A MATEMATIKA HELYE A TUDOMÁNYOK RENDSZERÉBEN

DR. PERGE IMRE

(Közlésre érkezett: 1971. október 25.)

1. A filozófia és a matematika

A matematika és filozófia kapcsolata sokrétű. E sokrétűség alapját talán a mindkét tudományban meglevő általánosságra való törekvésben kell keresnünk. A filozófia ugyanis a valóság egészét, nem pedig valamely speciális szakterületét vizsgálja és éppen ez az egyik jellegzetes vonása, amely megkülönbözteti a szaktudományoktól. Hasonlóan a matematika is bizonyos tekintetben a valóság egészét vizsgálja. A matematika is általános és egymástól igen távoleső területeken érvényes közös összefüggéseket tár fel. Érthető tehát, hogy a filozófia mindig komoly érdeklődést tanúsított a matematika iránt és mindig igyekezett a matematika eredményeit a maga rendszerébe beépíteni.

Az ókorban a tudományok differenciálatlansága miatt az ókor filozófusai általában matematikusok is voltak. De még az újkor tudósai között is szép számmal találunk matematikus filozófusokat, Newton, Leibniz, Descartes és még sokan mások. A XIX. és XX. század filozófusai is mélyrehatóan foglalkoztak a matematika filozófiai problémáival. Marx és Engels is nagy fontosságot tulajdonított a matematikának és részletesen kifejtették a dialektikus materializmus matematikával kapcsolatos álláspontját.

Ugyanakkor a matematikusok közül is számosan foglalkoztak a matematika filozófiai problémáival.

A *matematika* legfontosabb *filozófiai problémái* a következők:

a) Mi a matematika tárgya?
b) Min alapszik a matematika legkülönbözőbb területén való alkalmazhatósága?
c) Mi a jelentése a végtelen fogalmának a matematikában?
d) A matematika „eldönthetetlen" problémáinak filozófiai értékelése.

Nem célunk, hogy az itt felsorolt valamennyi problémára választ adjunk. Részletesebben foglalkozunk az első két probléma kapcsán a matematika tárgyával és helyével a tudományok rendszerében, a halmazelmélet filozófiai alkalmazásával. Végül röviden elemezzük a matematikai modellek szerepét is.

2. A matematika és a valóság viszonya

A matematika az objektív valóságot logikai formákban tükröző tudomány. Ez a megfogalmazás túl általános és jóformán csak annyit mond, hogy a *matematika: tudomány.* Kérdés azonban milyen tudomány? Miben különbözik a többi tudománytól és *mi a specifikuma?* Ez a matematika „első számú filozófiai problémája".

Hogy erre a kérdésre megfelelő választ adhassunk, szükséges megvizsgálni az idealista válaszok fő ismeretelméleti és metodikai forrásait is, melynek lényege, hogy a matematikát kész állapotában, nem pedig keletkezésében és fejlődésében vizsgálják.

A *logicizmus** erre a filozófiai problémára — ti. arra, hogy mi a matematika tárgya — így válaszol: *a matematika a logika része.* Tézisüket a következő módon bizonyítják.

1. Megvalósult a logika matematizálódása. (A matematikai logika megteremtésében a logicista iskola matematikusai kiemelkedő szerepet töltöttek be.)

2. Mivel a halmazelmélet segítségével az egész matematika felépíthető, így elegendő a halmazelméletet a matematikai logikából levezetni. Ezt a problémát nem alaptalanul úgy oldják meg, hogy a halmaz fogalmát ún. „osztály" elnevezéssel logikai fogalomnak tekintik.

A halmazelméletben felbukkant ellentmondások megszüntetésének realizálásánál azonban olyan posztulátumokat vettek fel bizonyításukhoz, amelyek logikai jellege erősen vitatható. De még ha vitathatatlan sikere lenne is az említett logicista állítás bizonyításának, az sem bizonyítaná a matematikai logika eredetét. Történelmi tény, hogy a *matematika kiinduló összefüggéseit és fogalmát az emberiség nem a gondolkodás* törvényeiből, hanem az *objektív valóságból,* az anyagi világból absztrahálta.

Más kérdés persze, hogy a matematika és a logika között bizonyos összefüggés van.

Egyrészt

a) A logika alaptörvényeit az ember az anyagi világra irányuló tevékenysége (gyakorlata) struktúrájából absztrahálta, s azokat be is tartja gondolkodása során, mert csakis így marad összhangban gondolkodása a valósággal. Az első matematika ismeretek is hasonlóan általános és jó közelítéssel természeti törvényű absztrakciói (aritmetika és geometria). A *logikában és a matematikában is közös az anyagi világból való eredet, a formális-absztrakt jelleg és a nagy területen való alkalmazhatóság.*

b) Másrészt a matematikának nélkülözhetetlen eszköze a logika. A tudományokkal és a termeléssel való szorosabb kapcsolata révén azonban sokkal gyorsabban fejlődött, mint a logika. Tulajdonképpen a matematika műve a modern matematikai logika megteremtése is.

Az *intuicionizmus,* amely filozófiailag szorosan kapcsolódik a kantionizmushoz — ez is azt vallja, hogy a matematika nem a valóságot tük-

---

*A logicizmus megalapítói Fregat és Russel. Az iskola közvetlen elődje Leibniz, mélyebb gyökerei Platonhoz nyúlnak vissza.

rözi, nem a tapasztalatból indul ki, hanem a matematikai *objektumokat maga a tudat hozza létre, konstruálja,* kizárólag a tudatban levő alapelemekből. Egy matematikai fogalom akkor létezik, ha a tudat azt megkonstruálja. Az intuicizmus szerint *a matematika a priori* és nyelv nélküli tudattevékenység, s mint ilyen, független a nyelvtől, a logikától és az érzéki tapasztalástól egyaránt.

A matematikai konstrukciók nem szorulnak sem tapasztalati, sem logikai igazolásra; *önevidensek*. Nem vitás, hogy az intuicizmus ezzel egyszerűen megszünteti a matematikát, mint tudományt.

Természetesen az említett idealista irányzatok mellett még számos más irányzat is létezik. Anélkül, hogy ezen irányzatokat részletesebben bírálnánk, megállapíthatjuk, hogy ha az említett szubjektivista hibákat el akarjuk kerülni, akkor a matematika fejlődését történetileg kell vizsgálnunk.

