A KVÁZIEUKLIDESI TÉRIDŐ-KONTINUUM ELEMI FELÉPÍTÉSÉNEK ALAPELVEIRŐL

Dr. *MÁTRAI TIBOR*

(Közlésre érkezett: 1971. október 29.)

Egyik korábbi [1] dolgozatomban egységes módszert adtam meg a térmetrika meghatározására relativisztikus értelemben is mereven mozgó (HERGLOTZ-*féle*) közegekben [2]. E módszer jóvoltából legutóbb sikerült arra a meglepő felismerésre jutnom, hogy *végtelen kiterjedésű euklidesi tér csakis inerciarendszerben valósulhat meg.* Sőt a végtelen kiterjedés követelése bízvást az inerciarendszer [3] geometriai definíciójául is szolgálhat.

E biztató program érdekében jelen dolgozatomban az euklidesi geometria elveit a korlátlan kiterjedés (ideális eleme) bevezetésének ésszerű késleltetésével fejtem ki, éspedig a közvetlen (vagyis már kiindulásában is koordinatamentes) vektoraritmetika nyelvén, amelyet itt H. WEYL [4] hasonló törekvéseitől bátorítva *csakis pontból,* bizonyos *pontpárok merev* (értsd: viszonylag mozdulatlan) *viselkedéséből,* valamint az ilyenekhez rendelhető *távolságértékből* származtatok le. A szervesen csatlakozó relativisztikus kinematikai elveim megfogalmazását két pont pillanatnyi koincidenciájára alapítom. A kiindulásban szándékosan sikerül tehát mellőznöm a természetes óra, valamint a fényjel bonyolult fogalmát, amelyet korábbi szerzők [5], [6] igénybe vettek. Megmutatom, hogy az ismert LANGE-*féle* koncepciók [7] alapján felsorakoztatott kinematikai elvekből a Lorentz-transzformáció (a „világ" analitikus modelljeként) kölcsönös és egyértelmű módon levezethető.

1. §. Bevezető geometriai ismeretek

A pontfizikában az anyagot pontokból képzeljük összetéve, vagyis oly kis anyagrészekből, amelyeken belül további valódi részeket már nem tudunk megkülönböztetni. Ezeknek először minden tulajdonságuktól eltekinthetünk, kivéve az anyagban elfoglalt „helyzetüket" *(kinematikai pont).* Így a pontfizikában az anyag bonyolultnak látszó mozgását mindig az alkotó pontok egyszerű helyzetváltoztatására igyekszünk visszavezetni. A következőkben a pontokat általában (amíg csak tovább nem specializáljuk) egyenletesen kövér nagybetűvel, pl. **P**-vel, **Q**-val stb. fogjuk jelölni, és az 1. ábra szerint a betű alá rajzolt nullkörrel fogjuk illusztrálni.

1. ábra

A pont helyzetét és annak változását, vagyis mozgását végső elemzésében mindig viszonylagosnak találjuk. Egyetlenegy **P**-pontnak helyzetéről, ill. annak változásáról tehát nem lehet beszélni, hanem mindig csakis egy másik **Q**-ponthoz viszonyítva. Nevezetesen mindig objektíven el tudjuk dönteni azt, hogy két pont, pl. a **P** és a **Q** egymáshoz „közeledik-e" avagy „távolodik-e".

Azt is megállapíthatjuk pl., hogy a **P** a **Q**-hoz sem nem közeledik, sem nem távolodik, vagyis viszonylag mozdulatlan. Ez utóbbi esetben a **P**-t és a **Q**-t egymáshoz képest *„merevnek"* mondjuk. A merevség ezért két pontnak (pontpárnak) szimmetrikus tulajdonsága. De egyben reflexív is, mert **P** önmagához képest mindig mozdulatlannak, vagyis merevnek mondható.

2. §. Vektor és reális szám kapcsolatának alaptételei (Metrikus térkontinuum)

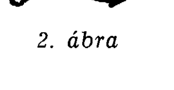
Az alapok alábbi kifejtésében a későbbi (gyakori) hivatkozások érdekében arab sorszámozott oly nyílt értelmezések (*def.* jellel), továbbá római sorszámozott oly alaptételek (*ax.* jellel) és szintén arab sorszámozott közvetlen oly következmények (*koroll.* jellel) fogják egymást logikai sorrendben „more euklidico" követni, váltogatni, amelyek szükségesek és elégségesek is a geometria analitikus modelljének felállításához. Megemlítjük, hogy alaptételeink a klasszikus geometria axiómáival ellentétben nem játsszák egyben a fogalmak burkolt (implicit) értelmezéseinek szerepét is, hanem ezek a tapasztalat által következményeikben igazolt, voltaképpen ismert vektori tételek, amelyeket a bennük szereplő fogalmak nyílt definíciói előznek meg.

A) *A legáltalánosabb (kinematikai) ponthalmaz tulajdonságai.*

I. ax. Bármely merev pontpárhoz tartozik egy és csakis egy nem negatív reális szám.

1. def. Olyan merev pontpárt, amelynek két pontja, pl. az **O** és az **A** között sorrendet is előírunk, hosszúságvektornak, röviden *vektornak* nevezünk, és ezt $\overline{OA}$-val jelöljük.

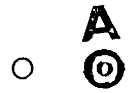
2. def. Az $\overline{OA}$ vektort sorrend szerint meghatározó első pontot, vagyis az **O**-t a vektor *kezdő*, a másodikat, **A**-t a végpontjának nevezzük, és a 2. ábrán az **O**-t **A**-val összekötő vonallal (gráffal) illusztráljuk, amelyen a sorrendet a nyílhegy iránya tünteti fel. Az $\overline{AO}$-vektort az $\overline{OA}$-vektor *megfordítottjának* nevezhetjük.



2. ábra

1. koroll. Bármely vektorhoz tartozik egy és csakis egy nem negatív reális szám, éspedig éppen az, amely a vektort meghatározó pontpárt az I. ax. értelmében jellemzi. Az $\overline{\mathbf{OA}}$-hoz tartozó nem negatív reális számot az $\overline{\mathbf{OA}}$ *értékének,* vagy hosszának nevezzük, és ezt $|\overline{\mathbf{OA}}|$-val fogjuk jelölni. Mindig fennáll, hogy $|\overline{\mathbf{OA}}| = |\overline{\mathbf{AO}}| \geqq 0$.

3. def. Ha különlegesen az $|\overline{\mathbf{OA}}| = 0$, akkor az $\overline{\mathbf{OA}}$-vektort *zérusvektornak,* magát az **O**- és **A**-pontot egymással tartósan *egybeesőnek* mondjuk. — Ennek illusztrálását szolgálja a 3. ábrán látható két koncentrikus nullkör.



3. ábra

II. ax. Ha $|\overline{\mathbf{OA}}| = 0$, akkor az **O**-hoz képest merev bármely **B**-pont egyszersmind az **A**-hoz képest is merev, sőt értékük egyezik $|\overline{\mathbf{OB}}| = |\overline{\mathbf{AB}}|$ (4. ábra).

4. ábra

2. koroll. Ha pl. a **B**-pont azonos **A**-val, akkor a II. ax. miatt $|\overline{\mathbf{OA}}| = |\overline{\mathbf{AA}}| = 0$. Tehát a 3. def. értelmében azonos pontok egyszersmind egybeesnek is.

3. koroll. Ha $|\overline{\mathbf{OA}}| = 0$ és $|\overline{\mathbf{AB}}| = 0$, akkor egyszersmind $|\overline{\mathbf{AB}}| = 0$, vagyis *az egybeesés tranzitív* tulajdonság.

