték 1 %-ban tér el az előbbitől, vagyis közelítően annyi órán volt felismerhető a motiváció, mint ahány órán hatékony.

Figyelemreméltó eltérést mutat viszont a motiváció tökéletesen, illetve részben történő felismerhetőségének aránya, valamint a motiváció tökéletesen, illetve részben megvalósuló hatékonyságának aránya.

Érdekes megfigyelni, hogy amíg a motiváció tökéletes, illetve részbeni felismerhetősége közötti eltérés kicsi (2 %) ugyanakkor a motiváció részleges hatékonysága 57 - 32 = 25 %-kal nagyobb, mint a tökéletes hatékonyság. Ebből arra is következtethetünk, hogy a tökéletesen motivált óráknak csak egy részében valósult meg a tökéletes hatékonyság, azaz nem biztos, hogy a tanár által tökéletesen motivált órákon a tanulók órai aktivitásán, munkáján a tökéletes hatékonyság tükröződik.

Az órák 10 %-ban a pedagógus nem motivált. Ennél 1 %-kal több azoknak az óráknak a száma, amelyeknél a motiváció nem volt hatékony. A matematikaórák magas évi óraszámát tekintve ez a 11 % is nagyon fontos, figyelmeztető adat. Van még ezen a téren is javítanivaló!

Ezek az adatok arra engednek következtetni, hogy a motiváció jelenléte elengedhetetlen, ha a tanulók aktivitását igényeljük és jó munkánk eléréséhez fontosnak tartjuk.

Érdekelt bennünket az is, hogy vajon az egyes osztályokban hány órán volt tökéletesen vagy részben hatékony, illetve hatástalan a motiváció. (1/b táblázat)

A motiváció hatékonysága	5.oszt. (óra)	6.oszt. (óra)	7.oszt. (óra)	8.oszt. (óra)	össz. (óra)
Tökéletes	45	75	30	10	160
Részben	70	90	60	65	285
Nem	20	10	15	10	55
Összesen	135	175	105	85	500

Tekintettel arra, hogy az elemzésre felhasználható jegyzőkönyvek száma az egyes osztályokban eltérő, így egyszerűbb a motiváció szempontjából részben és tökéletesen hatékony órák összehasonlítása a nem hatékony órák arányával.

5. osztályban	115:20	(23:4)
6. osztályban	165:10	(66:4)
7. osztályban	90:15	(24:4)
8. osztályban	75:10	(30:4)

A következő táblázat adatai alapján arra kerestük a választ, hogy a

- TÖKÉLETES
- RÉSZBEN
- NEM

lehetőségek hogyan párosulnak egy-egy órán belül a motiváció felismerhetőségének és hatékonyságának összefüggésében, valamint a lehetséges párosítások a megfigyelt 500 óra hány százalékában valósultak meg (1/c táblázat).

A motiváció felismerhetősége	Motiváció hatékonysága	Az órák száma	%
TÖKÉLETES	TÖKÉLETES	130	26
TÖKÉLETES	RÉSZBEN	100	20
TÖKÉLETES	NEM	-	-
RÉSZBEN	TÖKÉLETES	30	6
RÉSZBEN	RÉSZBEN	185	37
RÉSZBEN	NEM	5	1
NEM	TÖKÉLETES	-	-
NEM	RÉSZBEN	-	-
NEM	NEM	50	10

Az előzőekben már említettem, hogy az osztályok -- csoportok -- megfigyelésén túl, egy-egy tanuló munkáját folyamatosan (legalább 5 órán keresztül) jegyzőkönyvben rögzítettük.
Ezt követően elbeszélgettünk velük (riport).
Tanulmányoztuk azokat az eseteket:

a) amikor mi aktívnak ítéltük a tanulók munkáját és kerestük az okát;

b) megfigyeltük azokat, akiknek órai magatartását passzívnak láttuk.

A hasonló tulajdonságú, aktivitású tanulókat egy csoportba soroltuk. Így három csoport alakult ki (természetesen ez a besorolás még tovább finomítható lenne).

1. Aktív és eredményes tanulók csoportja;
2. aktívak, de eredményük közepes;
3. nem aktívak, eredményük közepes vagy gyenge.

(Csak megjegyezni szeretném, hogy -- különösen a 7., 8. osztályokban több olyan tanulóval is találkoztunk, akik nem aktívak, de képesek jó eredmények elérésére.)
Hogy a csoportba sorolásnál mit vettünk figyelembe, azt talán a következő

tulajdonságok felsorolásával érzékeltethetjük.

1. Az első csoportba tartozókra jellemző a tudatos célratörés, fegyelmezettség. Az otthoni és iskolai munkájuk önálló. Ismereteik biztosak, feladatok megoldásában jártasak. Belső igényük a jó megoldások keresése. A matematikai szaknyelvet pontosan használják.
Eredeti ötleteik, elképzeléseik vannak a feladatok megoldásánál. Szívesen tanulnak, ismételnek, gyakorolnak. Szeretik a matematikát.

2. A második csoportba soroltakra is jellemző az órai aktív magatartás. Igénylik az új ismereteket, tudásukat másokéval hasonlítják, ellenőrzik. Feladatok megoldását szívesen vállalják, ha probléma adódik segítséget kérnek. Törekszenek a jó eredmény elérésére.
Az otthoni, egyéni munkában már sokszor elbizonytalanodnak. Írásos munkáik, dolgozataik már nem mindig hibátlanok. Ilyenkor kedvüket vesztik. Ezek a tanulók munkájuk figyelemmel kísérését, segítését igénylik. A pedagógus személyisége tudatos odafigyelése, nélkülözhetetlen előrehaladásuk érdekében.

3. A harmadik csoport órai magatartására nem jellemző az aktivitás. A tanár utasításait betartják. Matematika iránti érdeklődésük, szorgalmuk változó. Feladatok megoldása során ha problémába ütköznek hamar feladják. Munkájukban gyakori irányítást, bátorítást, ellenőrzést igényelnek. Önálló munkájukban még sok a javítani való, dolgozataik közepes vagy gyengébb osztályzatúak. A szaknyelvet ritkán és hibásan használják. Egyéni bánásmódot, sok törődést igényelnek ha eredményüket javítani, tudásukat gyarapítani szeretnénk.
Ez a csoportba sorolás önkényes, hisz még sok szempont alapján lehetett volna ezt az osztályozást elvégezni.
Ami megfigyeléseink, tapasztalataink alapján közös volt:
minden tanuló igényi a motiválást;
munkájának értékelését;
segítséget, ha problémája adódik...
Ezért is próbáltuk megfigyelési szempontjainkat úgy összeválogatni, hogy válaszolni tudjunk arra a kérdésre:
- hogyan felelünk meg ezeknek az elvárásoknak?
- az előforduló hiányosságokat hogyan tudnánk a jövőben elkerülni?
Tanulságos volt egy-egy tanulóval való egyéni elbeszélgetés.

A következőkben idézek egy általunk első csoportba sorolt tanulóval készült riportot (Tóth Dénes 8. oszt. tanuló. T = tanár, D = Dénes) (készítette: Hizsnyik Tünde IV. éves mat.-fiz.).

T: Figyeltem az órai munkádat. Most arra kérlek mutasd be magad, hogyan dolgoztál!

D: Jelentkeztem, és ahol tudtam segítettem a tanárnő munkáját.

T: Miben segítetted?

D: Ha kérdezett, jól válaszoltam, megoldottam a feladatokat.

T: Szerinted a tanárnőnek mi volt a véleménye az órai munkádról?

D: Megdícsért, mert jól dolgoztan, az órán nem volt velem semmi probléma.

T: Miért szoktál dolgozni, aktív lenni?

D: Szeretem a matematikát, mert érdekes és ezt a témakört (függvények) is nagyon szeretem.

T: Miért tanulod a matematikát?

D: Azért, mert a továbbtanulásnál fontos, és mert nekem különben is tetszik.

T: Milyen iskolában szeretnél továbbtanulni?

D: Közgazdaságiban vagy kereskedelmi szakközépiskolában.

T: Mi szeretnél lenni?

D: Ha a közgazdaságiba vesznek fel, akkor programozó, ha a kereskedelmibe, akkor pedig eladó.

T: Milyen órákat szeretsz matematikából?

D: Mindenfélét, de legjobban azokat ahol eszközzel dolgozunk, a függvény témakört vagy amikor versenyszerűen piros pontért esetleg ötösért oldunk meg feladatokat.

T: Szakköre jár matematikából?

D: Szakköre nem, hanem előkészítőre. Ez jó, most olyanokat tanulunk, amik felvételire is szükségesek.

T: Van-e arról elképzelésed, hogy milyen legyen az óra, ahol mindig aktívan dolgoznál?

D: Játékos és versenyfeladatokat oldjunk meg, és olyan legyen az óra, hogy mi is jobban részt tudjunk venni az órai munkában.

T: Hányasod volt matematikából?

D: Tavaly ötösöm volt, az idén igaz már vagy egy hármsom is, de van 4 ötösöm, és az utolsó dolgozatom is jól sikerült.

Lehetőségeink alapján 6. és 8. osztályosok megfigyelésére adódott több alkalom.