Ehhez Engels tette meg az első komoly lépést. *Engels „A természet dialektikájában"* a matematikát a csillagászattal és a mechanikával kölcsönhatásban vizsgálja és a három ősi tudományt a termelés szükségleteiből vezeti le. A geometria és az aritmetika az egyszerű mérés és számlálás szükségletéből alakult ki, amelyben már jól megmutatkozik a matematika tárgyának két lényeges vonása, a térformák és mennyiségi viszonyok vizsgálata. Ez azonban még mindig nem a matematika specifikuma, mivel pl. a testek térbeli alakjait és összefüggéseit a geometrián kívül még más tudományok is vizsgálják (asztronómia, geodézia, kristálytan stb.). A geometria abban különbözik ezektől a tuodmányoktól, hogy az anyagi tárgyak, konkrét anyagi tartalmától teljesen absztrahált formáit és térviszonyait vizsgálja.

Továbbá az anyagi világ mennyiségi viszonyaival sem csak az aritmetika foglalkozik, hanem pl. a kvantitatív kémiai analízis és fizika is, de ezek mindig konkrét kémiai vagy fizikai anyagi jelenségeket kutatnak. Az aritmetika viszont, hasonlóan a geometriához, absztrahál a konkrét anyagi tartalomtól és „tiszta" számokkal operál.

Fejtegetéseinket és a dialektikus materializmus álláspontját még ma is F. Engels szavai foglalják össze legtömörebben: „. . . semmi esetre sem foglalkozik a tiszta matematikában az értelem pusztán a saját teremtményeivel és imaginációival. A szám és az alakzat fogalmait sehonnan máshonnan nem vettük, mint a valóságos világból. A tíz ujj, melyeken az emberek a számolást, tehát az első számtani művelet végrehajtását megtanulták, akármi más lehet, csak az értelem szabad teremtménye nem. A számláláshoz nemcsak megszámlálható tárgyak kellenek, hanem már az a képesség is, hogy e tárgyak szemügyre vételekor minden egyéb tulajdonságuktól el tudjunk tekinteni a számokon kívül — e képesség pedig hosszú történelmi, tapasztalati fejlődés eredménye. Ahogy a szám fogalmát, úgy az alakzat fogalmát is kizárólag a külvilágból kölcsönözzük, s nem a fejben a tiszta gondolkodásból keletkezett. Kellett, hogy legyenek dolgok, amelyeknek alakjuk volt és amelyeknek alakját összehasonlították, mielőtt az alakzat fogalmára jutottak. *A tiszta matematika tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonyai, tehát nagyon reális anyag alkotja.* Hogy ez az anyag felettébb elvont formában jelenik meg, az a külvilágból való eredetét csak felületesen fedheti el. Hogy ezeket a formákat és viszonyokat a maguk tisztaságában vizsgálhassuk, ahhoz azonban teljesen el kell őket választanunk tartalmuktól, s ezt mint közömböst, félre kell tennünk, így kapjuk meg a kiterjedés nélküli pontokat, a vastagság és szélesség nélküli vonalakat, az a-kat és b-ket és x-eket és y-okat, az állandókat és változókat... Akárcsak minden tudomány, a matematika az emberek szükségleteiből származott: a földmérésből és edények űrtartalmának méréséből, időszámításból és mechanikából. De akárcsak a gondolkodás valamennyi területén, a fejlődés egy bizonyos fokán a valóságos világból elvonatkoztatott törvényeket elválasztják a valóságos világtól, vele szembeállítják, mint önálló valamit, mint kívülről jövő törvényeket, amelyekhez a világnak igazodnia kell... így és nem másként alkalmazzák utólag a világra a tiszta matematikát, bárha éppen ebből a világból kölcsönözték, a világ összetételi formáinak csak egy részét alkotja — és éppen csakis emiatt alkalmazható egyáltalában..."

Idézetünk természetesen nem meríti ki, csupán megalapozza a dialektikus materializmus matematikára vonatkozó álláspontját.

A matematikát tehát mindenekelőtt az *absztrakció különlegesen magas foka* jellemzi. De ez az absztrakció is történetileg fejlődött erre a fokra. Általában négy nagy fejlődési szakaszt szoktunk megkülönböztetni. *Az ókorban az aritmetika és geometria* elemi foka létezett. Ennek a fejlődési szakasznak a végét, a matematika fejlődésében az első csomópontot a konkrét számokról az algebrai általánosításra való átmenet jelenti.

Ennek eredményeképpen fejlődik ki az *újkor* elején az *elemi matematika,* amelyet egy újabb csomópont zár le, amelyet Engels így említ: „A fordulópont a matematikában Descartes variabilis mennyisége volt. Ezzel bevonult a matematikába a mozgás és ezzel a dialektika és ezzel rögtön szükségessé vált a differenciál- és integrálszámítás is, melyet azonnal meg is kezdtek. Newton és Leibniz nagyjából befejezi, nem felfedezi."

A következő fejlődési fokon — a *XVII—XIX.* században — kiépülnek az *analízis, a differenciálegyenlet, a felsőbb algebra, a valószínűségszámítás alapjai* stb. E fejlődési szakasz végét, vagyis a modern matematikába való átmenet csomópontját az aritmetikában az imaginárius szám fogalmának reális, a valóságban gyökerező tartalma, illetve a geometriában a nem euklideszi geometriák felfedezése jelentette. E fordulóponttal kezdődik, a XIX. században, a modern matematika, amely századunkban fejlődött és fejlődik ma is kolosszális méretűvé. Ezek közül legfontosabb diszciplinák a nem euklideszi geometriák, a többdimenziós geometriák, csoportelmélet, funkcionálanalízis stb.

A *mai modern matematika leglényegesebb vonásait* a következőképpen lehetne jellemezni:

a) Tudatosan feladatul tűzi ki a mennyiségi viszonyok és a térbeli formák lehetséges típusainak tanulmányozását.
b) Az új fogalmak létrehozásánál egyre magasabb absztrakciót valósít meg.

c) A halmazelmélet bizonyos mértékig uralkodóvá válik.
d) A modern matematika elemzi saját magát, alapjait, bizonyítási és következtetési módszereit. A matematika kiemelkedő jelentőséget kap.
e) A modern matematika tárgya nemcsak az adott, hanem a lehetséges modellek tanulmányozása is [9].