4. def. Ha az **O**, **A**, **B**-pontok mindhárom párosítása merev, és létezik oly β reális szám, amelyre teljesülnek az alábbi egyenletek:

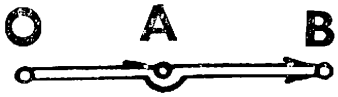
$$|\overline{\mathbf{OB}}| = |\beta|\cdot|\overline{\mathbf{OA}}|, \qquad \text{(a)}$$

$$|\overline{\mathbf{OB}}| = \frac{\beta}{|\beta|}\cdot|\overline{\mathbf{OA}}| + |\overline{\mathbf{AB}}|, \qquad \text{(b)}$$

akkor az $\overline{\mathbf{OB}}$-t az $\overline{\mathbf{OA}}$-vektor β-szoros *megnyújtottjának* mondjuk. Ezt a tényt így *jelöljük:*

$$\overline{\mathbf{OB}} = \beta\cdot\overline{\mathbf{OA}}.$$

A megnyújtott előállításának műveletét megnyújtásnak, az $\overline{\mathbf{OA}}$-vektort pedig megnyújtandónak nevezhetjük (5. ábra). Ha $|\overline{\mathbf{OA}}| \neq 0$ és $\beta > 0$, akkor *azonos értelemben;* ha pedig $\beta < 0$, akkor *ellenkező értelemben* megnyújtottról beszélünk. A $\beta = 0$ esetben a (b) egyenletben a határozatlan $\beta/|\beta|$-nek csakis a —1 értéke fér meg a II. ax.-val.

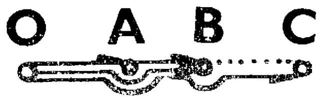


5. ábra

4. koroll. Bármely vektor egyszersmind önmagának 1-szeres megnyújtottja is (ez 1. koroll. alapján látható be).

5. *koroll.* Ha $\mathbf{OB} = \beta \cdot \mathbf{OA}$, akkor a 4. def. miatt egyszersmind: $\mathbf{AB} = (1-\beta) \cdot \mathbf{AO}$.

III. ax. A vektor megnyújtása tranzitív művelet, ugyanis bármely vektor megnyújtásából nyert két vektor egyszersmind egymásnak is megnyújtottja (6. ábra).



6. ábra

Ha tehát $|\mathbf{OA}| \neq 0$, továbbá $\mathbf{OB} = \beta \cdot \mathbf{OA}$ és $\mathbf{OC} = \gamma \cdot \mathbf{OA}$, akkor egyszersmind $\mathbf{OC} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \mathbf{OB}$.

6. koroll. A vektor megnyújtása egyértékű művelet. A II. ax-ból ugyanis következik, hogy ha $|\mathbf{OA}| \neq 0$ mellett $\mathbf{OB} = \beta \cdot \mathbf{OA}$ és $\mathbf{OC} = \beta \cdot \mathbf{OA}$, akkor egyszersmind $|\mathbf{CB}| = 0$. Valóban: a III. ax. miatt $\mathbf{OC} = 1 \cdot \mathbf{OB}$, vagyis 4. def. (a) egyenletéből $|\mathbf{OC}| = |\mathbf{CB}|$, amely mellett azonban a (b) csak akkor állhat fenn, ha $|\mathbf{BC}| = 0$.

IV. ax. Adott vektornál *nem hosszabb megnyújtott vektor mindig létezik.* Vagyis adott $\mathbf{OA}$ vektorhoz és bármely egynél nem nagyobb pozitív β-számhoz mindig tartozik az **O**-hoz képest merev oly **B**-pont, amelyre $\mathbf{OB} = \beta \cdot \mathbf{OA}$.

5. *def.* Ezért pl. adott **OA**-vektornak mindig létezik *felező vektora* is, amely tehát az előbbinek félszeres $[\beta = {}^1/_2]$ megnyújtottja. A felező vektor végpontját felező pontnak nevezhetjük.

7. *koroll.* A 4. koroll. alapján belátható, hogy valahányszor

$$\mathbf{OB} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{OA}, \text{ mindannyiszor } \mathbf{AB} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{AO}.$$

B) *Az ún. planimetriai pontok halmazának tulajdonságai*

7. def. Ha a véges értékű $\overline{\mathbf{OA}}$-vektorhoz és tetszőleges pozitív számnál is nagyobb abszolút értékű β-számhoz (amely éppen ezért lehet negatív is) egyszersmind tartozik $\beta \cdot \overline{\mathbf{OA}}$ megnyújtott vektor is, akkor az $\overline{\mathbf{OA}}$-*vektort szabályosnak* nevezzük. A szabályos vektor e tulajdonságát képletesen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az mindkét irányban „korlátlanul megnyújtható”. Ha β-nak dimenziót is tulajdonítunk, akkor a megnyújtás műveletével a hosszúság-vektorokból egyéb fajú vektorokat is leszármaztathatunk.

8. def. Valamely $\overline{\mathbf{OA}}$ szabályos vektor *irányán* (tengelyén) az $\mathbf{OA}/|\overline{\mathbf{OA}}|$ megnyújtott vektort értjük. Ennek értéke a 4. def. (a) egyenlete értelmében egységnyi, függetlenül attól, hogy hosszúság-vektorainkat az eddigi hosszértékük hányszorosával kívánjuk ezentúl jellemezni.

9. def. Ha az x-változó értelmezési tartománya a reális számok halmaza, és $\overline{\mathbf{OE}}$ szabályos irányvektor $[|\overline{\mathbf{OE}}| = 1]$, akkor az $x \cdot \overline{\mathbf{OE}}$ megnyújtott vektorok végpontjainak halmazát az $\overline{\mathbf{OE}}$ által meghatározott *egyenesnek* nevezzük. Az x-változó tehát hosszúság-dimenziójú, míg az irány dimenziómentes.

10. def. Ha $\overline{\mathbf{OA}}$ szabályos vektor, akkor okvetlenül létezik a $\beta = -1$ szorzónak megfelelő $(-1) \cdot \overline{\mathbf{OA}}$ vektor is, amelyet az $\overline{\mathbf{OA}}$ *negatívjának* mondunk (7. ábra).

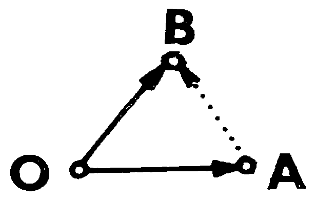
7. ábra

V. ax. Okvetlenül *létezik* oly kivételes **O**-pont, amely kezdőpontja két ($\overline{\mathbf{OA}}$ és $\overline{\mathbf{OB}}$) különböző (vagyis egymással nem azonos, hanem „eltérő”) *irányú* szabályos vektornak.

11. def. Az V. ax.-ban említett kitüntetett **O**-t *planimetriai pontnak* nevezzük és a többitől való megkülönböztetésül a továbbiakban dőlt nagybetűvel: *O*-val fogjuk jelölni.

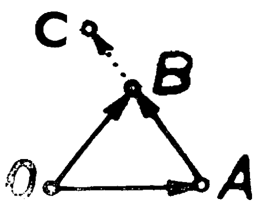
VI. ax. Az $\overline{O\mathbf{A}}$ és $\overline{O\mathbf{B}}$ szabályos vektoroknak **A** és **B** *végpontjai* egymáshoz képest mereven viselkednek és ezenfelül az $\overline{\mathbf{AB}}$-vektor is szabályos (vagyis mindkét irányban végtelenül megnyújtható; 8. ábra) vektor. Éppen ezért ez esetben az $\overline{\mathbf{AB}}$-vektort is konzekvensen sovány dőlt betűkkel: $\overline{AB}$-vel jelölhetjük.

8. koroll. Ha $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ szabályos vektorok és α tetszőleges reális szám, akkor az $\overline{O\mathbf{C}} \equiv \alpha \cdot \overline{OA}$ vektornak **C** és az $\overline{OB}$-vektornak B végpontja merev egymáshoz képest, továbbá VI. ax. miatt a $\overline{B\mathbf{C}}$ vektor is szabályos és így



8. ábra

a C-pont is planimetriai pont (C, 9. ábra). Következőleg pedig a közös kezdőpontú eltérő irányú két szabályos vektor által meghatározott mindkét egyenes bármely pontja is *planimetriai* pont.

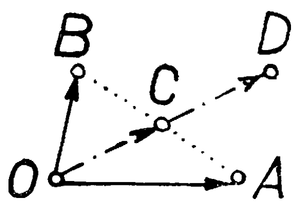


9. ábra

A planimetriai pontok (P) halmaza valamennyi pont (**P**) halmazának egy részhalmaza: $(P) \subset (\mathbf{P})$.

A következőkben csakis a 11. def. értelmében vett *planimetriai* pontokról esik szó, ezért e jelzőt elhagyhatjuk, és e megkülönböztetésre csakis sovány dőlt betűjellel fogunk emlékeztetni.