Végzett hallgatóink segítettek itt is (Molnár Edit, Nagy Ágnes, Szüsz Éva, Hizsnyik Tünde). Általános iskolai tanítványaikkal folytatott elbeszélgetések, írásban feltett kérdésekre adott írásbeli és szóbeli válaszok összesítését tartalmazzák a következők:

6. osztályos (280) és 8. osztályos (230) tanuló véleményét saját munkájukról írásban is kértük.

Aktív vagy-e matematikaórán: kérdés összegezését az alábbi táblázat tartalmazza:

Tanulói válaszok	Osztály		%		Matematikajegyük	
	6.o.	8.o.	6.o.	8.o.	6.o.	8.o.
Aktívnak tartja magát	105	40	38	17,4	4,34	4,38
Közepesen aktívnak tartja magát	110	125	39	54,4	3,41	3,60
Nem aktív (gyenge	65	65	23	28,2	3,00	2,39

Érdekes volt összehasonlítani a gyerekektől kapott válaszokat az osztályban matematikát tanító kartársak véleményével. Ők is azt mondták, hogy mindkét korosztálynál a legtöbb tanítványuk aktivitását közepesnek tartják.

Különbség: még a 6. osztálynál ezt a jó aktivitású tanulók követik, addig a 8. osztályosoknál a gyenge aktivitású gyerekek vannak többen.

A második kérdés:

<u>Ha igennel válaszoltál indokold, miért vagy aktív?</u>

<u>Ha nemmel válaszoltál indokold, miért nem vagy aktív?</u>

A 6. osztályosoknál a leggyakrabban előforduló válaszok közül idézek most néhányat:

- Szeretem a matematikát;
- Jó jegyet kapjak;
- Szeretnék javítani;
- Szeretem a matematikát tanulni;
- Szívesen szerkesztek;

Miért nem vagyok aktív?

- Nem értem a matematikát;
- Nem szeretem a matematikát;
- Nehezek a feladatok;
- Félek a kudarctól, ha tudom akkor sem merem mondani;
- Unalmas, nem elég érdekesek a feladatok.

Mit kellene tenni, hogy aktívabb legyél?

A harmadik kérdésre adott válaszok közül:

- Többet kellene tanulni;
- Jobban figyelni az órán;
- Otthon is tanulni kéne;
- Nem beszélgetni és nem játszani órán;
- Érdekesebb lenne a tanulni való anyag;
- Ha nem lenne unalmas a matematika;
- Több játékos feladatot jó lenne megoldani;
- Többször "játszanánk" az órán a "logikai", a "modellező" készlettel...

A több mint 100 riport meghallgatása, majd ezt követően a tanárokkal való elbeszélgetésből, a gyerekek önkritikus véleményét figyelembe véve, az aktivitást motiváló tényezőket a következőkben összegezhetnénk:

Az oktatás folyamán tudatosan törekedjünk az aktvitás megvalósítására. Ezt segítheti:

- a tárgy megszerettetése;
- az érdeklődés biztosítása;
- a tanulók élményeire való támaszkodás;
- a tanítási óra céljának, feladatának megjelölése;
- a tanulók rádöbbentése ismereteik hiányosságaira;
- probléma felvetése;
- valamely konkrét cselekvésre való felszólítás;
- a siker, kudarc, dícséret, büntetés helyes alkalmazása;

- a tanár személyisége, példája;
- érzelmi és értelmi hatások;
- megfelelő pályairányítás;
- gyakorlattal való kapcsolatteremtés;
- szülői törődés, érdeklődés.

Minél erősebb egy motívum, annál könnyebb aktivizálni. A belső és külső motiváció nem válik el mindig élesen egymástól. Van olyan témakör, amely iránt először nem érdeklődik a tanuló. A feldolgozás módja, érdekes feladatok során haladva egy ponton kezdi "izgatni a fantáziáját."
Az embert bármilyen tevékenysége, így a tanulásra is az motiválja tartósan, aminek számára értéke van.

Fontos a pedagógus személyisége -- egyrészt, mert a jó kapcsolat biztosítja a tanár számára, hogy tárgyát szívesebben tanulják, hiszen a tanítási óra légköre, a jó tanár-diák viszony előnyösen hat a tanuló érdeklődésére, munkakedvére.
Azok a tanárok, akik munkájukat eredményesnek ítélik a motiválást fontos nevelési eszköznek tekintik és vallják, hogy a gyerekek aktív tevékenysége megoldhatatlan motiváció nélkül. Érthető tehát, ha továbbra is keressük a választ: Mivel, hogyan motiváljunk matematika órán?
A következőkben a problémafelvető tanítás hatásának és a tanítási óra motiváltságának összefüggését elemzem.

A jegyzőkönyv erre vonatkozó kérdésére adható lehetséges válaszok:

- TÖKÉLETES
- RÉSZBEN
- NEM

Az 1/a táblázat csoportosítását figyelembe véve először azokat az órákat elemzem, amelyeken a motiváció tökéletesen felismerhető. Az összesítés alapján 230 ilyen óra volt.

Hogyan alakult ezeken az órákon a problémafelvető tanítás?
A 230 óra 91,3 %-ában volt problémafelvetés, ezen belül az órák 32,6 %-ban tökéletesen valósult meg a problémafelvető tanítás hatása. A 230 órának csak 8,7 %-ában nem volt problémafelvetés.
Az 1/a táblázat második sorában találjuk azokat az órákat, melyeken rész-

ben ismerhető fel a motiváltság. Ilyen óra 220 volt. Ezeken az órákon a problémafelvető tanítása hatása:

Problémafelvetés		
Motiváció részleges	Az órák száma	%
TÖKÉLETES	45	20,5
RÉSZBEN	110	50
NEM	65	29,5
ÖSSZESEN	220	100,0

Megállapítható, hogy a részben motivált óráknál kisebb százalékban volt az órákon problémafelvetés. A részben történő problémafelvetés viszont több órán fordult elő.

Lényegesen megnőtt azoknak az óráknak a száma is, melyeken egyáltalán nincs problémafelvetés.

Azoknak az óráknak a száma, amelyeken nem ismerhető fel a motiváltság: 50 (óra). Ezeken belül vizsgálva a problémafelvető tanítást.

Problémafelvetés		
Nincs motiváció	Az órák száma	%
TÖKÉLETES	0	0
RÉSZBEN	30	60
NEM	20	40
ÖSSZESEN	50	100,0

Jól megfigyelhető, hogy az 50 óra között egy olyan sincs, ahol tökéletes lenne a problémafelvető tanítás.

Érdemes megfigyelni azoknak az óráknak a típusát, melyeken nem volt problémafelvetés:

- bevezető óra;
- néhány új ismeretet feldolgozó óra;
- ismétlő órák.

Ezeken az órákon a tanítási óra anyaga:

- tizedes törtek szorzása;
- szorzás törttel;
- nulla a szorzásban;
- mértani helyek keresése;
- hasábok, testek felszínének kiszámítása;
- egyenletek megoldása;
- függvényábrázolás;
- következtetési, százalékszámítási feladatok.

Ha összesítjük az 500 jegyzőkönyv ide vonatkozó adatait:

Problémafelvetés	Az órák száma	%
TÖKÉLETES	120	24
RÉSZBEN	275	55
NEM	105	21
ÖSSZESEN	500	100

A megfigyelt 500 órából 395 órán 24 + 55 = 79 % volt problémafelvetés (ideszámolva a részleges problémafelvetést is). Figyelemreméltó, hogy 105 órán (21 %) nem volt problémafelvetés!

Sok még a tennivalónk ezen a területen is!

Izgalmas kérdésre kerestük a választ:

Volt-e tanári értékelés a feladatok megoldását követően?

Volt-e értékelés a feladatok megoldása után? (Szóbeli, írásbeli dícséret, elmarasztalás, osztályzás...)

Hogyan értékelte a nevelő a feladatokat?

A kérdésre a válaszok:

- Teljes értékelést adott a pedagógus:	190 órán	38 %
- Részben értékelt:	225 órán	45 %
- Nem értékelt:	85 órán	17 %

Ez a 38 % azért örvendetes adat, mert ezeken az órákon a tanár utalt arra is, hogy mit tehet a tanuló, hogy jobb eredményt érjen el a jövőben!

Figyelemreméltó, hogy 85 órán (17 %) egyáltalán nem értékelték a gyerekek munkáját. A legmagasabb azoknak az óráknak a száma (45 %), ahol az értékelés csak részben történik. A személyes elbeszélgetések alkalmával a pedagógus gyakran az idő hiányával indokolja az értékelés elmaradását. Osztályzatot pedig a leggyakrabban csak az írásbeli munka értékelésekor kap a tanuló. Az osztályközösség munkájának értékelését gyakran az óra végén összegezve mondja el a tanár. Kis odafigyeléssel, tudatosabb munkával ezen a területen is emelhető lenne az aktivitás!

Úgy éreztük erről a kérdésről is érdemes meghallgatni, figyelembe venni a tanulók véleményét.

Ezért az előzőekben már említett 6. és 8. osztályos tanulóktól írásban a következőket kérdeztük:

1. Szereted-e ha értékelik, osztályozzák matematika órákon a munkádat?
2. Elégedett vagy-e a matematika jegyeddel?
3. Önállóan, vagy társaiddal együtt szeretsz tanulni?

A tanulók 83,3 %-a válaszolt igenlően az első kérdésre, 12,35 %-a adott "közbülső választ" (egyes esetekben -- ha dícsérik -- szeretik, elvárják az értékelést, máskor pl. elmarasztalásnál ellenzik, 4,35 %.)