3. A matematika és a szaktudományok

A matematika *alapvető ellentmondása,* hogy teljesen elvonatkoztat a vizsgált anyagi jelenségek tartalmától. De éppen ebben rejlik a matematika *fejlődésének legmélyebb oka* is. Az ellentmondás állandó megoldódása, vagyis az absztrakt matematikai elméletek gyakorlati alkalmazásának megtalálása útján, az absztrakt formának reális tartalommal való megtöltése és állandó újratermelődése a fejlődés oka. Ezen ellentmondás talaján jönnek létre, oldódnak meg és újulnak fel ismét, a matematika *többi ellentmondásai, a véges és végtelen, a folytonos és a diszkrét, az absztrakt és a konkrét* ellentmondásai stb. Ezek kényszerítik a „tiszta" matematikát állandóan új alkalmazásokra. A „tiszta" matematika így állandóan tagadja önmagát, mint a „tiszta" matematikát. A „tiszta" matematika csak az alkalmazott matematikában, csak azzal elválaszthatatlan kapcsolatban tudomány és a gyakorlat a „tiszta" matematika továbbfejlődésének a forrása. *Helytelen* lenne azonban a matematika fejlődésében is a *gyakorlat szerepét abszolutizálni.* A matematikát végső fokon a gyakorlat hozza létre és a gyakorlat igazolja. De vulgarizálás lenne ha minden lépését közvetlenül a gyakorlat ösztönzésének eredményeképpen fognánk fel. A matematikának is van bizonyos viszonylagos önállósága és önfejlődése. Ezért helyesen állapítja meg Alexandrov, hogy „tartalom szerint a matematikát tárgya határozza meg, de hatással vannak rá lényegében és végeredményben a termelés szükségletei is. Ez a matematika fejlődésének alapvető törvényszerűsége" [3].

A matematikának ezen viszonylagos önállóságával függ össze, hogy a matematikában „kétféle igazság" van.

Egyrészt matematikailag „igaz" az, ami logikai következménye a kiinduló axiómáknak és definícióknak.

Másrészt ismeretelméletileg és természetesen csak az a matematikai eredmény lehet igaz, amely híven tükrözi az objektív valóságot. Annak eldöntésére azonban, hogy igaz vagy nem igaz, azonban már nem a matematika feladata, hanem az ismeretelméleté.

Ez is egy *sajátos ellentmondása* a matematikának.

Nem kis problémát jelent ezek után meghatározni a *matematika helyét a tudományok rendszerében.* A tudományok csoportosításának objektív alapja lehet az anyag mozgásformáinak összefüggése. A mozgásformák klasszikus sora, ahogyan *Engels* felsorolja: mechanikai, fizikai, kémiai, biológiai és társadalmi mozgás. E mozgásformáknak megfelelnek a *mechanika, fizika, kémia, biológia és végül a társadalomtudományok.*

A tudományok mai fejlettségi szintje és rendkívüli differenciáltsága mellett azonban nem lehet elég az ilyen egyszerű „soralkotás".

Számos kísérlet van a mozgásformák differenciáltabb kidolgozására. Ezek zöme elsősorban a felosztás szempontjainak különbözősége miatt nem egyezik meg. Kedrov pl. a természeti mozgásformákat a következőképpen rendszerezi [4]:

TERMÉSZETI MOZGÁSFORMA

KVANTUMMECHANIKAI MOZGÁS	MAKROMECHANIKAI MOZGÁS
SZUBATOMFIZIKAI MOZGÁS → KÉMIAI MOZGÁS	→ GEOLÓGIAI MOZGÁS → MOLEKULÁRIS FIZIKAI MOZGÁS → BIOLÓGIAI MOZGÁS

Ez a rendszerezés alapot adhat a természettudományok egy felosztásához, de nem ad lehetőséget valamennyi tudomány csoportosítására.

A tudományok összességét az objektív valóság két nagy területe szerint *természet-*, illetve *társadalomtudományokra* szoktuk felosztani. Ezen kívül foglalnak helyet a valóság egészével, legáltalánosabb törvényszerűségeivel foglalkozó *filozófiai tudományok*. E tudományok három csoportján belül azonban még mindig nincs helye a matematikának. Ami a mozgásformákat illeti, ez természetes is, hiszen a matematika nem valamelyik mozgásformán belüli törvényszerűségeket tanulmányozza, hanem szinte valamennyi mozgásformát, átfogó módon kutatja a mozgások törvényszerűségeit. Jól ismert, hogy a matematika alkalmazási területei az utolsó néhány évtized során rendkívül megnövekedtek. Szinte minden tudományban igyekeznek a matematikai módszerek adta lehetőségeket felhasználni. A tudományos kutatás területén mind elterjedtebb az a törekvés, hogy a törvényszerűségeket a matematika módszereivel tárják fel, annak nyelvén fejezzék ki, a termelés különböző ágaiban pedig matematikai módszerekkel igyekeznek gazdaságos eljárásokat kidolgozni. Nem lehet ez alól kivétel a filozófia sem, ilyen fegyvert nem dobhat el, viszont fordítva, a matematika is rendkívül közvetlenül kell hogy kapcsolódjon a filozófiai tudományokhoz továbbra is.

A matematikának ez a behatolása a tudományok és a gyakorlati élet minden területére, elsősorban az iparilag fejlett országokban öltött igen nagy méretet, vagyis közvetlenül kapcsolódik a tudományos technikai forradalomhoz.

Bizonyos mértékig tehát a matematika általánosabb szinten mozog, mint a természettel, illetve a társadalommal foglalkozó szaktudományok. Ez abból fakad, hogy a *természet- és társadalomtudományok* többnyire csak *primér absztrakciókkal* foglalkoznak, ugyanis az anyagi folyamatok közvetlen tükrözésével.

A *matematika* viszont absztrakt fogalmak absztrakcióival és általánosításaival, vagyis *secunder és annál magasabb absztrakciókkal* foglalkozik.

A *matematika* tehát egy bizonyos szempontból, amely tárgyából következik, átfogja az egész anyagi valóságot. A matematika a három fő tudomnáycsoporthoz való viszonyában eredetét tekintve, közvetlen kapcsolatban áll a természettudományokkal, de ő maga *nem természettudomány.* Könnyen belátható, hogy *nem is társadalomtudomány.*

Ezek után tehát a filozófiai tudományok közé kell besorolni? Nyilván nem, mert bár bizonyos vonatkozásban átfogja az anyagi valóságot, de ez nem a legáltalánosabb, közös törvényszerűségek és kategóriák vonalán történik. Ugyanakkor a matematikától a filozófia felé a matematikai logika és a formális logika közvetítésével egyenes út vezet.

A matematika tehát ilyen értelemben a szaktudományok és a filozófiai tudományok között foglal helyet, hiszen mindkettőhöz közvetlenül kapcsolódik egy bizonyos szinten. További kérdés persze, hogy a *matematika szintjéhez hasonló* tudomány van-e még. Sok szempontból hasonló a helyzet a *kibernetikában* is, amely tudomány rendkívül szorosan kapcsolódik a matematikához. A matematika lényege is éppen az, hogy mindenféle eddig ismert mozgásformára alkalmazható.