12. def. Az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$-vektor *középvektorán* azt az $\overline{OC}$-vektort értjük, amelynek kezdőpontja szintén O, végpontja pedig az $\overline{AB}$-nek C felező pontja (10. ábra).



10. ábra

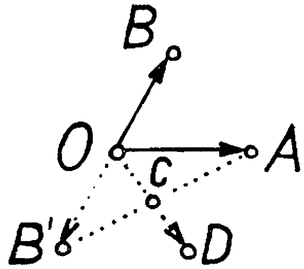
9. koroll. Adott $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektornak a 6. és 7. koroll. miatt mindig van egy és csakis egy középvektora, és ez egyben független az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ megadásának sorrendjétől.

13. def. Az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektor $\overline{OD}$ *összegén* e két vektor $\overline{OC}$ középértékének kétszeres megnyújtottját értjük. Ez okvetlenül létezik a 8. és 9. koroll. miatt. Az $\overline{OD}$-összeget így jelöljük: $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OD}$.

10. koroll. A 9. koroll. miatt fennáll *az összeg kommutativitása:* $\overline{OA}+\overline{OB}\equiv\overline{OB}+\overline{OA}$.

14. def. Az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$-vektor *különbségén* az $\overline{OA}$-nak és az $\overline{OB}$ 10. def.-ban értelmezett negatívjának, vagyis $(-1)\cdot\overline{OB}$-nak összegét értjük (11. ábra):

$$\overline{OD}\equiv\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OA}+(-1)\cdot\overline{OB}.$$



11. ábra

11. koroll. Valamely $\overline{OA}$ vektor és $\alpha\cdot\overline{OA}$ megnyújtottjának összege *disztributiv,* vagyis $\overline{OA}+\alpha\cdot\overline{OA}=(1+\alpha)\cdot\overline{OA}$. Ez az azonosság következik a 13. def.-ből és III. ax.-ból. Az azonosságból egyszersmind:

$$\alpha\cdot\overline{OA}+\beta\cdot\overline{OA}\equiv(\alpha+\beta)\cdot\overline{OA}$$

(első disztributiv törvény).

15. def. Az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$-vektor *skaláris szorzatán* az

$$\frac{1}{2}(|\overline{OA}|^2+|\overline{OB}|^2-|\overline{AB}|^2)$$

reális számot értjük, amelyet az $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ jellel rövidítünk (8. ábra):

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}\equiv\frac{1}{2}(|\overline{OA}|^2+|\overline{OB}|^2-|\overline{AB}|^2)$$

Ebből világos, hogy a skaláris szorzat *kommutatív:*

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OB}\cdot\overline{OA}.$$

12. koroll. A 15. def.-ból következik, hogy

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA}=|\overline{OA}|^2.$$

Továbbá valahányszor $|\overline{OA}|=0$, mindannyiszor II. ax. miatt $\overline{OB}=\overline{AB}$, tehát egyben $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$.

13. koroll. Adott $\overline{OA}$ vektorhoz és β (akár pozitív, akár negatív) reális számhoz mindig tartozik egy és csakis egy oly $\overline{OB}$-vektor, hogy

$$|\overline{OB}|=|\beta|\cdot|\overline{OA}| \qquad \text{(a)} \quad (=4.\ \text{def. a})$$

és

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{\beta}{|\beta|}\cdot|\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|. \qquad \text{(b)}$$

Meggyőződhetünk ugyanis arról, hogy az a) és b) egyenleteket a 15. def. alapján kielégíti az $\overline{OB} = \beta \cdot \overline{OA}$ vektor, amely a IV. ax. értelmében mindig létezik éspedig a 6. koroll. miatt „egyértékű" módon.

VII. ax. A skaláris szorzat disztributiv, vagyis:

$$\overline{OA} \cdot (\overline{OB} + \overline{OC}) = \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OC}.$$

A következőkben pusztán *rövidebb* írásmód érdekében a következő *jelöléseket* vezetjük be:

$$\bar{a} = \overline{OA},\ \bar{b} = \overline{OB},\ \bar{c} = \overline{OC} \text{ stb.}$$

14. koroll. Fennáll a következő azonosság:

$$(\lambda \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} \equiv \lambda (\bar{a} \cdot \bar{b}) \qquad \text{(a)}$$

E tétel belátására idézzük új jelöléseinkkel a 11. koroll.-t (b), a VII. ax.-t (c) és a III. ax.-t (d):

$$(\lambda + \mu) \cdot \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \cdot \bar{a}, \qquad \text{(b)}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}. \qquad \text{(c)}$$

Ha $\bar{b} = \beta \cdot \bar{a}$ és $\bar{c} = \gamma \cdot \bar{a}$, akkor

$$\bar{c} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \bar{b}. \qquad \text{(d)}$$

A bizonyítandó (a) a (b) miatt feltétlenül igaz $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm k, \ldots$-ra. De igaz $\lambda = \frac{1}{2}$-re is. Ugyanis (az egyenlőségjel fölé annak az egyenletnek zárójeles betűjelét írva, amelynek alapján az egyenlőség belátható):

$$\bar{a}\,\bar{b} \overset{(b)}{=} \left(\frac{\bar{a}}{2} + \frac{\bar{a}}{2}\right) \bar{b} \overset{(c)}{=} 2\left(\frac{\bar{a}}{2}\, \bar{b}\right), \text{ tehát valóban } \frac{1}{2}(\bar{a}\,\bar{b}) = \left(\frac{\bar{a}}{2}\right) \bar{b}.$$

Éppen ezért (a) igaz a $\lambda = \frac{1}{4}$-re és általában $\lambda = \frac{1}{2^j}$-re is $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Ismeretes azonban, hogy bármely reális szám egyértelmű módon felírható (lényegileg a kettős számrendszerben, vagyis):

$$\lambda = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda_j}{2^j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(e)}$$

alakban, ahol λ_0 (pozitív, vagy negatív) egész számot, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pedig vagy zérust, vagy $+1$-et jelent. (Minthogy itt a Σ egy monoton növekvő felülről $(\lambda_0 + 1)$ korlátos végtelen sort alkot, ezért ennek okvetlenül van határértéke. Tehát (e) miatt:

$$(\lambda a)\bar{b} \overset{(e)}{=} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j}{2^j}\bar{a}\right)\bar{b} \overset{(b)}{=} \left(\lambda_0 a + \frac{\lambda_1}{2} a + \dots\right) b \overset{(c)}{=} (\lambda_0 a)\, b + \left(\frac{\lambda_1}{2} a\right) b + \dots \overset{(b)}{=}$$

$$\overset{(b)}{=} \lambda_0 (\bar{a}\,\bar{b}) + \frac{\lambda_1}{2}(\bar{a}\,\bar{b}) + \dots = \bar{a}\,\bar{b}\left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} + \dots\right) = a\, b \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j}{2^j} \overset{(e)}{=} (a\, b)\, \lambda\,,$$

amit éppen bizonyítani akartunk.

Az (a)-ból következik, hogy $\bar{b} = \lambda \cdot a$ esetében $|\bar{a}\bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$. (f)

16. def. Az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektort egymásra *merőlegesnek* (orthogonálisnak) mondjuk, ha $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$.

15. koroll. Ha $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, akkor 15. def. alapján fennáll a PYTHAGORAS-*tétel:*

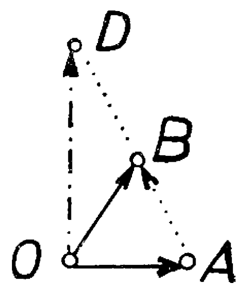
$$|\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 = |\overline{AB}|^2.$$

16. koroll. Valahányszor az OA-vektor merőleges $\overline{OB}$-re, mindannyiszor a 14. koroll. miatt a $\lambda \cdot \overline{OB}$ is merőleges $\overline{OA}$-ra.

17. koroll. Adott $\overline{OA}$-vektorhoz okvetlenül találunk rá merőleges $\overline{OD}$-t.

