A HARMONIKUS LINEÁRIS OSZCILLÁTOR KOMPLEX SAJÁTFÜGGVÉNYEIRŐL

SZOMBATHY MIKLÓS

(Közlésre érkezett: 1971. október 29.)

A dolgozat a harmonikus oszcillátor sajátértékproblémájában szerepet játszó másodrendű differenciálegyenlet általános komplex megoldását tárgyalja a Lebesque-integrál, ill. Riesz—Fischer-féle tétel igénybevétele nélkül, pusztán didaktikai célból. Korolláriumként adódik a négyzetesen integrálható megoldás egyértelműsége.

A harmonikus lineáris oszcillátor sajátértékegyenlete

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\tau}\left(W - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\right)\varphi = 0 \tag{1}$$

alakú, ahol μ a részecske tömegét, ω a klasszikus körfrekvenciát jelenti. Mint ismeretes, megoldása visszavezethető a

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (k - \xi^2)\varphi = 0 \tag{2}$$

egyenlet megoldására, ha a $\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\tau}}\,x$ és a $k = \frac{2W}{\tau\omega}$ jelölésekkel élünk.

A (2) megoldásaként a Sommerfeld-féle polinom-módszerrel a

$$\varphi_n = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n \tag{3}$$

függvények adódnak a $k = 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ feltétel mellett, ahol a H_n függvények — az ún. Hermite-polinomok — kielégítik a

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH_n}{d\xi} + 2n H_n = 0 \tag{4}$$

differenciálegyenletet, explicit előállításuk a

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \tag{5}$$

definíciós egyenletnek is tekinthető összefüggés alapján lehetséges.

Keressük a továbbiakban (2) megoldását általános

$$\varphi = A e^{iB} \tag{6}$$

alakban, ahol tehát elejtjük egyelőre azt a követelményt, hogy (6) négyzetesen integrálható legyen. Próbafüggvényünket (2)-be helyettesítve a valós és képzetes részek összehasonlításából az

$$A^2 \frac{dB}{d\xi} = K \tag{7}$$

összefüggést nyerjük, ahol K a képzetes részre kapott egyenlet integrálásánál jelentkező állandó. Összefüggésünket felhasználva a megoldás abszolút értékére az

$$A^3 \frac{d^2A}{d\xi^2} + (k - \xi^2) A^4 = K \tag{8}$$

inhomogén egyenlethez jutunk. Ez az egyenlet az

$$A^2 = F \tag{9}$$

helyettesítés és (8) oldalainak deriválása után elemi számítások eredményeként a

$$\frac{d^3F}{d\xi^3} + 4 (k - \xi^2) \frac{dF}{d\xi} - 4 \xi F = 0 \tag{10}$$

homogén harmadrendű differenciálegyenletre vezet. Mint látható, (10) egyenletünk nem általánosabb (8)-nál, hiszen (10) megoldását (8)-ba helyettesítve K értékét szabjuk meg.

A továbbiakban a lineáris differenciálegyenletek megoldásánál szokásos rendszámcsökkentéssel próbálkozunk. A (3) — szempontunkból partikuláris — megoldás felhasználásával nyilván (10)-nek megoldása

$$F_n = H_n^2 e^{-\xi^2} . \tag{11}$$

Erről egyébként helyettesítéssel is meggyőződhetünk. Az általános megoldást

$$z H_n^2 e^{-\xi^2} \tag{12}$$

alakban keresve a $\frac{dz}{d\xi} = u$ helyettesítés után u-ra már másodrendű egyenletünk van, melynek rendszáma ismét csökkenthető, ha ismerjük egy partikuláris megoldását. u-ra nyerhető egyenletünk a következő alakú:

$$\begin{aligned} & H_n^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(6 H_n \frac{dH_n}{d\xi} - 6\xi H_n^2\right) \frac{du}{d\xi} + \\ & + \left[4 H_n \frac{d^2 H_n}{d \xi^2} - 20 \xi H_n \frac{dH_n}{d\xi} + 8 \xi^2 H_n^2 + 6 \left(\frac{dH_n}{d\xi}\right)^2 + 4n H_n^2 - 2 H_n^2\right] u = 0 . \end{aligned} \tag{13}$$

Ennek az egyenletnek partikuláris megoldása

$$u = \frac{e^{\xi^2}}{H_n^2}$$

ezt helyettesítéssel ellenőrizhetjük. (13) felhasználásával keressük (12) általános megoldását

$$u = g \frac{e^{\xi^2}}{H_n^2} \tag{14}$$

alakban. Amint ez könnyen belátható, g-re a

$$\frac{dg}{d\xi} + \left(\frac{2}{H_n}\frac{dH_n}{d\xi} - 2\xi\right) g = 0 \tag{15}$$

elsőrendű homogén egyenlet adódik, mely egyszerűen integrálható. Ezek után (10) általános megoldása (15), (14) és (12) felhasználásával felírható, amiből viszont eredeti (2) problémánkra a

$$\varphi_n = \sqrt{F_n}\, e^{iK \int \frac{1}{F_n} d\xi}$$

$$F_n = \frac{H_n^2}{e^{\xi^2}} \left[C_1 + \int \frac{e^{\xi^2}}{H_n^2} d\xi \left(C_2 + C_3 \int \frac{e^{\xi^2}}{H_n^2} d\xi\right)\right] \tag{16}$$

általános komplex megoldást nyerjük.

Az (1), illetve (2) egyenlet konkrét kvantummechanikai probléma kapcsán merül fel és ebben a vonatkozásban (16) mint sajátértékprobléma megoldása nem jöhet számításba, egyrészt, mert a sajátértékproblémák L^2-ben egyértelműek, de (16)-ból ennek ismerete nélkül is, hiszen $F_n = \varphi_n \varphi_n^*$ és $F_n C_3 \neq 0$ esetben nyilván a végtelenben divergens, míg $C_3 = 0$ és $C_2 \neq 0$ esetben ugyan nem divergens, de csak ξ^{-1} rendben tart 0-hoz. Így ebben a speciális esetben igen egyszerű módon is adódik, hogy (2)-nek, mint sajátértékegyenletnek legáltalánosabb komplex megoldása (3).

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Marx György: Valós állapotfüggvények szerepe a kvantummechanikában. (MTA Közl. II. 3—4. 1952.)

[2] Marx György: Kvantummechanika (II. kiadás, 1964).

[3] Mátrai Tibor: A point dynamic model for the causal interpretation of wave mechanics. (Acta Phys. Acad. Hung. 28 [4] 323—335. 1970.)

[4] E. Kamke: Differentialgleichungen I. (5. Aufl. 1964.)