Mindezek alapján, az elvontság átfogó jellegét, az általánosítás, az anyagi valóság konkrét jelenségeitől való nagyobb távolságot tekintve, a tudományok rendszerét a következőképpen vázolhatjuk:

FILOZÓFIAI TUDOMÁNYOK

MATEMATIKA ———— KIBERNETIKA . . .

TERMÉSZETTUDOMÁNYOK				TÁRSADALOMTUDOMÁNYOK	
FIZIKA	KÉMIA	BIOLÓGIA	. . .	TÖRTÉNELEM	NYELV . . .

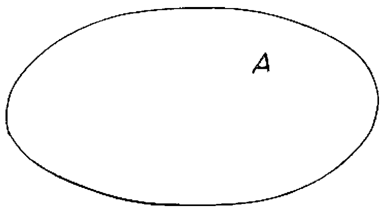
A sémát természetesen nem tekintjük és nem is tekinthetjük teljesnek. Egyrészt nem zárható le a matematika és kibernetika szintje, noha jelenleg nem ismeretes több ilyen szintű átfogó tudomány. Másrészt a szintek még tovább is bonthatók, hisz vannak olyan átfogó jellegű tudományok is, amelyek nem egy, nem is minden, de több mozgásformát összefognak.

4. A halmazelmélet elemeinek alkalmazása a filozófiában

A következőkben megkíséreljük a halmazelmélet elemeinek, illetve alapjainak rövid ismertetése után ezt a filozófiára konkretizálni.

A halmaz fogalma a dolgok, jelenségek viszonyának és kapcsolatainak nélkülözhetetlen eszköze.

Felsorolás vagy valamely közös tulajdonság alapján összetartozó dolgok vagy jelenségek halmazt alkotnak. A halmazt alkotó dolgok vagy jelenségeket *a halmaz elemeinek* nevezzük. A halmazt természetesen úgy kell megadni, hogy minden dologról vagy jelenségről egyértelműen el lehessen dönteni; eleme-e a halmaznak vagy nem. Tehát a használt filozófiai fogalmaknak ismereteink szintjén „jól definiáltnak" kell lennie. Hogy a beletartozást vagy nem beletartozást könnyebben megértsük, jelöljük a halmazt — mint összetartozó dolgokat — zárt vonallal határolt síkidommal. A halmazt nagybetűvel, elemeit pedig kisbetűvel jelöljük.



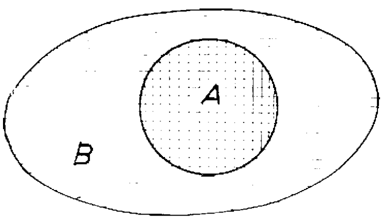
1. ábra

Pl. 1. A: {anyagfajták}
Az atom eleme az A halmaznak.
2. B: {törvények}
A szabadesés törvénye eleme a B halmaznak.
A természeti törvények halmaza eleme a B halmaznak.

Az olyan halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs (nem létezik eleme) üres halmaznak fogjuk nevezni. Jele: $\emptyset$ pl. $\emptyset$: {nem anyag}

Két halmaz viszonyát vagy kapcsolatát a következőképpen szemléltethetjük:

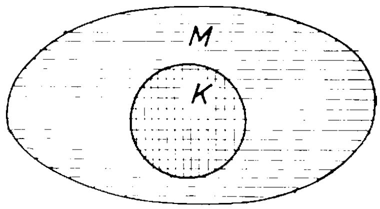
a) eset



2. ábra

Az A halmaz elemei egyúttal B-nek is elemei, de létezik B-nek olyan eleme, amely A-nak nem eleme. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy az A halmaz *valódi részhalmaza* a B halmaznak. Jelölése: $A \subset B$.

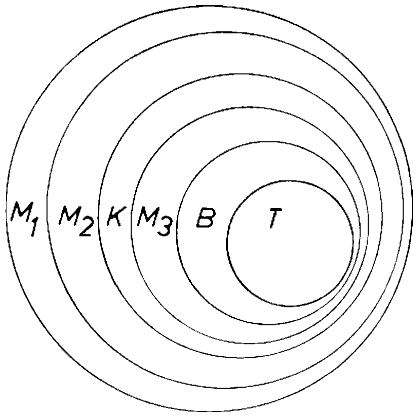
Legyen pl. M a mechanikai mozgást végző anyagfajta és K a kémiai mozgást végző anyagfajták halmaza. Milyen kapcsolat van a két halmaz (anyagfajta) között? Minden kémiai mozgást végző anyagfajta egyúttal mechanikai mozgást is végző, de nem minden mechanikai mozgást végző anyagfajta végez egyidejűleg kémiai mozgást is. Tehát K valódi részhalmaza M-nek. Úgy is kifejezhetjük, hogy a kémiai mozgást végző anyagfajták létezése *elégséges feltétele* a mechanikai mozgást végző anyagfajták létezésének, illetve a mechanikai mozgást végző anyagfajták létezése *szükséges* feltétele a kémiai mozgást végző anyagfajtáknak.



3. ábra

Hasonlóan szemléltethetjük különböző mozgást végző anyagfajták egymáshoz való viszonyát is.

Ez azonban korántsem az anyagfajták osztályozása (lásd később).



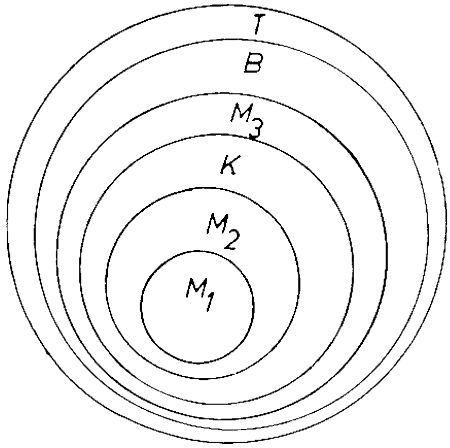
4. ábra

M_1 = {mechanikai mozgást végző anyagfajták}
M_2 = {mikrofizikai mozgást végző anyagfajták}
K = {kémiai mozgást végző anyagfajták}
M_3 = {makrofizikai mozgást végző anyagfajták}
B = {biológiai mozgást végző anyagfajták}
T = {társadalmi mozgást végző anyagfajták}

Pl. a kémiai mozgást végző anyagfajta létezése szükséges feltétele a társadalmi mozgást végző anyagfajták létezésének, de ugyanakkor *elégséges* feltétele minden „alacsonyabb rendű" mozgást végző anyagfajta létezésének. $T \subset B \subset M_3 \subset K \subset M_2 \subset M_1$.