Az V. ax. miatt ugyanis mindig van szintén szabályos oly $\overline{OB}$, amelynek iránya (12. ábra) az $\overline{OA}$ irányától eltér. A 8. koroll. alapján létezik továbbá oly D-pont is, amelyre nézve $\overline{AD} = \lambda \cdot \overline{AB}$, ahol λ tetszőleges reális szám, nevezetesen

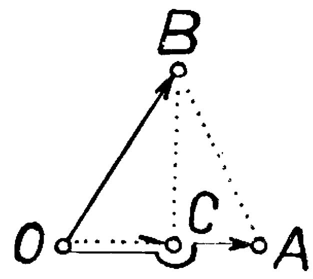
$$\lambda = \frac{|\overline{OA}|^2}{\overline{AO} \cdot |\overline{AB}|}\,.$$



12. ábra

A 15. def. alapján belátható, hogy λ fenti értéke mellett $OA \cdot \overline{OD} = 0$, vagyis a megtalált $\overline{OD}$ valóban merőleges $\overline{OA}$-ra.

18. koroll. Az $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektorhoz okvetlenül találunk egy és csakis egy oly OC vektort, amelyre $\overline{OC} = \gamma \cdot \overline{OA}$ és $\overline{CO} \cdot \overline{CB} = 0$ (13. ábra). Ezt az $\overline{OC}$ vektort az $\overline{OB}$-vektor $\overline{OA}$-ra vonatkozó *merőleges vetületének* mondjuk.



13. ábra

Valóban a 15. def. és a $|\overline{CO}| \equiv |\overline{OC}|$ azonosság miatt a

$\gamma = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{\overline{OA}^2}$ esetén ilyen az $\overline{OC} = \gamma \cdot \overline{OA}$ vektor, amely az előbbiek alapján biztosan létezik éspedig egyértékűen.

19. koroll. Az előbbi korolláriumban említett három vektorra nézve a 15. def. alapján fennáll:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} \equiv \overline{OA} \cdot \overline{OC}$$

Szavakban: a skaláris szorzatot az egyik vektortényezőnek a másik vektor merőleges vetületével való skaláris szorzata is megadja.

C) *Az ún. inerciális pontok halmaza*

VIII. ax. Létezik oly O kitüntetett planimetriai pont, amely éppen ezért nemcsak az V. ax. szerinti $\overline{OA} \equiv \overline{a}$ és az eltérő irányú $\overline{OB} \equiv \overline{b}$ szabályos vektornak közös kezdőpontja, hanem még egy ezekre merőleges, szintén szabályos $\overline{OD} \equiv \overline{d}$-vektornak is.

17. def. A VIII. ax.-ban említett O kitüntetett planimetriai pontot *inerciálisnak* nevezzük és megkülönböztetésül álló *(antiqua)* nagybetűvel: O-val jelöljük. (Az inerciális pontok (P) halmaza részhalmazának tekinthető a planimetriai pontok (P) halmazának: (P) $\subset$ (P). Magát az a és b vektorra merőleges $\overline{d}$-irányvektort n_{ab}-vel is jelölni fogjuk.)

20. koroll. A VIII. ax.-ban említett O inerciális ponton kívül inerciális még az A, B, D pontok bármelyike is, sőt bármely kettőjük által meghatározott vektor egyenesén fekvő bármely pont is.

A következő §-ban csakis inerciális pontokról lesz szó.

3. §. A térkontinuum analitikus modellje

A következőkben megmutatjuk, hogy az előző §-ban kifejtett geometriai tételek bármelyikének megfelel egy-egy tétel a három-elemű reális változók függvény-analízisében. Más szóval a geometria az analízisre egyértelműen leképezhető.

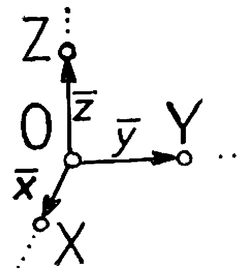
A) *A vektorok komponens-előállítása*

18. def. Az $\overline{OX} = \bar{x}$, $\overline{OY} = \bar{y}$, $\overline{OZ} = \bar{z}$ vektorok legyenek szabályosak (vagyis 7. def. szerint végtelenül megnyújthatók, 14. ábra), továbbá egymásra kölcsönösen merőlegesek („orthogonálisak”) az ismert jobbkézszabály szerint:

$$\overline{xy} = 0,\ \overline{yz} = 0,\ \overline{zx} = 0, \qquad \text{(a)}$$

és értékük legyen egységnyi („normált”):

$$|\bar{x}| = 1,\ |\bar{y}| = 1,\ |\bar{z}| = 1. \qquad \text{(b)}$$



14. ábra

Az így értelmezett közös (és per def. inerciális) kezdőpontú („orthonormált”) irány-vektorhármast inerciális tengelykeresztnek, másszóval *inercia-rendszernek* nevezzük, minthogy a 17. def. értelmében az O pont inerciális, sőt az X, Y, Z pont a 20. koroll. értelmében egyszersmind szintén inerciális.

21. koroll. A VIII. ax., valamint a 18. koroll. jóvoltából okvetlenül létezik legalább egy *inerciális orthonormált tengelykereszt,* röviden *inercia-rendszer.*

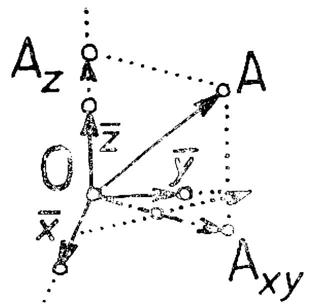
22. koroll. Ha az $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ inercia-rendszer, akkor az $\bar{x}$, $\bar{y}$, $-\bar{z}$ is inercia-rendszer, amit az előzőhöz képest *ellenkező sodrásúnak* nevezünk.

23. koroll. Adott $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ inercia-rendszerhez és $\overline{OA} \equiv \bar{a}$ vektorhoz (ilyen a VI. ax. alapján okvetlenül létezik, és A végpontját „nyugvónak” nevezhetjük) mindig tartozik egy $[(a_x, a_y)\ a_z]$-val jelölendő reális számhármas, hogy az $\bar{a}$

$$\bar{a} = (a_x\bar{x} + a_y\bar{y}) + a_z\bar{z} \qquad \text{(a)}$$

alakban is írható (15. ábra, ahol $\overline{OA}_{xy} \equiv a_x\bar{x} + a_y\bar{y}$ és $\overline{OA}_z \equiv a_z\bar{z}$).
Szorozzuk ugyanis a vektoregyenletet skalárisan rendre $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$-vel, akkor a VII. ax., továbbá a (18. def. a) és (18. def. b) egyenlet miatt az

$$\bar{a}\bar{x} = a_x\ ;\ \bar{a}\bar{y} = a_y\ ;\ \bar{a}\bar{z} = a_z$$



15. ábra

egyenletekhez jutunk, amelyek az a_x, a_y, a_z-t valóban megadják éspedig kölcsönösen és egyértelműen.

Egyben világos, hogy valahányszor az $\overline{OA} = \overline{a}$ és egy $\overline{OB} = b$ vektorra nézve $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ és $a_z = b_z$, mindannyiszor $\overline{OA} = \overline{OB}$, vagyis az A és B végpont egybeesik.

24. koroll.

a) Az $b = a \cdot a$ megnyújtott vektort jellemző $[(b_x, b_y), b_z]$ számhármasra nézve mindig fennáll:

$$b_x = a \cdot a_x\ ;\ b_y = a \cdot a_y\ ;\ b_z = a \cdot a_z. \qquad \text{(a)}$$

b) A $c \equiv a + \overline{b}$ összeg-vektort jellemző $[(c_x, c_y)\, c_z]$ számhármasra nézve pedig mindig fennáll:

$$c_x = a_x + b_x; \qquad c_y = a_y + b_y; \qquad c_z = a_z + b_z. \qquad \text{(b)}$$

25. koroll. A vektori összeg *asszociatív*, vagyis

$$(\overline{a} + b) + c = a + (\overline{b} + c).$$

Valóban: a bal- és a jobb-oldalt jellemző számhármasok megegyeznek. Ugyanis 24. koroll. (b) egyenlete miatt a baloldalt jellemző számhármas:

$$[\{(a_x + b_x) + c_x,\ (a_y + b_y) + c_y\} \quad (a_z + b_z) + c_z],$$

a jobboldalt jellemző számhármas pedig:

$$[\{a_x + (b_x + c_x),\ a_y + (b_y + c_y)\} \quad a_z + (b_z + c_z)].$$

E két számhármas azért egyezik meg, mert az algebrai összegek rendre $(a_x + b_x) + c_x \equiv a_x + (b_x + c_x)$, ... Ezt kellett bizonyítanunk. Ezért az $(\overline{a} + b) + + c \equiv \overline{d}$ összeg jelzésénél nem okozhat félreértést, ha az a vektort jellemző $[(a_x, a_y)\, a_z]$ számhármas jelölésénél a belső zárójel-párt elhagyjuk, vagyis ezt $[a_x,\ a_y,\ a_z]$-vel rövidítjük.