Tovább elemezve a válaszokat, kerestem, a tanulók szerint melyek azok a kritériumok, melyek szükségessé teszik az értékelést, az osztályozást matematika órákon?

A 83,3 %-ot véve alapul a következő válaszokat adták sokan:

"Jó tudni, hogyan dolgoztam" (kb. 60 %).

"Tudni akarom, hogy mi a véleménye a tanáromnak a munkámról"
tanulók csoportja; (15 %)

Amikor az értékelés egyenlő az osztályzattal:
nagymértékben siker orientált tanulók (15 %);

A pozitív véleménynyilvánításért, a dícséretért tanulók csoportja (10 %).

A második kérdésre válaszolók 37,45 %-a nyilatkozott úgy, hogy "az órai szereplés miatt jobb jegyet adnék"; "az óra alatti aktivitást is figyelembe kéne venni"; "ha látom, hogy a gyerek küszködik, gondolkodik a feladaton, és ennek ellenére nem sikerült neki hibátlanul megoldani, akkor is megadnám a jobb jegyet", írják. Mi is értsünk egyet ezekkel a véleményekkel?

Munkánkat nem tekintjük lezártnak.

További feladatunknak tekintjük: a jegyzőkönyvek adatainak feldolgozását, elemzését;

válaszkeresést néhány a jövőben megvizsgálandó kérdésre mint pl.

- Ellenőrzés, értékelés összefüggése az aktivitással;
- Tervezhető-e az aktivitás, ha igen (módszer, szervezési forma, szemléltető, munkaeszközök bevonásával....)
- Mennyiben befolyásolja a tanulók aktív magatartását a pedagógus és a gyermekek közötti személyes kapcsolat?
- Aktivitás - Motiváció - Értékelés -
  szorosan összetartozó fogalmak. Kapcsolatukat nemcsak a pedagógiai irodalom, hanem az élet is igazolja.

500 óra töredéke annak a talán százezernél is több órának, amit csak a mi hospitálásaink idején tartottak.

Mi mégis hisszük, ez a kis tükör is segít majd meglátni a jót, a problémát, a javítanivalót.

Ajánlott irodalom

Az alkotó gondolkodás kutatási problémái. (Szerk: Salamon Jenő) AK Bp. 1979.

Bacher, F.: Hogyan értékelik a tanárok tanulóikat? Tan. nev. tud. köréből 1972--1974. AK Bp. 1975.

Bakonyi Pál: A tanulói aktivitásról. Köznevelés XVIII. évf. 1962. 4. sz.

Buzás László: A tanulók aktivizálásának egyes formái a reformpedagógiában, különös tekintettel a hazai új iskolára.

Cser Andor: Osztályozás a matematika tanításában. A Matematika Tanítás 1968. 1. sz.

Gádorné Donáth Blanka -- Hegedűs Gyuláné: A tanulók aktivizálhatóságának kérdése egy neveléslélektani vizsgálat tükrében. Pszich. Tan. XI. AK Bp. 1968.

Horányi Péterné: A tanulók aktivizálásának újabb kísérletei. A Kémia Tanítása. 1963. 5. sz.

Horváth Lajos: A tanulók aktív részvételének megvalósulása az új anyag feldolgozásában. Tan. nev. tud. köréből 1961. AK Bp. 1962.

Kelemen László: Pedagógiai pszichológia TK Bp. 1981.

Dr. Kerékgyártó Imre: Aktivitás, önállóság, önnevelés. Módszertani közlemények 1975. 15. év. 3. sz.

Landau, E.: A kreativitás pszichológiája TK Bp. 1976.

Langer, S.: Szempontok a 7--15 éves gyermekek személyiségjegyeinek megítéléséhez. Pedagogik, 1976. 6. (OPKM Dok.)

Szokolay István: Az aktivitás elve mint általános pedagógiai alapelv. Tan. nev. tud. köréből 1961. TK Bp. 1962.

Szokolay István: Tanulmányok a tanulói aktivitás köréből. Tankönyvkiadó Bp. 1966.

Tihanyi Andor: A tanulók aktivitását serkentő tényezők az általános iskola alsó tagozatában. Tan. nev. tud. köréből. 1961. AK Bp. 1962.

Veczkó József: Vizsgálatok a pedagógusok gyermekismeretéről. Magy. Ped. 1980.

Zukovits Imre: A játékosság mint a tanulói aktivitást serkentő tényező. Magy. Ped. 1969. I.

Zukovits Imre: Az aktivitás serkentő tényezői az oktatásban. Tankönyvkiadó Bp. 1972.

OROSZ GYULÁNÉ

KÖZÖS ELEMEK LINEÁRIS REKURZIV SOROZATOKBAN

ABSTRACT: *(Common terms in linear recurrences).*

A second order linear reccursive sequence $G=G\left[A,B,G_0,G_1\right]=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ *is defined by the integers* A,B,G_0 *and* G_1 *and by the recursion* $G_n=A\cdot G_{n-1}+B\cdot G_{n-2}$ $(n>1)$. *We prove two-theorems.*

<u>*Theorem 1*</u>. *Let* D *and* p *be a fixed positive integer and a prime, respectively, such that neither* D *nor* D+p *is perfect square. Further let* a,b,c,d *be non-zero integers satisfying the equations* $a^2-Db^2=1$ *and* $c^2-(D+p)\cdot d^2=1$. *Then the sequences* $M(2a,-1,0,b)$ *and* $N(2c,-1,0,d)$, *apart from the zero initial terms, have at most two common terms if* p=2 *and at most four common terms if* p>2.

<u>*Theorem 2*</u>. *Shows a similar result if* D *is divisible by 8 and* p=16.

Legyen $G=G\left[A,B,G_0,G_1\right]=\left\{G_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ egy másodrendü lineáris rekurziv sorozat, amelyet az A,B,G_0,G_1 egész számokkal és a

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \qquad (n>1)$$

rekurziv formulával definiálunk. Legyenek α és β a sorozat

$$f(x) = x^2 - Ax - B$$

karakterisztikus polinomjának gyökei.

A továbbiakban feltesszük, hogy $|\alpha| \geq |\beta|$ és a sorozat nem degenerált, vagyis $AB \neq 0$, $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$ és α/β nem egységgyök. Ekkor $d = A^2 + 4B \neq 0$ is következik, hiszen $d=0$ esetén $\alpha/\beta=1$ adódna.

Jól ismert, hogy a sorozat tagjainak explicit előállitása

$$(1) \qquad G_n = \frac{q\,\alpha^n - e\,\beta^n}{\alpha - \beta},$$

ahol $q = G_1 - G_0\beta$ és $e = G_1 - G_0\alpha$

Továbbá igazolható, hogy

$$(2) \qquad |G_n| > c_1 \frac{|\alpha|^n}{n^{-c_0}}$$

ha $n > n_0$ ahol c_0 és n_0 a sorozat paramétereitől függő konstansok. Ha $d>0$ akkor α és β valós különböző abszolutértékü számok, $|\alpha| > |\beta|$, és igy (1)-ből $\lim_{n\to\infty} (\beta/\alpha)^n = 0$ miatt (2), illetve (2)-nél erősebb becslés is következik. Ha pedig $d<0$, vagyis ha α és β komplex számok, (2) következik C.L. Stewart eredményeiből (lásd például [13], Lemma 6.) (2)-ből következik, hogy minden nem degenerált G sorozatban tetszőleges xvalós szám esetén $|G_n|>x$, ha n elég nagy, igy a sorozatokban minden elem csak véges sok más elemmel lehet egyenlő. Ennél több is igaz. K.K. Kubota [7,8] bebizonyitotta, hogy egy sorozatban minden egész szám legfeljebb négyszer fordulhat elő elemként. Ezt az eredményt F. Beukers [1] javitotta, megmutatva, hogy néhány sorozattól eltekintve minden elem legfeljebb háromszor ismétlődhet a sorozatokban.

Hasonló probléma a különböző sorozatok közös elemeinek vizsgálata. Többen foglalkoztak olyan másodrendü lineáris rekurziv sorozatok közös elemeivel, amelyeket ugyanazok az A,B konstansok definiálnak, de nem ekvivalensek, vagyis az egyik nem csak az indexek egy lineáris transzformációjával különbözik a másiktól. G.Revuz [12] egy általános tételéből következik, hogy ha a G és H a fenti tulajdonságu különböző rekurziv sorozatok közös elemeik száma, vagyis a $G_x=H_y$ egyenlet (x;y) megoldásainak száma véges, vagyis található egy m_0 konstans ugy, hogy $G_x \neq H_y$, ha $x>m_0$. Az m_0 konstans explicit értékére Fibonacci tipusu sorozatok esetén (vagyis az A = B = 1 esetben) M.D. Hirsch [3], tetszőleges, de d>0 feltételt kielégitő sorozatok esetén pedig P.Kiss [5] adott becslést.

Különböző konstansokkal definiált $G\left(A_1,B_1,G_0,G_1\right)$, $H\left(A_2,B_2,H_0,H_1\right)$ sorozatok közös elemeivel, vagyis a $G_x=H_y$ egyenlet megoldásaival is többen foglalkoztak. M. Mignotte [10] és P. Kiss [4] magasabbrendü lineáris rekurziv sorozatokra nyert eredményeiből következik, hogy $A_i^2+4B_i>0$ (i=1,2) esetén a G és H sorozatoknak csak véges sok közös elemük lehet. Ezen közös elemek számára F. Mátyás [9] adott explicit felső becslést.