Amennyiben a *mozgásformákat tulajdonságuk* alapján szeretnénk kapcsolatba hozni egymással, akkor éppen fordított a helyzet. Ugyanis a társadalmi mozgásforma minden mozgásforma tulajdonságával rendelkezik és ugyanakkor a mechanikai mozgásforma az összes többi mozgásformának csak egy bizonyos tulajdonságát testesíti meg.

Tehát szemléletesen, ahol

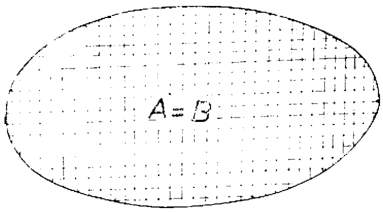


$$\begin{aligned} T &= \{\text{társadalmi}\} \\ B &= \{\text{biológiai}\} \\ M_3 &= \{\text{makrofizikai}\} \\ K &= \{\text{kémiai}\} \\ M_2 &= \{\text{mikrofizikai}\} \\ M_1 &= \{\text{mechanikai}\} \end{aligned}$$

5. ábra

mozgásformák tulajdonságainak halmazát jelöli, nyerjük az alábbi ábrát $M_1 \subset M_2 \subset K \subset M_3 \subset B \subset T$.

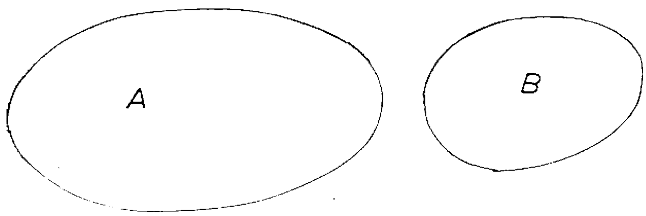
b) eset



6. ábra

A két halmaz *azonos,* vagyis A és B minden eleme kölcsönösen eleme mindkét halmaznak.

c) eset

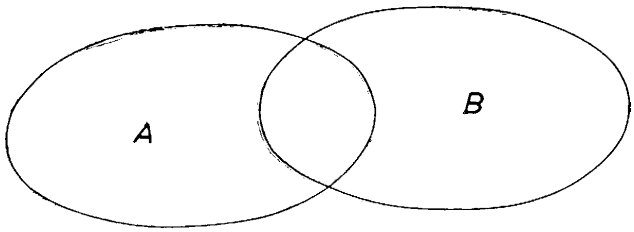


7. ábra

Egyetlen elem sem tartozhat egyszerre A-hoz is és B-hez is. Az ábra tehát olyan halmazokat ábrázol, melyeknek nincs közös elemük. Az ilyen halmazokat *diszjunkt* halmazoknak nevezzük.

A b) és c) eset jól szemlélteti többek között két jelenségcsoporttal kapcsolatos halmazok merev azonosítását, illetve szétválasztását.

d) eset

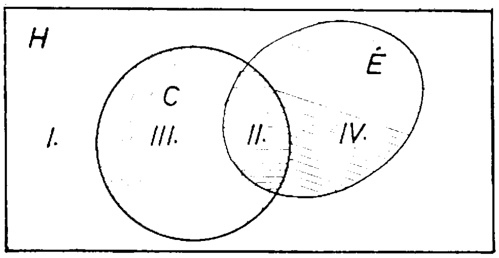


8. ábra

A-nak van olyan eleme, amely nem eleme B-nek, B-nek van olyan eleme, amely nem eleme A-nak, de ugyanakkor létezik közös elemük is.

Gyakorlatilag talán ez az eset a legfontosabb. A filozófiában igen gyakran használatos eszmefuttatás során, amikor azt mondjuk, helytelen a két kategória jelenségcsoport stb. azonosítása és merev elválasztása (b és c eset) ezt a számot (d) alkalmazzuk. Kitűnően szemlélteti ez és megfelelő modellje is a dialektikus kölcsönhatásnak.

Gyakran célszerű egy úgynevezett *alaphalmazt* (H) is választani úgy, hogy a vizsgált halmazok, amelyekről szó van, ennek a H-nak részhalmazai legyenek. Megkülönböztetésül ezt a halmazt téglalappal ábrázoljuk. Pl. tekintsük az emberi tevékenységek halmazát (H). Jelölje C a *cél-*



9. ábra

szerű, É pedig az *ésszerű* emberi tevékenységek halmazát. Vizsgáljuk meg, hogy megfelelő viszonyban ábrázoltuk-e a C, É halmazokat, továbbá mit jelentenek az I, II, III és IV részhalmazok a H alaphalmazon. Az üres halmazt magunk részéről nem tekintjük ábrázolhatónak. (Ez a megszorítás nem szükségképpen kötelező, de célszerű.) Így ábráinkat akkor tekinthetjük helyesnek, ha valamennyi részhalmaz különbözik az üres halmaztól. Elegendő tehát az I, II, III és IV-gyel jelölt halmazok létezését tisztázni. Könnyen belátható, hogy

I = nem célszerű és ugyanakkor nem ésszerű
II = célszerű és ugyanakkor ésszerű
III = célszerű és nem ésszerű
IV = ésszerű és nem célszerű emberi tevékenységek léteznek.

Jól szemlélteti ábránk ezt a tényt, hogy a célszerűség és az ésszerűség nem azonos, és ugyanakkor nem is választható el mereven egymástól.

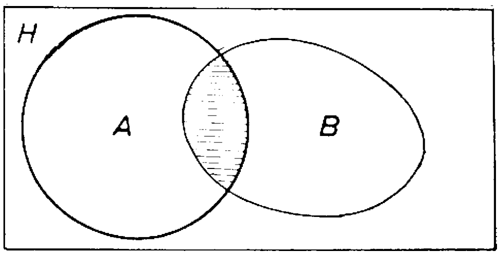
A II. halmazt a C és É halmaz közös részének vagy metszésének nevezzük, és így jelöljük

$$\mathrm{II} = \mathrm{C} \cap \mathrm{É}$$

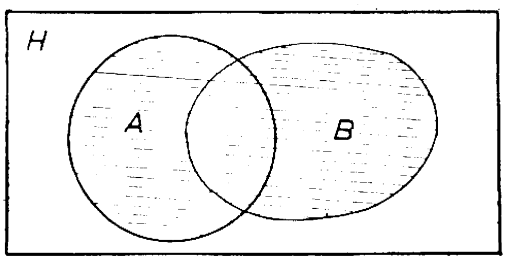
A II, III és IV halmazok egyesítését pedig a C és É halmaz egyesítésének vagy uniójának nevezzük és így jelöljük:

$$\mathrm{II} \cup \mathrm{III} \cup \mathrm{IV} = \mathrm{C} \cup \mathrm{É}$$

Általában azt a halmazt, melynek elemei az A és B halmaznak is elemei, a két halmaz *metszetének nevezzük* (satírozott rész) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.