19. def. Az x, $\overline{y}$, $\overline{z}$ inercia-rendszerben az a vektort a 23. és 25. koroll. értelmében jellemző $[a_x,\ a_y,\ a_z]$ értékhármast a vektor (merőleges) *szám-komponenseinek* nevezzük.

26. koroll. Az $\overline{ab}$ skaláris szorzatot a vektortényezők komponenseiből a könnyen igazolható

$$\overline{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

azonosság alapján is kiszámíthatjuk.

27. koroll. A komponens-előállítás alapján könnyen bizonyítható tételek:

a) $\lambda \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$ (második disztributív törvény).

b) Ha a $\overline{c}$ vektor is és a $\overline{d}$ is merőleges az adott oly $\overline{a}$, valamint $\overline{b}$-vektorra, amelyek iránya egymástól különbözik, akkor a $\overline{d}$-vektor egyben a $\overline{c}$-nek megnyújtottja.

B) *Analitikus modell, térgörbe jellemzése*

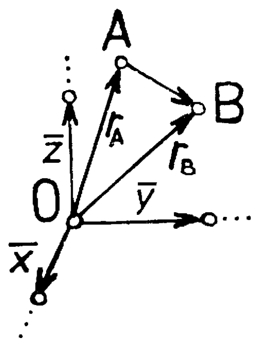
20. def. Legyen az $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ inercia-rendszerben az $\overline{OA} = \overline{r}_A$ szabályos vektor. Az $\overline{r}_A$ vektor az A nyugvó végpontjának helyzetét jellemezni képes. Ezért az $\overline{r}_A$-t az A-pont *helyzetvektorának nevezhetjük.*

Az $\overline{r}_A$ vektornak a 23. és 25. korolláriumban értelmezett derékszögű komponenseit a $[x_A, y_A, z_A]$ számhármassal jelöljük, amelyekre éppen ezért fennáll:

$$\overline{r}_A = x_A \cdot \overline{x} + y_A \cdot \overline{y} + z_A \cdot \overline{z} .$$

28. koroll. Számítsuk két oly A és B (nyugvó) pont $\overline{AB}$ távolságának négyzetét, amelynek $\overline{r}_A$ és $\overline{r}_B$ helyvektoraihoz rendre az x_A, y_A, z_A és x_B, y_B, z_B komponensek tartoznak (16. ábra). Képezzük e célból a 15. def. alapján az $\overline{r}_A \overline{r}_B$ skaláris szorzatot:

$$\overline{r}_A \overline{r}_B = \frac{1}{2} (r_A^2 + r_B^2 - |\overline{AB}|^2) .$$



16. ábra

Fejezzük ki innen a keresett $\overline{AB}^2$-et:

$$|\overline{AB}|^2 = r_A^2 + r_B^2 - 2\overline{r}_A \overline{r}_B ,$$

és alkalmazzuk (visszafelé) a VII. axiomával kifejezett disztributív törvényt:

$$|\overline{AB}|^2 = (\overline{r}_A - \overline{r}_B)^2 .$$

Innen egyben rögtön azt is látjuk, hogy *két vektor különbségének értékét a végpontok távolsága is megadja.*

Végül a jobboldali skaláris szorzatot a 25. és a 24. b) koroll. alapján fejezzük ki komponensekkel. Ekkor a keresett formula (amely az inercia-rendszerben ún. *euklidesi* hosszmértékviszonyokat határoz meg):

$$|\overline{AB}|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 .$$

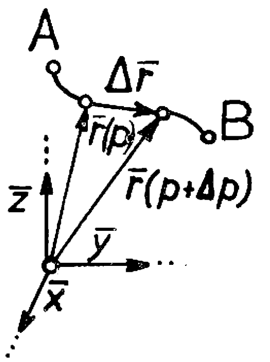
Ezzel világossá vált, hogy az inercia-rendszer „terének" bármely nyugvó pontjához 3-elemű reális értékrendszert tudunk rendelni, éspedig kölcsönösen és egyértékűen, sőt e számhármasok segítségével a pontpárokhoz tartozó távolságértékeket ki tudjuk számítani. Ezáltal egyben valamennyi axiómánkat is meg tudjuk fogalmazni, csakhogy pont helyett számhármast kell mondanunk. Minthogy pedig a hozzárendeléshez igénybe kellett vennünk a 2. §-ban felsorakoztatott valamennyi axiómát és definíciót, ezért bízvást állíthatjuk, hogy axiómarendszerünk ugyanúgy ellentmondásmentes, akár az analízis.

21. def. (Későbbi hivatkozások céljából.)

a) Legyenek a reális p paraméternek az $x = s(p)$; $y = y(p)$; $z = z(p)$ folytonos (szintén reális) és egyértékű függvényei. Ekkor az $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ inercia-rendszerben az

$$\overline{r}(p) = x(p)\cdot\overline{x} + y(p)\cdot\overline{y} + z(p)\cdot\overline{z} \qquad \text{(a)}$$

komponens-előállítással értelmezett $\overline{r}(p)$ helyvektor végpontja a p különböző lehetséges értékeinél egy *ún. térgörbének* pontjait képezi (17. ábra). A p-paraméterül célszerű az ún. *ívhosszúságot* választani.



17. ábra

b) Az $\overline{r} = \overline{r}(p)$ térgörbe *ívhosszúságát* ($i_{AB} = t$) a p_A és p_B paraméterértékekkel jellemzett A és B pontja között a térgörbe A és B pontja közé beiktatható összes lehetséges $\Delta \bar{r}$ hurpoligonok hosszúságának (értsd: értékösszegének) felső határa definiálja:

$$\sigma_{AB} = \lim \sum_{A}^{B} |\Delta \bar{r}| . \qquad \text{(b)}$$

Itt hallgatólag feltételezzük azt, hogy a felírt határérték létezik, ha a közbeiktatott pontok számát minden határon megnöveljük, ezzel minden $\Delta \bar{r}$ húr hosszúságát végnélkül kisebbítjük.

Tegyük fel, hogy az $\bar{r}(p)$-t értelmező $x(p)$, $y(p)$, $z(p)$ függvények mindegyike a p-szerint legalább egyszer differenciálható. (Ekkor e függvények egyszersmind a 21. def. a)-beli folytonossági követelményünknek is eleget tesznek.) Ezért létezik a

$$\frac{dx}{dp} \cdot \bar{x} + \frac{dy}{dp} \cdot \bar{y} + \frac{dz}{dp} \cdot \bar{z} = \frac{d\bar{r}}{dp} \qquad \text{(c)}$$

függvény is. E feltételek mellett a (b)-vel definiált

$$\sigma_{AB} = \int_{p_A}^{p_B} |d\bar{r}| = \int_{p_A}^{p_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2} \cdot dp . \qquad \text{(d)}$$

Ha ezután a p_B-t változónak tekintjük és p-vel rövidítjük, akkor:

$$\sigma_{A\cdot} = \int_{p_A}^{p} \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dp}\right) + \ldots} \, dp . \qquad \text{(e)}$$

Ezért az $\bar{r}(p)$-t egyben a görbe A pontjától számított $\sigma_{A\cdot}$ ívhossz-paraméter $\bar{r}(\sigma_{A\cdot})$ függvényének is felfoghatjuk (l. 33. def.-ban).

Világos egyszersmind, hogy

$$\frac{d\sigma_{A\cdot}}{dp} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dp}\right) + \left(\frac{dy^2}{dp}\right) + \left(\frac{dz^2}{dp}\right)} . \qquad \text{(f)}$$

Ezért az (a)-val adott térgörbe ún. *érintőirányát* a

$$\frac{d\bar{r}}{d\sigma_{A\cdot}} = \frac{d\bar{r}}{dp} \bigg/ \frac{d\sigma_{A\cdot}}{dp} \qquad \text{(g)}$$

egység-vektor szolgáltatja.