Az előző eredményekben a közös elemek számára adott korlátok általában igen nagyok, számitógépekkel sem elérhető számok. Ezért érdekesek azok a speciális esetek, melyekben a közös elemek száma elérhetően kicsi.

J. Binz [2] a G(6, -1, 1, 6) és H(10, -1, 1, 10) konkrét sorozatok esetében bebizonyitotta, hogy a G és H sorozatoknak csak egy közös elemük van.

A következőkben J. Binz eredményét általánositjuk. Sorozatpárok egy osztályára mutatjuk meg, hogy az egyes pároknak legfeljebb kettő, illetve négy közös elemük lehet.

Két tételt bizonyitunk.

1. TÉTEL. Legyen D egy rögzitett pozitiv egész és p tetszőleges primszám, amelyekre sem D, sem $D+p$ nem teljes négyzet. Legyenek továbbá a,b,c,d olyan nullától különböző egész számok, melyekre:

$$a^2 - Db^2 = 1 \qquad \text{és}$$
$$c^2 - (D+p)d^2 = 1$$

Ekkor az $M = M(2a, -1, 0, b)$ és $N=N(2c, -1, 0\ d)$ sorozatoknak a 0 kezdőtagoktól eltekintve $p=2$ esetén legfeljebb kettő, $p>2$ esetén pedig legfeljebb négy közös elemük lehet.

2. TÉTEL. Legyen L egy rögzitett 8-cal osztható pozitiv egész szám, amelyre sem L, sem $L+16$ nem négyzetszám. Legyenek továbbá r,s,k,t olyan nullától különböző egész számok, melyekre

$$r^2 - Ls^2 = 1 \qquad \text{és}$$
$$k^2 - (L+16)t^2 = 1$$

Ekkor a $H=H(2r, -1, 0, s)$ és $K=K(2k, -1, 0, t)$ sorozatoknak a 0 kezdőtagtól eltekintve legfeljebb két közös elemük lehet.

Megjegyzések:

1. Megjegyezzük, hogy végtelen sok a,b,c,d illetve r,s,k,t egész szám található, melyek a feltételeket kielégitik, hiszen az $x^2-dy^2=1$ Pell egyenletnek, ha $d>0$ és nem négyzetszám, végtelen sok egész $(x;y)$ megoldása van.
2. A 2. Tételből az $L=8$ speciális esetben következik J. Binz említett eredménye. Ugyanis erre az értékre pontosan a $G(6, -1, 1, 6)$ és $H(10, -1, 1, 10)$ sorozatok közös elemeit határozzuk meg.

3. A bizonyitásokból kitünik, hogy lehetne a tételeinkhez hasonlókat konstruálni, a közös elemek számára azonban általában nagyobb felső korlát adódna.

1. TÉTEL BIZONYITÁSA. Először megmutatjuk, hogy az M sorozat minden M_n eleméhez található egy x egész szám ugy, hogy $(x;y)=(x;M_n)$ egy megoldása a

(3) $$x^2 - Dy^2 = 1$$

egyenletnek. Mivel $(x;y)=(a;b)$ a feltételek miatt megoldása (3)-nek, ezért az

(4) $$x_n+y_n\sqrt{D} = \left(a+b\sqrt{D}\right)^n \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

egyenlőséggel definiált $\left(x_n;y_n\right)$ párok is megoldások, hiszen ezekre

$$x_n^2-Dy_n^2 = \left(x_n+y_n\sqrt{D}\right)\left(x_n-y_n\sqrt{D}\right) =$$

$$= \left(a+b\sqrt{D}\right)^n\left(a-b\sqrt{D}\right)^n = \left(a^2-Db^2\right)^n = 1$$

Másrészt (4)-ből

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\left(a+b\sqrt{D}\right)^n - \left(a-b\sqrt{D}\right)^n\right]$$

következik. Az M sorozat esetében a karakterisztikus polinom $x^2-2ax+1$, gyökei pedig a feltételek miatt

$$\alpha = a + \sqrt{a^2-1} = a + b\sqrt{D}$$

illetve $\quad \beta = a - b\sqrt{D}$,

és igy $M_0=0$, $M_1=b$ és $\alpha-\beta=2b\sqrt{D}$ miatt (1) alapján $y_n=M_n$ következik, hiszen esetünkben $A^2+4B=4a^2-4\neq 0$. Ebből már következik az állitásunk.

Hasonlóan látható be, hogy az N sorozat minden N_k

tagjához található egy z egész szám, ugy hogy $(z;y)=\left[z;N_k\right]$ egy megoldása a

$$z^2-(D+p)y^2=1$$

egyenletnek.

Tehát ha vannak az M és N sorozatoknak közös elemeik, akkor az

$$(5)\qquad \begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= 1 \\ z^2 - (D+p)y^2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek legalább annyi $(x;y;z)$ egész számhármas megoldása van, amennyi a különböző közös elemek száma. Elég tehát azt bizonyitani, hogy az (5) egyenletrendszernek legfeljebb két megoldása van $y\neq0$ feltétellel.

Tegyük fel, hogy (x,y,z) egy megoldása (5)-nek. Ekkor

$$x^2-Dy^2=z^2-(D+p)y^2$$

és igy

$$(6)\qquad x^2+py^2=z^2 \ ,$$

továbbá nyilván $(x,y)=(z,y)=1$ ezért $(x;y;z)$ a (6) egyenlet páronként relativ prim, primitiv megoldása. $(x,z)>1$ esetén $p|(x^2,z^2)$ és $p|y$ következne, ami ellentmond az előzőeknek.

Először azt az esetet vizsgáljuk, ha $p=2$, ekkor (4)

$$(7)\qquad x^2+2y^2=z^2$$

alaku belátható, hogy (7) primitiv megoldásai

$$x = |u^2-2v^2| \ , \qquad y=2uv, \qquad z=u^2+2v^2$$

alakuak, ahol u,v relativ prim egészek és u páratlan. Ezeket az értékeket (5) első egyenletébe irva

$$\left(u^2-2v^2\right)^2 - 4Du^2v^2 = 1$$

adódik, ami

$$(8)\qquad \left(u^2-(2+2D)v^2\right)^2- \left(8D+4D^2\right)v^4 = 1$$

alakra hozható. De ismert, hogy az $x^2-Dy^4=1$ alaku diofantikus egyenletnek, ha $D>0$ és D nem teljes négyzet, legfeljebb két megoldása van (lásd Mordell [11], 270. oldal), ezért legfeljebb két $(u;v)$ párra teljesülhet (8) ugyanis $8D+4D^2=(2D+2)^2-4$ nem teljes négyzet. Ebből azonban az következik, hogy az (5) egyenletrendszernek is $p=2$ esetén legfeljebb két megoldása van, amiből az előzőek miatt következik a tétel állitása a $p=2$ esetben.

A következőkben azzal az esettel foglalkozunk, amikor $p>2$ primszám. Az előzőek alapján tudjuk, hogyha $(x;y;z)$ egy megoldása az (5) egyenletrendszernek akkor (6) is fennáll és $(x;y;z)$ egy primitiv megoldása (6)-nak. Itt is bizonyitható az ismert Pitagoraszi egyenlet megoldásához hasonlóan, hogy a (6) primitiv megoldásai, $p>2$ esetén

(9) $$x = \left| pm^2-n^2 \right| \quad ; \quad y=2mn \quad ; \quad z=pm^2+n^2$$

vagy

(10) $$x = \left| \frac{pu^2-v^2}{2} \right| \quad ; \quad y=uv \quad ; \quad z=\frac{pu^2+v^2}{2}$$

alakuak, ahol $(m,n)=1$ és különböző paritásu egész számok és $(u,v)=1$, páratlan egész számok. Beirva ezeket az (5) egyenletrendszer első egyenletébe (9) esetén

$$\left(pm^2-n^2\right)^2 - 4Dm^2n^2 = 1$$

mig a (10) esetében

$$\left(\frac{pu^2-v^2}{2}\right)^2 - Du^2v^2 = 1$$

adódik. Ezek azonban

(11) $$\left[n^2-(p+2D)m^2\right]^2 - \left[4D^2+4pD\right]m^4 = 1$$

és

$$(12) \qquad \left[\frac{v^2-(p+2D)u^2}{2}\right]^2 - \left[D^2+pD\right]u^4 = 1$$

alakra hozhatók, ahol belátható, hogy sem $4D^2+4pD$, sem D^2+pD nem teljes négyzet. De (11) és (12) egyenleteknek mint már láttuk, legfeljebb 2-2 megoldásuk lehet, igy az (5) egyenletrendszernek legfeljebb négy egész megoldása lehet. Ebből már következik a tételünk $p>2$ esetre vonatkozó állitása.