$A \cap B$



$A \cup B$

10. ábra

Azt a halmazt pedig, melynek minden eleme A, illetve B halmazok közül legalább az egyiknek eleme, a két halmaz egyesítésének vagy uniójának nevezzük

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$$

Tehát $\mathrm{C} \cap \mathrm{É}$ = célszerű és ugyanakkor ésszerű emberi tevékenységek halmaza,

$\mathrm{C} \cup \mathrm{É}$ = célszerű vagy ésszerű, vagy célszerű és ugyanakkor ésszerű emberi tevékenységek halmaza.

Fejtegetéseink természetesen kettőnél több halmazra is kiterjeszthetők. Példaként vizsgáljuk talán *a determinizmus formáit és ezek egymáshoz való viszonyát.* (Nem osztályozása ez a determinációnak, de alapja lehet annak). A két feladat közül nyilván az első könnyen megoldható azáltal, hogy a determináció formáit felsoroljuk, anélkül, hogy meghatároznánk a köztük levő kapcsolatot. Itt csak arra kell ügyelnünk, hogy az egyes formák valóban a determináció válfajait alkotják, különböznek egymástól és a felsorolásból ne maradjon ki semmi.

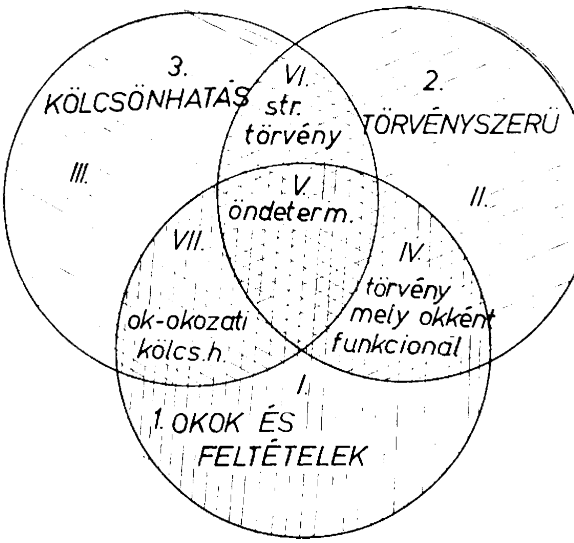
Az eddig feltárt legfontosabb determinációs formák:

1. *Okok és feltételek által való meghatározottság.* Az okokon és feltételeken a jelenségeknek azt a sorát értjük, amelyek elengedhetetlenek ahhoz, hogy egy jelenség létrejöjjön, fennmaradjon vagy megszűnjön. Az okozati meghatározottságot a legáltalánosabb értelemben fogjuk fel, vagyis elvonatkoztatunk attól, hogy milyen jellegűek az okok, belsők-e vagy külsők, lényegesek-e vagy lényegtelenek.

2. *Törvényszerű meghatározottság.* Ezen általában a jelenségek lényeges, tartós, általános és szükségszerű vonásait értjük. A jelenségek törvényszerűségek általi meghatározottságán sem kizárólag külső meghatározottságot értünk, hanem beleértjük a belső meghatározottságot is.

3. *Kölcsönhatás által való meghatározottság,* amelynél a meghatározottság két vagy több jelenség egymásra való hatása révén valósul meg.

A következőkben megkíséreljük a halmazelmélet segítségével szemléltetni a determinációs formák egymás közötti viszonyát, utalva néhány összefüggésre is.



11. ábra

Tekintsük az említett 3 determinációs forma által meghatározott jelenségcsoportok halmazát a legáltalánosabb helyzetben (lásd ábra). Kimutatjuk, hogy I, II, III, IV, V, VI, VII részhalmazok egyike sem üres halmaz, vagyis hogy a determinációs formák kapcsolata megfelel az ábrázolt halmazelméleti modellnek.

Vizsgáljuk először az 1-gyel és 2-vel jelölt determinációs formák kapcsolatát. A törvényszerűségek okként is funkcionálhatnak. Ebben az esetben a törvény az okozati meghatározottság sajátos válfajaként jelenik meg. Pl. a termelőerők és termelési viszonyok közötti összhang felbomlásának törvénye, oka a társadalmi forradalomnak.

Ugyanakkor a jelenségek okozati meghatározottsága nem mindig törvények által meghatározott. Vannak olyan *okozati meghatározottságok, amelyek véletlen* összefüggések. Ha egy tégla X. Y. fejére esik, annak van oka, okozatilag meghatározott, de azt hiszem világos, hogy nem törvényszerűen meghatározott. És végül a törvényszerűségek sem mindig okozati összefüggések. Nem okozati törvényszerűségek pl. az ún. *strukturális és statisztikai törvények.* Ez nem azt jelenti, hogy maguknak a strukturális és statisztikai törvényeknek nem lennének okai, csak nem arra ad választ, hogy mi a jelenség oka, hanem a jelenség szerkezetére, szabályszerűségére.

Folytassuk vizsgálódásainkat ezután a determinációs formák kapcsolatával. A *kölcsönhatás* olyan determinációs forma, amely mindkét, az előbb említett determinációs formánál előfordul. Nyilvánvaló, hogy az *okok és okozatok között* kölcsönhatás is van. A kölcsönhatás azonban nemcsak az okozati meghatározottságon belül érvényesül, hanem az egyes törvényszerűségek között is. Kölcsönhatás áll fenn pl. *a strukturális felépítésnél* a szerkezet és az elemek között. Ugyanakkor nem mondhatjuk, hogy minden kölcsönhatás által meghatározottság egyúttal törvényszerű is.