D) *Párhuzamos, valamint sík-vektorok bevezetése*

Itt csakis oly fogalmakat értelmezünk és vizsgálunk, amelyekre a kinematika megalapozásában (4. §) okvetlenül szükségünk lesz.

Az itt közölt korolláriumok ugyan analitikusan (értsd: vektor-komponensek segítségével is) könnyen igazolhatók, mégis igyekezünk inkább a direkt bizonyításukat vázolni.

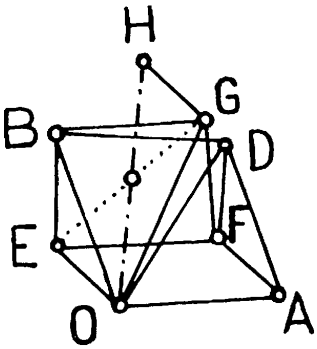
22. def. A vektori összeg értelmezésénél (13. def.) egyszersmind fellépő $\overline{BD}$ vektort (l. 10. ábrán), amelynek kezdőpontja tehát az $\overline{OB}$ végpontjával, végpontja pedig az $\overline{OD}$ ($= \overline{OA} + \overline{OB}$) összeg végpontjával egyezik, az $\overline{OA}$ vektor *B-pontbeli párhuzamos vagy parallel másának* (képének vagy átvittjének) nevezzük és e tulajdonságot így jelöljük: $\overline{OA} \parallel \overline{BD}$.

29. koroll. Ha $\overline{BD}$ az $\overline{OA}$ vektor (B-pontbeli) parallel mása, akkor fordítva, az $\overline{OA}$ vektor is parallel mása $\overline{BD}$-nek (az O-pontban) és a 28. miatt értékük egyszersmind meg is egyezik.

30. koroll. Az $\overline{OA}$ vektornak tetszőleges B-pontban van egy és csakis egy parallel mása (az összegnek a 13. def. végén kifejtett „egyértékűsége" miatt).

31. koroll. A vektorok *párhuzamossága tranzitív.* Ha tehát $\overline{OA}$ vektornak az E pontban párhuzamos mása az $\overline{EF}$ vektor ($\overline{OA} \parallel \overline{EF}$), továbbá ennek a B-pontban párhuzamos mása a $\overline{BG}$ vektor ($\overline{EF} \parallel \overline{BG}$), akkor a $\overline{BG}$ vektor egyszersmind az $\overline{OA}$-nak is párhuzamos mása ($\overline{BG} \parallel \overline{OA}$).

Az a $\overline{BD}$ vektor, amely $\overline{OA}$-nak a B-ben párhuzamos mása, megegyezik ugyanis $\overline{BG}$-vel, mert $\overline{DG} = 0$ (18. ábra) az $\overline{OG} = \overline{OD}$ miatt. A 20. def., valamint a 9. és 25. korollárium jóvoltából ugyanis: $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB}$; viszont az $\overline{OG} = \overline{OH} - \overline{OE}$, ahol $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OE} + \overline{OB} = \overline{OF} + \overline{OB}$, tehát $\overline{OG} = \overline{OF} - \overline{OE} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OB}$, és ezzel $\overline{OD} = \overline{OG}$, amit bizonyítani akartunk.



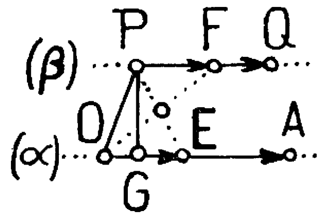
18. ábra

23. def.

a) Két egyenest (l. 9. def.) akkor mondunk egymással párhuzamosnak, ha annak a két vektornak iránya (7. def.), amely a két egyenest meghatározza, egymásnak párhuzamos mása.

A 19. ábrára nézve tehát az $\overline{OA}$ és a $\overline{PQ}$ vektor által meghatározott (α) és (β)-egyenes akkor párhuzamos: $(\alpha) \parallel (\beta)$, ha $\overline{OA} = a \cdot \overline{OE}$, $|\overline{OE}| = 1$; $\overline{PQ} = q \cdot \overline{PF}$ és $\overline{OE} \parallel \overline{PF}$. Fennáll pl. $(\alpha) \parallel (\alpha)$ is.

b) A 19. ábra (α)-egyenesén a G-pontot a párhuzamos (β)-egyenes P-pontjára nézve akkor mondjuk *átellenes pontnak,* ha a $\overline{GP}$ merőleges az (α)-ra, vagyis $\overline{GO} \cdot \overline{GP} = 0$. Ilyen G a 18. koroll. miatt okvetlenül létezik.



19. ábra

32. koroll. Ha az (α)-egyenes G-pontja átellenes pontja a párhuzamos (β)-egyenes P-pontjának, akkor fordítva P is átellenes pontja G-nek.

E tétel belátására ki kell mutatnunk, hogy a 19. ábra jelöléseivel $\overline{PG}\cdot\overline{PF}=0$. Valóban a kiindulási feltevés miatt $\overline{GO}\cdot\overline{GP}=0$, tehát (15. koroll.) $|\overline{GP}|^2=|\overline{OP}|^2-|\overline{GO}|^2$, ahol a 18. koroll. értelmében $\overline{OG}=\gamma\cdot\overline{OE}$, vagyis $|\overline{OG}|^2=\gamma^2|\overline{OE}|^2$ és itt

$$\gamma=\overline{OE}\cdot\overline{OP}/|\overline{OE}|^2. \qquad \text{(a)}$$

Ezért egyik előbbi egyenletünk miatt:

$$|\overline{GP}|^2=|\overline{OP}|^2-\gamma^2\cdot|\overline{OE}|^2, \qquad \text{(b)}$$

másrészt a 28. koroll.-t alkalmazva a $\lambda\equiv\gamma$ és $\overline{OE}\equiv a$, $\overline{OF}\equiv\overline{OE}+\overline{OP}\equiv b$ esetre:

$$\gamma\,(\overline{OE}\cdot\overline{OF})=(\gamma\,\overline{OE})\cdot\overline{OF}=\overline{OG}\cdot\overline{OF}. \qquad \text{(c)}$$

Itt a jobboldal a 15. def miatt $\overline{OG}\cdot\overline{OF}=\frac{1}{2}(|\overline{OG}|^2+|\overline{OF}|^2-|\overline{GF}|^2)$, ahonnan $|\overline{GF}|^2=$

$=|\overline{OG}|^2+|\overline{OF}|^2-2\cdot\overline{OG}\cdot\overline{OF}$.

A (c) baloldalának felhasználásával pedig:

$$|\overline{GF}|^2=|\overline{OG}|^2+|\overline{OF}|^2-2\gamma\cdot(\overline{OE}\cdot\overline{OF}) \quad \text{és ebből (a) alapján}$$

$$|\overline{GF}|^2=|\overline{OP}|^2+|\overline{OE}|^2(1-\gamma^2). \qquad \text{(d)}$$

Minthogy a 32. koroll. miatt $|\overline{PF}|=|\overline{OE}|$, ezért (a) alapján

$$|\overline{PF}|^2+|\overline{PG}|^2=|\overline{OE}|^2+|\overline{OP}|^2-\gamma^2|\overline{OE}|^2=|\overline{OE}|^2(1-\gamma^2)+|\overline{OP}|^2,$$

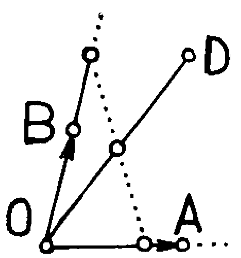
ami (d)-vel egyezik, vagyis a 15. kor. megfordítása alapján $\overline{PG}\cdot\overline{PF}=0$. Ezt akartuk bizonyítani.

33. koroll. Ugyanazon párhuzamos egyenespáron tetszőlegesen felvett két átellenes pontpár távolságértéke megegyezik.

24. def. Két párhuzamos egyenes távolságán („közén") *két* átellenes pontjának távolságát értjük.