<u>2. TÉTEL BIZONYITÁSA</u>. Az előző tétel bizonyitásában követett gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy ha vannak a H és K sorozatoknak közös elemeik, akkor a

$$(13) \qquad \begin{aligned} x^2-Ly^2 &= 1 \\ z^2-(L+16)y^2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek legalább annyi $(x;y;z)$ egész megoldása van, amennyi a közös elemek száma. Tegyük fel, hogy $(x;y;z)$ megoldása a (13) egyenletrendszernek. Ekkor ezekre az x,y,z egészekre

$$(14) \qquad x^2+16y^2 = z^2$$

is fennáll és L párossága miatt könnyen igazolható, hogy $(x;y;z)$ a (14) páronként relativ prim, primitiv megoldása. Az viszont jól ismert, hogy (14) primitiv megoldásai

$$x = |m^2-n^2| \ , \quad 4y = 2mn \ , \quad z = m^2+n^2$$

alakuak, ahol m,n relativ prim egész számok és különböző paritásuak. Beirva ezeket az értékeket a (13) egyenletrendszer első egyenletébe felhasználva, hogy L alakja $L = 8h$ (h pozitiv egész, $h\neq 8$),

$$\left[m^2-n^2\right]^2 - 2\ hm^2n^2 = 1$$

adódik, ami

$$(15) \qquad \left[m^2 - (1+h)n^2\right]^2 - \left[h^2+2h\right]n^4 = 1$$

alakura hozható. De h^2+2h nem teljes négyzet, ezért, hasonlóan mint az 1. Tétel bizonyitásában, az állitásunk már következik.

IRODALOM

[1] F.Beukers, The multiplicity of binary recurrences, Comp. Math., 40 (1980), 251-267.

[2] J.Binz, Elemente der Math., 35 (1980), 155.

[3] M.D. Hirch, Additive sequences, Math., Mag, 50 (1977) 262.

[4] P.Kiss, On Common terms of linear recurrences Acta Math. Acad. Sci. Hungar 40 (1-2), (1982), 119-123.

[5] P.Kiss, Közös elemek másodrendü rekurziv sorozatokban. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola füzetei XVI. (1982), 539-546.

[6] P.Kiss, Differences of the terms of linear recurrences, Studia Scientiarum Mathematicarum Humgarica 20 (1985), 285-293.

[7] K.K.Kubota, On a conjecture of Morgan Ward I, Acta Arithm, 33 (1977), 11-28.

[8] K.K.Kubota, On a conjecture of Morgan Ward II, Acta Arithm, 33 (1977), 29-48.

[9] F.Mátyás, On common terms of second order linear recurrences, Mat.Sem. Not. (Kobe Univ. Jappan), 9 (1981), 89-97.

[10] M. Mignotte, Intersection des images de certaines suites recurrentes lineaires, Theoretical Comput. Sci, 7 (1978), 117-122.

[11] L.J.Mordell, Diophantine equations, Acad. Press, London, (1969).

[12] G.Revuz, Equations deiphantines exponentielles, Bull. Soc. Math. France, Mém., 37 (1974), 139-156.

[13] C.L.Stewart, On divisors of terms of linear recurrence sequences, J. reine angew, Math., 333 (1982), 12-31.

PELLE BÉLA

A MATEMATIKAOKTATÁS TOVÁBBFEJLESZTÉSÉRE ALAKULT BIZOTTSÁG -- SZENDREI-FÉLE BIZOTTSÁG -- TEVÉKENYSÉGÉNEK ÁTTEKINTÉSE

ABSTRACT: (The work of the committee founded for the improvement of teaching mathematics /Szendrei-committee/.) Twenty years ago, in 1968, the ministry founded the Szendrei-committee whose task was to work on the problems relating to the improvement of teaching mathematics. We would like to give a summary of the work of the committee for the anniversary.

During its short existence the committee had great success in making the teaching of mathematics more up-to-date. We think that our summary will help contemporary academics in writing up the history of mathematics.

1968-ban, húsz évvel ezelőtt a minisztérium megalakította a Szendrei-féle bizottságot. Ennek feladata a matematikaoktatás továbbfejlesztésével kapcsolatos tennivalók kidolgozása volt. Az évfordulóra egy összefoglalót kívánunk adni a bizottság munkájáról. Visszatekintve ma is úgy látjuk, hogy a bizottságnak rövid "élete" alatt érdemei vannak a matematikaoktatás korszerűsítésének kimunkálásában. Meggyőződésünk, hogy összefoglalónk segíti a későbbi kor kutatóit a matematikatanítás történetének feldolgozásában.

Az 1960-as években a matematikaoktatás továbbfejlesztése világszerte előtérbe került. A tudományok fejlesztésében élenjáró szakemberek egyöntetűen igényelték a matematikaoktatás továbbfejlesztését. Századunkban ugyanis nemcsak a matematika tudományának fejlődése, hanem a matematikának a hétköznapi életbe való bevonulása is rohamos. A matematika napjainkban ugyanolyan közvetlen termelőerővé vált, mit korábban a fizika, majd a kémia. Az iskolai matematika oktatásunk viszont nem felelt meg ezeknek az igényeknek, túlhaladott szemléletű volt világviszonylatban.

A nemzetközi és hazai törekvéseket figyelembe véve a Művelődésügyi Minisztérium a matematikaoktatás továbbfejlesztésének segítésére 1968. június 21.-i értekezletén létrehozott egy bizottságot. Elnöke dr. Szendrei János, titkára Nyilas Dezső, tagjai: Cser Andor, dr. Göndöcs László, Horvay Katalin, Merő László, dr. Molnár József, Pálmay Lóránt, dr. Pelle Béla, dr. Surányi János. A bizottság társadalmi szervezetként működött, mint az MM tanácsadó szerve. A munkája lényegét az alakuló ülés a korszerű szemléletű matematikaoktatás útjainak és módjainak keresésében, ezzel párhuzamosan a közvélemény (a szélesebb társadalmi és a szűkebb pedagógus közvélemény) megfelelő alakításában jelölte meg. Utalás történt arra, hogy a munka során születhetnek merész elképzelések is, amelyeket előnyben kell részesíteni a toldozgatás-foldozgatással szemben. A bizottság feladatait és munkamódszereit az alábbiakban részletezték. (1)

A bizottság feladatai:

- a matematikaoktatás hazai gyakorlatának elemzése;
- a hazai kísérletek tanulmányozása és elemzése;
- a külföldi törekvések és kísérletek tanulmányozása;
- a matematika tudomány fejlődéséből az iskolai matematikaoktatásra háruló konzekvenciák vizsgálata;
- irányelvek kialakítása a matematikaoktatás tartalmának korszerűsítésére;
- irányelvek kialakítása a matematikaoktatás módszerének korszerűsítésére;
- javaslat és program kialakítása kísérletekre, a kísérletek irányítása és értékelése;
- irányelvek kialakítása korszerű tanterv készítésére;
- irányelvak kialakítása korszerű tankönyvek, munkafüzetek, segédeszközök készítésére;
- irányelvek és programok kialakítása a pedagógusok továbbképzésére;
- javaslatok kidolgozása a matematikaoktatás korszerűsítéséből adódó feladatok érvényesítésére a pedagógusképzésben.

A bizottság munkamódszere:

- vita a hazai matematikaoktatás tapasztalatairól;
- vita a hazai kísérletek tapasztalatairól;
- vita a külföldi kísérletekről;
- új tervezetek, tanulmányok készítése és készíttetése, ezek vitája;
- publikálás a szaklapokban;
- szakértői tanácskozások és munkaértekezletek;
- albizottságok működtetése (szükség szerint);
- külföldi tanulmányutak kísérletek tanulmányozására;
- nemzetközi ajánlások tanulmányozása és vitája. (1)

A meghatározott program alapján a bizottság a következő feladatokat végezte el:

1. Elkészítette a matematikaoktatás korszerűsítését célzó nemzetközi törekvések összehasonlító és értékelő dokumentációját (2).

Az anyag rögzíti, hogy nemzetközileg igen széleskörű mozgalom, kísérletezés, hivatalos intézkedés (rendelkezés, párthatározat stb.) született a matematikaoktatás korszerűbbé tétele érdekében. Ezek egyrészét nemzetközi szervek (UNESCO, Nemzetközi Matematikai Unió) támogatják. A különböző irányzatok a sok eltérő vonás mellett számos közös jelleget is mutatnak. Ilyenek a következők:

- a matematika fejlődése és a gyakorlatban való alkalmazása mindenütt szükségletté tette a korszerűsítést;
- a tartalom és módszer egysége;
- a korszerű matematikai diszciplinák és szemlélet bevezetése;
- a korszerűsítés a legalsó foktól a legfelsőig egységesen valósítandó meg;
- a kísérleteket pedagógiai és pszichológiai vizsgálatokkal együtt kell végezni;
- sok akadályt jelent a szülők és pedagógusok konzervatizmusa;
- akadályozó az a szemlélet, hogy a matematika tanítása nem anyag- és pénzigényes.

2. A rendelkezésre álló dokumentációk, valamint látogatások alapján a bizottság megvizsgálta és elemezte a hazánkban folyó matematikaoktatás korszerűsítésével kapcsolatos kísérleteket. (3)

Véleményét az alábbiakban rögzítette:

a) Az OPI Matematika Tanszéke által irányított kísérlet a tantervtől eltérő, tartalmában és módszerében új feldolgozást kísérletez ki. Koncepciójában hazánkban -- sajnos -- az egyetlen, de nem egyedül lehetséges olyan kísérlet, amelyik a nemzetközi törekvésekhez mérhető.

b) A MTA Pszichológiai Intézetében folyó kísérletek közül a "Forrainé-féle kísérlet" elsősorban módszertani szempontból érdemel említést. A tanulók intenzív és önálló foglalkoztatása terén eredményes. A bizottság az alsó tagozatban folyó kísérlettel, a "dr. Lénárd-féle kísérlet"-tel nem értett egyet.

c) Dr. Ungváry Gyula által kezdett és irányított kísérlet a Német Demokratikus Köztársaságban folyó kísérletekből vett át bizonyos elemeket, azokat az I.--IV. osztályokra dolgozta át. Távlati koncepciója nincs.