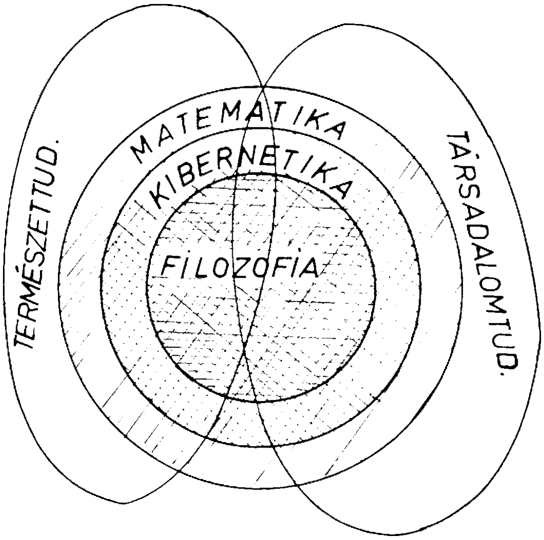
Végezetül említést teszünk még a halmazelmélet igen fontos fogalmáról, az *osztályozásról.* Tesszük ezt azért, mert ezen a területen található a legtöbb pongyolaság, fogalomzavar. Jelentős filozófiai publikációk is sajnos egyszerű felsorolásokat is osztályozásnak tekintenek.

Általában akkor mondjuk, hogy a H alaphalmaz részhalmazai a H halmaz egy osztályozását adják, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

a) Egyetlen részhalmaz sem üres.
b) A részhalmazoknak páronként nincs közös elemük.
c) A részhalmazok uniója megegyezik a H alaphalmazzal. Bármely

feltétel hiánya esetén már nem beszélhetünk osztályozásról. Bizonyos szempont szerinti csoportosítás sem jelent felosztást, de alapul szolgálhat ahhoz. A determinizmussal kapcsolatos fejtegetéseink során az I, II, III, IV, V, VI és VII-tel jelölt halmazok egy-egy osztályt képviselnek. Pl. a IV-es halmaz: törvénye, mely okként funkcionál, de nem kölcsönhatás által meghatározott jelenségek osztálya. Megjegyezzük, hogy egy alaphalmaz *osztályozása többféleképpen* is megvalósítható, attól függően, hogy mi az osztályozás alapja. Ugyanakkor felhívjuk a figyelmet, hogy a filozófiában egyetlen *egy osztályozás sem tekinthető teljesnek és véglegesnek,* hanem csak az eddigi ismereteink alapján mindenkor egy közbülső és nem merev osztályozást jelent. Az osztályozásról és a halmazelméleti vizsgálatokról viszont a filozófia sem mondhat le, mert az egyes jelenségek, dolgok, kategóriák stb. specifikumainak vizsgálatánál kénytelen szembeállítani azokat.

Az általunk az 1. pontban vizsgált *tudományok rendszerezésének halmazelméleti modellje* pl. az elvontság átfogó jellegét az *általánosítást,* az anyagi valóság konkrét jelenségeitől való nagyobb távolságát *tekintve,* az ábrán látható modell lehet. A *filozófiai* általánosításokat a *kibernetika* és a *matematika* teljes egészében felhasználja, ugyanakkor bizonyos értelemben már konkretizál is, tehát „bővebb halmazt ad, ugyanis nem lehet minden matematikai és kibernetikai általánosítás egyúttal filozófiai is. Még kevésbé mondható el ez utóbbi a természettudományokról és a társadalomtudományokról, amelyek a valóság egy részének általánosításával foglalkoznak, ugyanakkor általánosításaik jó része sem matematikai, ill. kibernetikai általánosítás, tekintettel arra, hogy „konkretizálnak".



12. ábra

Nyilván léteznek olyan filozófiai, matematikai és kibernetikai általánosítások, amelyek egyrészt alkalmazhatók a természettudományok és a társadalomtudományok területén is. Ismét mások viszont vagy csak a természettudományok vagy csak a társadalomtudományok területén alkalmazhatók. Ugyanakkor a filozófia mellett matematika és kibernetika viszonylagos önállósága miatt nyilvánvalóan léteznek olyan ún. „idealizált" általánosítások is, amelyek a társadalom- és természettudományok általánosításaként nem tekinthetünk.

Jól szemlélteti modellünk egyúttal azt is, hogy a *filozófia, matematika és kibernetika módszereit valamennyi tudomány felhasználja,* a filozófiát még a kibernetika és a matematika is.

Modellünket természetesen *nem* tekinthetjük teljesnek, még kevésbé merev, *lezárt* modellnek. Új tudományok és határterületek jönnek létre, amelyekkel kiegészíthetők, a tudományok bonyolult rendszere.

Ugyanakkor még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a matematika módszerei is — ha nem is valamennyi — alkalmazást nyernek a filozófiában, amelyek kimutatása éppen e dolgozat egyik feladata is.

Nem feladatunk, hogy e dolgozat keretében tovább szaporítsuk a példák és alkalmazások sorát, bár igen jelentősek. Viszont röviden említést teszünk még a már általunk is említett modellekkel kapcsolatban a matematikai modellekről is.

5. A matematikai modellekről

A modellalkotás a tudományos gondolkodás általános módszere. Az anyagi világ különböző területének elemzése mindig úgy történik, hogy az objektív jelenségek összességéből kiragadjuk *a lényeges, meghatározó és tartós* jegyeket, összefüggéseket. A többi ismérvtől és összefüggéstől azonban a vizsgálat lehetősége érdekében elvonatkoztatunk. Az objektív valóság modellekké való absztrahálása nélkül semmiféle tudományos megismerés sem lenne lehetséges. Így van ez mind a természettudományokban, mind a társadalomtudományokban.

A tudományos modellekkel szemben általában két követelményt szoktunk támasztani. A modell legyen az obj. valóság minél hűbb, minél adekvátabb visszatükrözője: ugyanakkor éppen a lényegtelen körülményektől való absztrahálás révén emelje ki azt, ami a vizsgált területen lényeges és törvényszerű. Ugyanakkor a jelenségnek több modellje is elképzelhető, sőt attól függően, hogy mi a vizsgálat célja, mint azt láttuk is, több modellje is kell hogy legyen.

Ezekben a modellekben az obj. valóság egyes *elemének* a szóban forgó *tudomány kategóriái* felelnek meg és az obj. valóság elemei között meglevő szükségszerű kapcsolatokat a tudomány által megfogalmazott törvények fejezik ki. Az így felépített modellekben különböző meggondolásokat végezhetünk, amelynek eredményeként bizonyos következtetésekre, új ismeretekre jutunk. Amennyiben a modell a valóság megfelelő képe volt, és a meggondolásokat helyesen vittük végig, akkor a nyert (következtetéseknek) konklúzióknak a modell által reprezentált objektív valóságra is érvényes következtetéseknek kell lenniük. Ezt azonban már a gyakorlattal való egybevetés ellenőrzi.