25. def. Az $\overline{OD}$ *vektor* akkor *esik* az egymástól eltérő irányú $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektor *síkjára* (20. ábra), ha találunk oly a és b reális számot, amellyel $\overline{OD}$ a következő alakban adható meg:

$$\overline{OD}=a\cdot\overline{OA}+b\cdot\overline{OB}.$$



20. ábra

34. koroll. Egy vektornak valamely síkra esése *tranzitív* tulajdonság. Vagyis ha az $\overline{OA}$-tól eltérő irányú $\overline{OD}$ is és $\overline{OF}$ is az egymástól eltérő irányú $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektor síkjára esik, akkor egyszersmind $\overline{OF}$ az $\overline{OA}$ és az $\overline{OD}$ síkjára esik.

Valóban, a feltevés miatt: $\overline{OD} = a_D \cdot \overline{OA} + b_D \cdot \overline{OB}$, és $\overline{OF} = a_F \cdot \overline{OA} + b_F \cdot \overline{OB}$,

ahol a kikötésünk értelmében $b_D \neq 0$. Fejezzük ki az első egyenletből $\overline{OB}$-t:

$$\overline{OB} = \frac{1}{b_D} \cdot \overline{OD} - \frac{a_D}{b_D} \cdot \overline{OA},$$

és helyettesítsük a másodikba:

$$\overline{OF} = a_F \cdot \overline{OA} + \frac{b_F}{b_D} \cdot \overline{OD} - \frac{b_F \cdot a_D}{b_D} \cdot \overline{OA} = \left(a_F - \frac{b_F \cdot a_D}{b_D}\right) \cdot \overline{OA} + \frac{b_F}{b_D} \cdot \overline{OD},$$

ami éppen állításunkat igazolja.

26. def. Az $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ *vektorhármast lineárisan függetlennek* akkor mondjuk, ha az $a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC}$ vektori összeg csakis akkor zérus, ha $a = b = c = 0$.

35. koroll. A VIII. ax.-ban említett $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektorok, amelyek egymástól eltérő irányúak, és az ezekre merőleges $\overline{OD}$ vektor lineárisan független vektorhármast alkotnak.

Ez állítás bizonyítására megmutatjuk, hogy tagadása ellentmondás (hamis). Tegyük fel tehát, hogy nem az állítás, hanem annak ellenkezője igaz, vagyis van oly a, b, d szám, amely közül legalább az egyik nem zérus, és amelyre mégis

$$a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + d \cdot \overline{OD} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Először megmutatjuk, hogy az egyenlet fennállása esetén a három szám közül a d semmi esetre sem lehet véges. Szorozzuk ugyanis ezt az egyenletet $\overline{OD}$-vel, ekkor a merőlegesség kikötése miatt $d \cdot |\overline{OD}|^2 = 0$ egyenlethez jutunk, ahol $|\overline{OD}|^2 \neq 0$, tehát ahonnan valóban $d = 0$ adódik.

Ezért (a) okvetlenül az $a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} = 0$ egyenletre egyszerűsödik. Ez azonban sem $a \neq 0$, $b = 0$ (I), sem az $a = 0$, $b \neq 0$ (II), sem pedig az $a \neq 0$, $b \neq 0$ (III) esettel nem fér meg. Ugyanis belőle az I esetben $b = 0$ mellett mégis az $a = 0$, a II-ban

$a = 0$ mellett mégis a $b = 0$, a III-ból pedig az következne, hogy $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektorok mégis egyirányúak, noha a kiindulásnál (VIII. ax.) ennek ellenkezőjét tételeztük fel.

4. §. A relativisztikus kinematika alapelvei

A) *Időkontinuum*

27. def. Az **A**-pont valamely tulajdonságának legelemibb megváltozását az **A**-pont *eseményének* nevezzük. Ezt a következőkben megfelelő görög kisbetűvel, α-val fogjuk jelölni.

IX. ax. Mindig el tudjuk (objektíven) dönteni azt, hogy ugyanazon **A**-ponton az egyik α'-esemény egy másik α''-nél *későbbi-e* (ennek jele: $\alpha' \cdot > \alpha''$) vagy sem.*

28. def. Ugyanazon **B**-pontnak viszont két oly β'- és β''-eseményét, amely közül egyik sem későbbi a másiknál, *szimultánnak* nevezzük: $\beta' \overline{\underline{\cdot}} \beta''$.

X. ax. Az események *kontinuumot* alkotnak. Vagyis ugyanazon pontnak eseményei a „később" rendező állítással (*Dedekind-féle* szeléssel) úgy rendezhetők, akár a reális számok.

29. def. Ha az **E**-pont az **A**-hoz képest mozog, akkor az **E**-pont esetleg *„át"* is *„haladhat"* **A**-n. Az *„áthaladás"* pillanata az **A**-n egy α-eseményt határoz meg, amelyet $\alpha \overline{\underline{\cdot}}$ (**A**, **E**)-vel jelölhetünk. Ha az **E** az **A**-n áthalad, akkor fordítva az **A** is áthalad az **E**-n, és ezzel **E**-n szintén egy $\varepsilon\{\overline{\underline{\cdot}}$ (**E**,**A**)$\}$val jelölendő eseményt „vált ki".

XI. ax. Két pont *koincidenciáját,* más szóval kölcsönös áthaladását egymáson kategorikusan megítélhetőnek tartjuk, akár a mozgást.

A következőkben nem zárjuk ki azt, hogy az **A**- és az **E**-pont megszámlálható módon egymásután *többször* is áthaladjon egymáson.

XII. ax. Három tetszőleges pont kölcsönös *áthaladása* egymáson *tranzitív.* Ha tehát **A**-n az **E** is és ugyanakkor **F**-pont is áthalad, vagyis (**A**, **E**) $\overline{\underline{\cdot}}$ (**A**, **F**), akkor az **E** és **F** is okvetlen áthalad egymáson.

36. koroll. A XII. ax. feltételei szerint egyszersmind

(**E**, **A**)   (**E**, **F**) és (**F**, **A**) $\overline{\underline{\cdot}}$ (**F**, **E**).

B) *Téridő-kontinuum (világ)*

XIII. ax. A mozgó **E**-pont bármely lehetséges ε eseményekor találunk az inercia-rendszerben (3. § 18. def.) egy és csakis egy nyugvó **A**-pontot, amelyen az **E** éppen áthalad [$\varepsilon \overline{\underline{\cdot}}$ (**E**, **A**)]. Az **E** mozgásakor csakis egy folytonos térgörbe *(„pályagörbe")* pontjain haladhat át éspedig, ha ezek mindegyikén történetesen csakis egyszer halad át, akkor a térgörbén az **E**-nek későbbi eseményekor letapintott ponthoz mindig egyszersmind nagyobb abszolút értékű ívhosszúság tartozik.

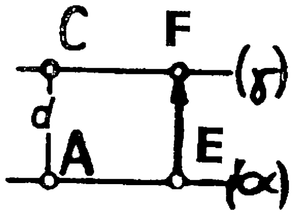
---

* Lábjegyzet: Ennek egyetlen objektív kritériuma az **entrópia** növekedésének iránya.

XIV. ax. Ha az **E**-pont az inercia-rendszerben nyugvó (α) egyenesen mozog, okkor tetszőleges a nem negatív reális számhoz mindig mozgathatunk az (α)-n legalább egy oly **G**-pontot is, hogy **E** és **G** egymáshoz képest merev és $|\overline{EG}| = a$.

XV. ax. Ha az **E**-pont egy, az inercia-rendszerben nyugvó (α) egyenesen mozog, akkor tetszőleges d-közű (γ) párhuzamos egyenesen mindig mozgathatunk az **E**-hez képest merev oly **F**-pontot is, hogy $|\overline{EF}| = d$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy (α), (γ) párhuzamos egyenespáron az **E** és **F**-pont „átellenesen" mozog (21. ábra).



21. ábra

XVI. ax. Ha az előző ax.-ban említett **E**-pont az (α)-egyenes nyugvó **A**-pontján egyszer áthalad, akkor az **F**-pont is egyszer okvetlenül áthalad a (γ)-egyenesnek **A**-val átellenes **C**-pontján.

Vagyis jelöléseinkkel élve: az **E**-pont $\varepsilon \doteq (\mathbf{E}, \mathbf{A})$ eseményéhez okvetlenül tartozik az **F**-pontnak is egy $\varphi \doteq (\mathbf{F}, \mathbf{C})$ eseménye és fordítva.