3. A bizottság elkészített egy tervezetet a matematikatanítás korszerűsítése érdekében folyó kísérletek szélesítésére, teljesen új kísérletek bevezetésére, és a már folyó kísérleteket kiegészítő részkísérletekre. (4) A már folyó kísérletek szélesítésével kapcsolatban az a vélemény alakult ki, hogy az csak biztosított anyagi és személyi feltételek mellett engedélyezhető. Kívánatos a felsőbb osztályokban olyan átmeneti kísérletek bevezetése, amelyek az alsótagozatos tantervre épülnek, de a korszerűsítés bizonyos elemeit már tartalmazzák. Teljesen új kísérletek bevezetését nem látta szükségesnek. A bizottság javaslatot tett egy átmeneti matematikatanítási kísérletre és a pedagógusok továbbképzésére. (5)

4. Összegyűjtötte és áttekintette a bizottság a hazai, elsősorban a módszertani lapokban található cikkeket, amelyek a matematikatanítás kérdéseivel foglalkoznak.

5. Elfogadta a bizottság a hazai matematikaoktatás korszerűsítésében érvényesítendő alapelveket tartalmazó dokumentációt, amelyet egy albizottság állított össze. (6, 7)

Az anyag elemzi a korszerű matematikaoktatás feladatait. E témán belül rámutat többek között a korszerűsítés szükségességére, a matematikának az általános műveltségben betöltött szerepére, az életkori sajátosságokra, a matematika és a többi tárgy kapcsolatára, az osztályozás és ösztönzés kérdésére.

A korszerű matematikaoktatás útjainak elemzésénél szól az alapelvekről, óraszervezésről, a tanítás segédeszközeiről, a tantervről és tananyagról.

Kitér az anyag a megvalósítás feltételeire, tennivalókra, problémákra. Utal a tanítóképzés- és tanárképzésben megoldandó feladatokra, a továbbképzés megszervezésére, a külföldi törekvések figyelemmel kísérésére, a tárgyi feltételek biztosítására.

6. A korszerűsítés alapelveit szem előtt tartva a bizottság javasolta a Pedagógusképző Osztály mellett működő szakbizottságnak, hogy a pedagógusképzés korszerűsítésénél vegyék figyelembe a matematikaoktatás korszerűsítésével kapcsolatosan leszűrt külföldi és hazai tapasztalatokat, és a pedagógusjelölteket a jelenlegi tantervi követelményekre való felkészítés mellett készítsék elő a várható feladatokra.

Mivel a legnagyobb nehézség az alsó tagozatnál várható, a bizottság elkészítette a tanítók továbbképzésével foglalkozó terveket. Ez kiterjed a továbbképzés tartalmára, formájára, a szervezési és pénzügyi kérdésekre. (8)

7. A bizottság elkészített és elfogadott egy anyagot, amely a propaganda munka irányát, eszközeit és módszereit tartalmazza. (9) A propaganda munkát az indokolja, hogy a korszerűsítés egészen új szemléletet kíván meg mind a pedagógustól, mind a szülőktől. E munkában a pedagógusképző intézményeken kívül fontos szerep jut a könyvkiadóknak, társadalmi és kulturális szervezeteknek, rádiónak, televíziónak stb. A bizottság a Tankönyvkiadó segítségét kérte olyan szakköri füzetek, tankönyvek, segédkönyvek

stb. megjelentetésében, amelyek szakmailag, pedagógiailag, didaktikailag korszerűek, és előmozdítják a matematikaoktatás előrehaladását.

8. A bizottság az OPI, az Egri Tanárképző Főiskola és a Szegedi Tanárképző Főiskola matematika tanszékeivel összeállíttatott egy-egy kísérleti tantervet az általános iskolák V.--VIII. osztályai számára. Ennek megvitatása után egy albizottság közreműködésével az OPI Matematika Tanszékén elkészült egy tantervi javaslat az általános iskolák I.--VIII. osztályai számára (10).

A bizottság 1970. június 26-án elemezte addigi tevékenységét, és javaslatokat tett a további feladatokra. Ezek a következők voltak (11):

"1. A bizottság által összeállított jelentősebb dokumentumokat nyilvánosságra kell hozni, hogy azok nyomán széles vita induljon meg.

2. A bizottság eddigi munkájára támaszkodva elő kell készíteni egy új általános iskolai matematikai tanterv lépcsőzetes bevezetését.

3. Kísérleteket kell indítani, illetve a meglévőket fokozatosan kiterjeszteni a felső tagozaton is, hogy minél több részleteredményről legyen tapasztalatunk egy új tanterv bevezetése előtt.

4. Bár az általános iskola egységet alkot a matematikaoktatás szempontjából, mégis nagyon fontosnak tartjuk, hogy a középiskolák matematikaoktatásának korszerűsítését is magunk előtt lássuk az általános iskolai korszerűsített tanterv előkészítése előtt.

5. A pedagógusok továbbképzését, s különösen a tanítók (s óvónők) ilyen irányú szervezett továbbképzését sürgősen meg kell indítani.

6. A matematikatanítás korszerűsítését elősegítő taneszközöknek és szemléltető eszközöknek a készítését reális áron biztosítani kell.

7. Kívánatos olyan könyvtár kijelölése, amelyik a matematikaoktatás kör-

déseivel foglalkozó, egyre terebélyesedő nemzetközi irodalmat gyűjti, s az érdeklődőkhöz eljuttatja.

8. Szoros együttműködés kiépítését kell kezdeményezni a szocialista országok között a matematikatanítás korszerűsítésében.

9. A matematikaoktatás korszerűsítését célzó, s mindinkább kiterebélyesedő munka szempontjait, fő feladatait a bizottság továbbra is folyamatosan elemzi, tanulmányozza és kidolgozza. A tervek megvalósítását, figyelemmel kísérését, ellenőrzését és az ezzel kapcsolatos szerteágazó feladatokat ellátni azonban szervezetten -- a külföldi példákhoz hasonlóan -- olyan intézet tudná, amely megfelelő számú munkatárssal rendelkezik, és amelynek ez kizárólagos feladata. Ilyen intézmény, illetve meglévő intézményben ilyen részleg létrehozása (pl. az OPI-ban, a MTA Matematika Kutatóintézetében) nálunk is szükséges."

A korszerűsítési bizottság rövid működése alatt igen intenzíven dolgozott és jelentőset alkotott. Az általa javasolt gondolatok nagyrésze a Művelődési Minisztérium irányításával megvalósult. A bizottság működését 1973-ban szüntette meg az MM azzal az indokolással, hogy a feladatát elvégezte.

Tevékenységéről bátran elmondhatjuk, hogy nélküle lassabban haladt volna az új tanterv kidolgozása és bevezetése. Talán ha tovább "él", megvalósul a tanítók és tanárok továbbképzésének szervezett rendje és tananyaga is, amelyen az új tantervek eredményességének sikere múlik. Biztos, hogy az új tantervekhez írandó tankönyvek és segédkönyvek megírásához is komoly segítséget tudott volna adni az alkotó csoport összeállításával, a témakörök megvitatásával stb.

A bizottság javaslatai között szerepelt olyan kísérlet elvégzése, amely az eddig végzett kísérletek tapasztalatai alapján olyan tanítási anyag és módszer összeállítását próbálja ki, amely országosan bevezethető. Ilyen irányú kísérlet volt Seres Béla "esztergomi kísérlete", majd pedig a kísérletképpen bevezetett ideiglenes tanterv.

Jegyzet

1. Emlékeztető a matematikaoktatás továbbfejlesztésére alakult bizottság értekezletéről. 1968. június 21. Általános Iskolai Osztály

2. Dr. Pelle Béla -- Dr. Rados Mihály: A matematika tanításának korszerűsítésére irányuló nemzetközi törekvésekről. (Kézirat)

3. Emlékeztető a matematikaoktatás továbbfejlesztésére alakult bizottság értekezletéről. 1969. május 14.

4. Merő László -- Dr. Pelle béla: Tervezet a matematikatanítás korszerűsítése érdekében folyó kísérletek szélesítésére, teljesen új kísérletek bevezetésére és a már folyó kísérleteket kiegészítő részkísérletekre. (Kézirat)

5. Cser Andor: Javaslat átmeneti matematikatanítási kísérletre és a pedagógusok továbbkézésére. (Kézirat)

6. Reményi Gusztávné -- Dr. Surányi János -- Varga Tamás: Tervezet a hazai matematikaoktatás korszerűsítésében érvényesítendő alapelvekre. (Kézirat)

7. Surányi János: A matematikatanítás korszerűsítésének néhány alapelve. (Új utak a matematika tanításában. 1. Néhány hazai és külföldi kísérlet. Tankönyvkiadó, 1972.)