A tudományos modellekkel végezhető munkát hatékonyságában, megbízhatóságában teszi konkrétabbá és ellenőrizhetőbbé a matematikai módszerek alkalmazása.

Matematikai modellnek a tudományos modellek matematikai nyelven való megfogalmazását, megjelenítését értjük. Az objektív valóság elemeinek a tudományos modellekben kategóriák, a matematikai modellekben pedig szimbólumokkal jelölt matematikai kategóriák felelnek meg. A közöttük levő törvényszerűségeket pedig matematikai relációk fejezik ki.

Amikor arról beszélünk, hogy felállítjuk valamilyen jelenség — csoport matematikai modelljét —, akkor tehát általában nem arról van szó, hogy az obj. folyamatokat közvetlenül fejezzük ki matematikai formulákkal, hanem arról, hogy a vizsgált folyamatok egy már kialakított tudományos modelljét ábrázoljuk a matematika nyelvén. A matematika mint tudomány az anyagi világ különböző jelenségeit vizsgáló konkrét tudományok fegyverzeteként kerül felhasználásra és az alkalmazás következtében nyert eredmények gazdagítják a szóban levő tudományt.

A modern matematika a legkülönfélébb struktúrák belső szerkezetének feltárására képes, olyan struktúrákat is, amelyek az anyagi világ igen bonyolult kategóriáinak belső törvényszerűségeit tükrözhetik vissza. (Pl. n komponensű vektorok.) Nem indokolt tehát ma már a matematikát csak (az egyszerű számtanra gondolva) egyszerűen úgy tekinteni, mint a mennyiségi összefüggések (a tudományos gyakorlatban) kifejezőjét. Célunk éppen az kell hogy legyen, hogy a valóság *mennyiségi és minőségi* oldalait matematikai modellek segítségével fejezzük ki. Nem lehet figyelmen kívül hagyni a mennyiség és minőség dialektikus egységét, és nem indokolt a matematikai rendszerek alkalmazásától a valóság minőségi oldalát félteni.

Nem helyes viszont az az álláspont sem, miszerint a matematikai szempontból korrektul végrehajtott elemzés feltétlenül helyes eredményre vezet. Sokan szoktak — szembeállítva más tudományokkal — hivatkozni a matematikára úgy, hogy pl. $1 + 1$ az mindig 2, az is volt és az is marad. Ez pedig nem igaz, mert ugyanolyan joggal írhatjuk, hogy $1 + 1 = 10$ ($1 + 1 = 10$ a kettes számrendszerben).

Minden konkrét esetben biztosítani kell a matematikai modell lehető legnagyobb mértékű valósághűségét, a matematika fejlettségszintjén. A valósághűségre való törekvés bonyolítja a struktúrákat és növeli a számításigényeket. Ennek az ellentmondásnak a feloldása rendszerint a mat.-i modell olyan egyszerűsítését követeli meg, hogy csak bizonyos meghatározott, a vizsgálat céljából lényeges vonatkozásokban reprezentálja a valóságot, de kezelhető. De mind a matematika, mind a többi tudományok fejlődésével az említett kompromisszum mindig magasabb fokon valósítható meg, vagyis megvan a lehetőség arra, hogy a matematika, az obj. valóságot, mind maradéktalanabbul tükröző modelleken segítse a tudományokat és így a filozófiát is.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Engels: A természet dialektikája. Bp. 1952.
[2] Engels: Anti-Dühring. Bp. 1950.
[3] Alekszandrov A. D.: A matematika általános szemszögéből. Szovjet tanulmánygyűjtemény, I. kötet.
[4] Kedrov: Az anyag mozgásformáinak összefüggése a természetben. A modern természettudományok filozófiai problémái c. kötetben. Akadémiai Kiadó, Bp. 1962.
[5] A kibernetika filozófiai problémái c. tanulmánygyűjtemény. Gondolat, Bp. 1963.
[6] Popov: A matematika logikai elemei. Gondolat, Bp. 1961.
[7] Fenyő I.: A matematika helye a tudományok rendszerében. Magyar Filozófiai Szemle, 1962. 5. sz.

[8] Ruzsa I.: A matematika néhány filozófiai problémájáról. Tankönyvkiadó, 1966.
[9] Kónya I.: A matematika tárgya és helye a tudományok rendszerében. ACTA Universitatis Debreceniensis 1965 X(I)1.
[10] Kalmár L.: A matematika alapjai (egyetemi jegyzet).
[11] Rényi A.: Dialógusok a matematikáról. Akadémiai Kiadó, 1965.
[12] A dialektikus materializmus válogatott kérdései (szakosító jegyzet).

DIE STELLE DER MATHEMATIK IN DER ORDNUNG DER WISSENSCHAFTEN

Dr. Perge Imre

Die Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie, deren Grund in der Aufdeckung gültiger Zusammenhänge auf allgemeinen und von einander weitstehenden Gebieten zu suchen ist: sind vielfältig. Es ist wohl bekannt, dass sich die Anwendungsgebiete der Mathematik in den letzten Jahrzehnten ausserordentlicht angewachsen haben. Die Methoden der Mathematik werden fast in allen Wissenschfaten benützt. Hinsichtlich des Ursprungs steht die Mathematik in unmittelbarer Verbindung zu den Naturwissenschaften, sie ist aber keine Naturwissenschfat. Es ist leicht einzusehen, dass sie auch keine Gesellschaftwissenschaft ist. Sie kann aber auch nicht zu den philosophischen Wissenschaften gerechnet werden, da sie die materielle Wirklichkeit nur aus einem gewissen Gesichtspunkt umfasst, dies aber nicht der allgemeinste ist. Zu selber Zeit führt aber — durch die Vermittlung der Logik — ein direktor Weg von der Mathematik zur Philosophie. In diesem Sinne nimmt die Mathematik also zwischen Fachwissenschaften und Philosophie auf einem bestimmten Niveau Platz. Auch die Kybernetik ist eine dem Niveau der Mathematik ähnliche Wissenschfat. Die einzelnen Niveaus sind natürlich nicht für geschlossene zu nehmen.

Die Methoden der Mathematik können — wenn auch nicht alle — auch in der Philosophie Anwendung erhalten. Die veranschaulichen Modelle der Mengentheorie können die Aufdeckung der Zusammenhänge, die der dialektischen Beziehungen, die Klassifikation usw. in grossem Masse fördern. Das wird neben den vielen, in der Arbeit veröffentlichten Modellen auch durch das Mengentheorie-Modell fürs System der Wissenschaften gut veranschaulicht.