8. Dr. Göndöcs László: Tervezet a tanítók matematika továbbképzésére. (Kézirat)

9. Pálfy Sándor -- Pálmay Lóránt: A propaganda munka terve a matematikaoktatás korszerűsítésével kapcsolatban. (Kézirat)

10. Tantervi javaslat az általános iskolák számára. Készült az OPI Matematika Tanszékén, a matematikatanítás korszerűsítésével megbízott dr. Szendrei János vezetésével működő bizottság 1970. júniusában beterjesztett javaslata alapján (Budapest, 1972. július.)

11. Beszámoló a matematikaoktatás továbbfejlesztésére alakult bizottság munkájáról. 1970. június 26. Általános Iskolai Osztály.

SZEPESSY BÁLINT

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ V.
(A VÉGES RENDÜ CIKLUSOKRÓL)

ABSTRACT: *(Remarks on iteration of real functions V.) A real valued function* $f(x)$, *defined on the closed interval* $[a,b]$, *is called iterational basic function if*

(i) $f(x)$ *is a continuous function at every inside points of the interval* $[a,b]$; *furthermore* $f(x)$ *is continuous on the right and on the left at point a and b respectively;*

(ii) $f(x)$ *maps the interval* $[a,b]$ *onto itself;*

(iii) *there is no subinterval of the interval* $[a,b]$ *where* $f(x)$ *is a constant function;*

For $i=0,1,2,\ldots$ *the function* $f_i(x)$, *defined by* $f_0(x)=x$ *and* $f_i(x)=f\left[f_{i-1}(x)\right]$ *for* $i>0$; *is called* i^{th} *iterated function of* $f(x)$. *We say a real number c is a fix point of* $f(x)$ *of order one if* $f(c)=c$, *furthermore c is a fix point of order r if* $f_r(c)=c$ *but* $f_n(c)\neq c$ *for* $n=1,2,\ldots,r-1$. *If c is a fix point of* $f(x)$ *of order r, then the numbers* $f(c)=c_1$, $f\left[c_1\right]=c_2,\ldots,f\left[c_{r-1}\right]=c$ *are also fix points of order r and the fix points* $c_1,c_2,\ldots,c$ *give a cycle of order r.*

In some earlier papers we gave conditions for $f(x)$ *if it has no fix point of order greater than two or*

four, furthermore we have studied iterational basic functions for which the orders of the cycles are unbounded (see SZEPESSY [9],[10],[11], and [12]).

In this paper we investigate iterational basic functions for which we have cycles of finitel order.

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ $(a<b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékü valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x)=$ constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon.

Az $f_0(x)=x$; $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f(f(x))$, ..., $f_n(x)=f\left[f_{n-1}(x)\right]$... függvényeket az $f(x)$ függvény nulladik, első, második, ..., n-edik (n-edrendü),... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az $f_n(x)$ $(n=2,3,...)$ függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal. (Ezt az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval könnyen bizonyithatjuk.)

Teljesülnek az $f_{n+m}(x)=f_n\left[f_m(x)\right]=f_m\left[f_n(x)\right]$ azonosságok is. Ha $[c,d]$ $(c<d)$ az $[a,b]$ szakasz egy részszakasza, akkor

pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele $[c,d]_1$. A $[c,d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c,d]_n=\left[[c,d]_{n-1}\right]_1$ intervallumot értjük.

Ha $f(c)=c$, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c)\neq c$ $n=1,2,3,\dots,r-1$ esetén, de $f_r(c)=c$; akkor a c pont az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja.

Ekkor, mint ismeretes az $f(c)=c_1$, $f\left(c_1\right)=c_2,\dots,f\left(c_{r-1}\right)=c$ pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok, s egy r-edrendű ciklust alkotnak.

Az első iterációelméleti rendszerező dolgozatok BARNA BÉLÁ-tól jelentek meg (lásd [1], [2], [3] és [4]). Azóta – dolgozatai kapcsán is – megnövekedett azok száma, akik iterációelméleti kutatásokat folytatnak, s egyre több eddig még nyitott kérdést tisztáznak.

Előbbi dolgozatokban ([9],[11]) azt a kérdést vizsgáltuk, hogy milyen iterációs alapfüggvény esetén nem lehet a fixpontok (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni. Bebizonyitottuk, hogy

1. Ha az $[a,b]$ szakaszban $f(x)$ az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus. Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek a tetszőleges magasrendű ciklus létezéséhez. Kiderült ugyanis, hogy

2. Ha $a\leq c<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(c)=c$, $f(d)=b$, továbbá van a $[d,b]$ szakasznak olyan részszakasza, amelyet $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszra képez le, akkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n-edrendű fixpontja.

Ezeknek a tételeknek az elégséges volta miatt kezdtük vizsgálni, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehet a ciklusok rendszámára felső korlátot adni ([10],[12]). Az említett dolgozatokban az alapfüggvényre olyan további feltételeket adtunk meg, amelyek mellett csupán első, másod, vagy negyedrendü fixpontok lehetnek.

Bebizonyitottuk egyebek mellett, hogy

3. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(a)=a$, $f(d)=b$, $f(b)\geq d$ és $x\in[a,d]$ esetén $x<f(x)<b$ valamint $f(x)$ a $[d,b]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a;b]$ szakaszban csak első és másodrendü fixpontok lehetnek.

Ehhez a tételhez analóg a következő állitás

4. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(b)=b$, $f(d)=a$, $f(a)\leq d$ relációk teljesülnek és $x\in[d,b]$ esetén $x>f(x)>a$, továbbá $f(x)$ az $[a,d]$ szakaszban monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban csak első és másodrendü fixpontok lehetnek.

5. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(a)=a$, $f(d)=b$, $f(b)=b_1<d$; $f_2(b)\geq d_{-1}$ $\left(d<d_{-1}<b\right)$ relációk teljesülnek és $a<x<d$ esetén $x<f(x)<b$, valamint $f(x)$ a $[b_1,d]$ szakaszban monoton növekvő, a $[d,b]$ -ben pedig monton csökkenő akkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendü fixpontok lehetnek.

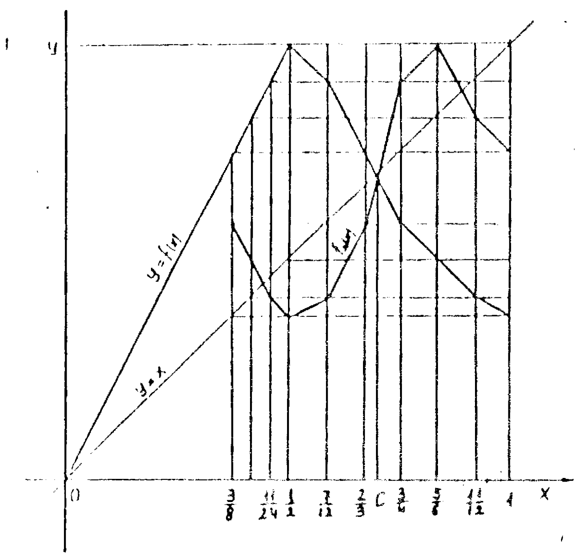
6. Legyen $a<d<b$ és $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(d)=a$; $f(b)=b$; $f(a)>d$; $f_2(a)\leq d_{-1}$ $\left(a<d_{-1}<d\right)$ és $d<x<b$ esetén $a<f(x)<x$ valamint $f(x)$ az $[a,d]$ szakaszban monoton csökkenő, a $[d;a_1]$ szakaszban monoton növekvő. Ekkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb negyedrendü fixpontok lehetnek.

Ebben a dolgozatban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek további véges ciklusok.

2. A véges rendü ciklusokról

Legyen a [0,1] szakaszban értelmezett iterációs alapfüggvény az

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ; \quad \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -x+\frac{3}{2} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{12} \\ -2x+\frac{25}{12} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{7}{12} \le x \le \frac{3}{4} \\ -x+\frac{4}{3} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{11}{12} \\ -\frac{x}{2}+\frac{7}{8} & ; \quad \text{ha} \quad \frac{11}{12} \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{(1. ábra)}$$



1. ábra

Itt a $c'=0$ és $c=\frac{25}{36}$ pontok elsőrendü fixpontok. A $\left[0,\frac{3}{8}\right]$ szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számu pontja van e szakaszban annak megfelelően, hogy az x_0 kezdőpontja a $\left[d_{-(i+1)};\ d_{-i}\right]$ $(i=1,2,\ldots)$ szakaszok melyikébe esik. Ezek a szakaszok ugyanis egyszeresen és teljesen lefedik a $\left[0;\frac{3}{8}\right]$ szakaszt; tehát van olyan x_j $(j>i)$ iterált pont, amely a $\left[\frac{3}{8};1\right]$ szakaszban esik. Ezt a szakaszt $f(x)$ önmagára képezi le; vagyis x_j minden iterált pontja ebben a szakaszban marad. Magasabbrendü fixpontok csak ebben a szakaszban léphetnek fel.

Az 1. ábrán megrajzoltuk az $f_2(x)$ iterált függvény képét is a $\left[\frac{3}{8};\ 1\right]$ szakaszban.

Tekintsük a $\left[\frac{3}{8},\ c=\frac{25}{36}\right]$, illetve a $[c,1]$ szakaszban az

$$f_2(x)=\begin{cases} -2x+\frac{4}{3} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{3}{8}\le x\le\frac{11}{24} \\ -x+\frac{7}{8} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{11}{24}\le x\le\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{8} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{12} \\ 2x-\frac{3}{4} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{7}{12}\le x\le\frac{2}{3} \\ 4x-\frac{25}{12} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{2}{3}\le x\le c \end{cases} ;$$

illetve

$$f_2(x)=\begin{cases} 4x-\frac{25}{12} & ;\quad \text{ha} \quad c\le x\le\frac{3}{4} \\ x+\frac{1}{6} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{3}{4}\le x\le\frac{5}{6} \\ -2x+\frac{8}{3} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{5}{6}\le x\le\frac{11}{12} \\ -x+\frac{7}{4} & ;\quad \text{ha} \quad \frac{11}{12}\le x\le 1 \end{cases}$$

függvényt iterációs alapfüggvénynek. Mivel $f_2(x)$ ezeket a szakaszokat önmagára képezi le és ezekben $f(x)>c$ illetve $f(x)<c$ $(x\neq c)$, ezért elsőrendünél magasabb rendü páratlan rendszámu fixpontok a szóbanforgó szakaszokban, s igy a $\left[\frac{3}{8};\ 1\right]$ szakaszban nem léphetnek fel.

Mivel a $f_2(x)$-re a $\left[\frac{3}{8};\ c\right]$ szakaszban a bevezetőben is emlitett 6. tétel feltételei teljesülnek, ezért $f_2(x)$-nek ebben a szakaszban legfeljebb negyedrendü fixpontjai lehetnek. A $[c,1]$ szakaszban $f_2(x)$-nek az 5. értelmében szintén legfeljebb negyedrendü fixpontjai lehetnek. A $\left[\frac{3}{8};\ c\right]$ szakaszban pl. az $x_1=\frac{1}{2}$; a $[c,1]$ szakaszban az $x_2=1$ pont $f_2(x)$-nek negyedrendü, s igy $f(x)$-nek nyolcadrendü fixpontjai.

Tehát $f(x)$ iterációs alapfüggvénynek a $[0,1]$ szakaszban csak első, másod, negyed és nyolcadrendü fixpontjai lehetnek.

Ez a példa is arra enged következtetni, hogy teljesül ([10] ill. [12] harmadik illetve első tételeinek), a bevezetőben is emlitett 3. és 5. tételek következő általánositása.

<u>TÉTEL</u>. Ha $a<d<b$ és $f(x)$ olyan iterációs alapfüggvény az $[a,b]$ szakaszban, amelyre $f(a)=a$, $f(d)=b$ és létezik olyan n (természetes) szám, amelyre $f_{2^n}(b)\geq d_{-(2^n-1)}$, de $f_{2^i}(b)<d_{-(2^i-1)}$; $(0\leq i<n)$ teljesül, valamint $a<x<d$ esetén $x<f(x)<b$ és $f(x)$ az $[f(b),d]$ szakaszban monoton növekvő, a $[d,b]$-ben pedig monoton csökkenő, akkor az $[a,b]$ szakaszban legfeljebb 2^{n+1}-rendü fixpontok lehetnek.

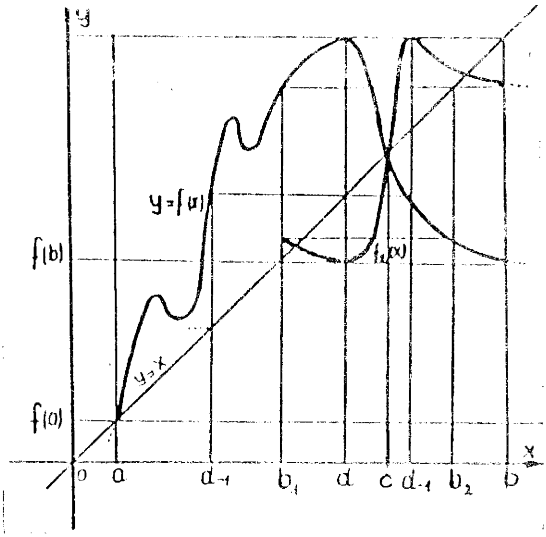
Megjegyzés: amint az már ismeretes $d_{-(2^n-1)} = \max_{x \in [d,b]} \{x\}$; $f_{2^{n-1}}(x) = d_{-(2^{n+1}-1)}$, azaz $d_{-(2^n-1)}$ a legnagyobb abszcisszaérték a $[d,b]$ szakaszban, amelyre $f_{2^{n-1}}(x)$ függvény $d_{-(2^{n-1}-1)}$ értékü.

BIZONYITÁS. Teljes indukcióval: $n=0$ esetén ([10] 3. tétele); $n=1$ esetén is (SZEPESSY, 1987 1. tétele); igaz a tétel állitása. Az $n=2$ esetre egy speciális példát az előzőekben elemeztünk.

Tegyük fel, hogy $n=k-1$ esetén igaz (indukciós feltevés), bebizonyitjuk, hogy $n=k$ esetén is igaz a tétel állitása.

Mivel az $[a,f(b)]$; $(f(b)<d)$ szakasz bármely x_0 pontjának iteráltjai nagyobbak mint x_0, ezért a szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számu pontja marad ebben a szakaszban, s ez legfeljebb i, ha a kezdőpont a $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ szakaszba esik. A $\left[d_{-(i+1)}, d_{-i}\right]$ $(i=0,1,2,\ldots)$ szakaszok egyszeresen és teljesen lefedik az $(a,f(b)]$ szakaszt; van tehát olyan x_j $(j>i)$ iterált pont, amelyik az $\left[f(b)=b_1, b\right]$ szakaszba esik. (A lefedés teljessége már (SZEPESSY; 1987) bizonyitást nyert.) A $[b_1,b]$ szakaszt $f(x)$ önmagára képezi le, vagyis x_j minden iterált pontja ebben a szakaszban marad. Tehát magasabbrendü fixpontok is csak ebben a szakaszban lehetnek.

Tekintsük $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek a $[b_1;b]$ szakaszon. (2. ábra)



2. ábra

A $f_2(x)$ függvény a $[b_1, d]$ és a $[d_{-1}, b]$ $(d_{-1} \in [d, b])$ szakaszban monoton csökkenő és egy-egy pontban metszi az átlót, a $[d, d_{-1}]$ szakaszban monoton növekvő, ezért abban lehetnek másodrendü fixpontok.

Ha a $[d, d_{-1}]$ intervallumban vannak másodrendü fixpontok, akkor legyen $e = \sup\limits_{d<x<d_{-1}} x, \; f_2(x)=x$. Az $[f(e)=e_1, e]$ szakaszban az $f_2(x)$-nek ([10] 1. tétel) csak elsőrendü fixpontjai lehetnek, amelyek f(x)-nek legfeljebb másodrendü fixpontjai. Az $[e, b]$ szakaszban $f_2(x)$-nek mint iterációs alapfüggvénynek (az indukciós feltevés következtében) legfeljebb 2^k-rendü fixpontjai léphetnek fel, ami azt jelenti, hogy f(x)-nek az $[e, b]$ szakaszban legfeljebb 2^{k+1}-rendü fixpontjai lehetnek.

Ezzel bebizonyitottuk, hogy az $[e,b]$ szakaszban igaz a tétel állitása.

A $\left[b_1, e_1\right]$ szakaszban sem lehet 2^{k+1}-rendünél magasabbrendü fixpont; mert ha $\hat{c}$ r-edrendü $r>2^{k+1}$ fixpont - állitásunkkal ellentétben -, akkor $f(\hat{c})=\hat{c}_1$ ($\in [e;b]$) is az, ami az előzőek szerint lehetetlen.

Ha a $\left[d,\ d_{-1}\right]$ szakaszban nincs másodrendü fixpont, akkor a $\left[b_1;\ c\right]$ és a $[c,b]$ szakaszokban (c a $[d,b]$ szakaszban található egyetlen elsőrendü fixpont), a bizonyitás az előzőekhez hasonlóan végezhető el.

Ezzel a bizonyitást befejeztük.

Az eddigi eredmények alapján konstruálhatóak olyan iterációs alapfüggvények, amelyekre a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos, valamint olyanok is, amelyekre a ciklusok rendszáma véges szám.

IRODALOM

[1] B. Barna, über die Iteration reeller Funktionen I, Publ. Math. (Debrecen), 7, (1960), 16-40.

[2] B. Barna, über die Iteration reeller Funktionen II, Publ. Math. (Debrecen), 13, (1966), 169-172.

[3] B. Barna, Berichtigung zur Arbeit "über die Iteration reeller Funktionen II." Publ. Math. (Debrecen), 20, (1973), 281-282.

[4] B. Barna, über die Iteration reeller Funktionen III, Publ. Math. (Debrecen), 22, (1975), 269-278.

[5] L. Berg, (Rostock) Über irregulare Iterations - folgen. Publ. Math. (Debrecen), 17, (1970), 112-115.

[6] A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Grax - Hill Inc.) New York, 1965.

[7] A. Björek - G. Dahlqist, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) München - Wien, 1972.

[8] J. Stoer, Einfürhrung in die numerische Mathematik I. (Springer), Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

[9] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához I. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV. (Eger, 1979), 395-405.

[10] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához II. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVI. (Eger, 1982.), 557-566.

[11] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához III. (A tetszőleges magasrendü ciklusokról) Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVII. (Eger, 1984.), 835-843.

[12] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához IV. (A negyedrendü ciklusokról) Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVIII/11. (Eger, 1987.), 41-53.

TARTALOMJEGYZÉK