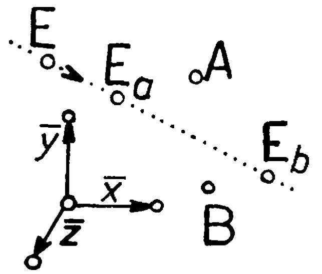
30. def. Ha az $\overline{EF}$ vektor a XVI. ax.-ban említett módon, tehát *„harántirányban"* halad át a vele egyező értékű $\overline{AC}$-n, akkor a nyugvó **A**-nak $\alpha \doteq (\mathbf{A}, \mathbf{E})$ és a **C**-nek $\gamma \doteq (\mathbf{C}, \mathbf{F})$ eseményét egymással egyidejűnek mondjuk, és a tényt $\alpha \doteq \gamma$-val jelöljük. Valamely nyugvó vektor kezdő- és végpontján egy-egy eseménynek *egyidejűsége* tehát *szimmetrikus* tulajdonság.

XVII. ax. Ugyanazon inercia-rendszer nyugvó pontjain az *események egyidejűsége tranzitív.* Ha tehát az **A**-, **B**-, **C**-pont ugyanazon inercia-rendszernek nyugvó pontjai, és az **A**-nak α-eseményével egyaránt egyidejű **B**-nek β, valamint a **C**-nek γ-eseménye $\{\alpha \doteq \beta,\ \alpha \doteq \gamma\}$, akkor β és γ egyszersmind egymással is egyidejű $(\beta \doteq \gamma)$.

XVIII. ax. Valamely inercia-rendszerben mozgó bármely inerciális pont csakis ugyanazon nyugvó egyenesnek pontjain haladhat át, éspedig csupán egyszer, és annak bármely pontján áthalad. Más inerciális pontnak pedig általában más pálya-egyenes felel meg (LANGE I. *megállapítása).*

31. def. Az (**O, X, Y, Z**) inercia-rendszerben nyugvó **A**- és **B**-pont α és β-eseménye időközt határoz meg, és ezt egy (α, β)-val jelölendő reális számmal akarjuk jellemezni, vagyis mérni, akár az egyenesdarabot (szakaszt) szoktuk. — Megköveteljük, hogy egymást közvetlenül követő időközökből összetevődő időköz $\{\alpha \cdot > \beta \cdot > \gamma\}$ mértékszáma az egyes időközök mértékszámának összege legyen, vagyis teljesüljön az $(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta) + (\beta, \gamma)$ egyenlet.

32. def. A nyugvó **A**- és **B**-ponton az időközt órával mérhetjük. Óraul LANGE javaslatára az inercia-rendszerben a XVIII. ax. értelmében egy (ε)-egyenesen végighaladó egyszer és mindenkorra kiválasztott E inerciális pontot használhatunk fel, éspedig azáltal (22. ábra), hogy az **A**-pont α- és a



22. *ábra*

B-pont β-eseményekor a 30. def. alapján megállapítjuk E-nek az egyidejű helyét, vagyis az óra (ε) pályaegyenesén azt a nyugvó két $\mathbf{E}_a$- és $\mathbf{E}_b$-pontot, amelyen az E éppen az **A**-nak α-, ill. **B**-nek β-eseményével egyidejűen halad át. Az $\mathbf{E}_a$- és $\mathbf{E}_b$-pont $|\overline{\mathbf{E}_a\mathbf{E}_b}|$ távolsága egyben az **A**-n, ill. **B**-n lejátszódó (α, β) időközt is arányos módon jellemezni, vagyis mérni képes $\{(\alpha, \beta) = \varkappa\, |\overline{\mathbf{E}_a\mathbf{E}_b}|\}$, mert a XVIII. ax. miatt a mérőszámra vonatkozó 31. def.-beli követelést kielégíti. A $\varkappa$ arányossági tényező egyszer és mindenkorra tetszőlegesen választható meg. Ezzel az időmérést lényegileg távolságmérésre sikerül visszavezetnünk.

A legegyszerűbb esetben az **A**- és **B**-pont megegyezik, ekkor az (α, β) helyi időt mér.

Ha azonban az **A** és **B** közül akár csak az egyik is nem nyugvó pontot jelent, akkor a 30. def.-ban értelmezett egyidejűség és a XVII. ax. is érvényét veszti. Ezért csakis nyugvó pontpáron lejátszódó eseménypár időközéről beszélhetünk.

33. def. Ha a XIII. ax. második részében említett mozgó **E**-pontnak inercia-rendszerben letapintott *pályáját* az $\bar{r} = \bar{r}(\sigma)$ térgörbe (2. § 21. def.) adja meg, ahol σ a görbe nyugvó **A**-pontjától számított ívhosszparaméter, akkor az **E**-pont *sebességén* az

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

vektor-mennyiséget értjük, ahol $d\sigma$ a térgörbén az az ívhossz, amelyet az **E**-pont a XIII. ax.-nak megfelelően, és 32. def. alapján mérve az inercia-rendszerben egy határtalanul kicsiny dt (>0) időköz alatt tapint le, feltéve, hogy a $d\bar{r}/d\sigma$ irány és a $d\sigma/dt$ létezik.

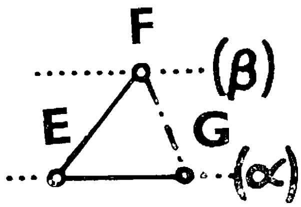
Az $\dot{r}$ megszabja az **E** pályamenti mozgásának irányát is.

37. koroll. Ha a XVI. ax.-ban említett **E**-pont (l. 21. ábra) a nyugvó **A**-pontot tartalmazó (α) egyenesen állandó v sebességgel mozog az $\overline{\mathbf{AB}}$ irányban, akkor az **F**-pont is v sebességgel mozog a (γ) egyenesen a **CD** irányban.

XIX. ax. Ugyanazon inercia-rendszerben bármely E mozgó inerciális pont sebességének értéke állandó (tehát nemcsak a 32. def.-ban említett órapontté, ez LANGE II. megállapítása).

38. koroll. Ezért a XVIII. ax. miatt is az E pontnak egyszersmind a sebességvektora is állandó.

XX. ax. Valahányszor az inercia-rendszerben az **E**-pont az (α) nyugvó egyenesen állandó sebességgel mozog, és ezen mozog az **E**-hez képest merev **G** is, míg az **E**-hez szintén merev **F**-pont csakis a párhuzamos (β)-egyenesen, mindannyiszor az **F** és **G** merev is egymáshoz képest (23. ábra).



23. ábra

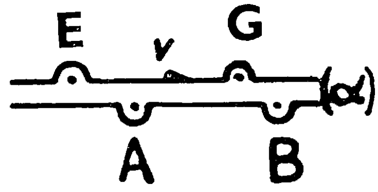
Ez az ax. természetesen akkor is érvényes, ha az (α) és (β) egyenes egybeesik egymással.

XXI. ax. Ha a nyugvó (α)-egyenesen az **E**-pont állandó sebességgel mozog, és ezen tartózkodik az **E**-hez képest merev **G** is, a d-közű (β) párhuzamos egyenesen pedig az **E**-hez szintén merev oly **F**-pont, amelyre a XV. ax.-nak megfelelően éppen $|\overline{\mathbf{EF}}| = d$ (21. ábra), akkor $\overline{\mathbf{EF}}$ és $\overline{\mathbf{EG}}$ egymásra merőleges.

XXII. ax. Ha az **E**-pont az inercia-rendszerben nyugvó (α) egyenesen állandó v-sebességgel mozog, és ugyanazon tartózkodik az **E**-hez képest merev **G**-pont is, továbbá az **E**-pont az (α)-egyenes nyugvó **A**-pontján, a **G**-pont pedig a nyugvó **B**-pontján egyidejűen halad át (24. ábra), akkor a

$$c^2 = \frac{v^2 |\overline{\mathbf{EG}}|^2}{|\overline{\mathbf{EG}}|^2 - |\overline{\mathbf{AB}}|^2}$$

mennyiséget mindig ugyanazon pozitív univerzális állandónak találjuk. (Gyökének ($c > 0$) neve fénysebesség; ez a LORENTZ-*kontrakció* elve.)



24. ábra

39. koroll. A XXII. ax.-ban a c^2-t megadó azonosságból

$$|\overline{\mathbf{AB}}| = |\overline{\mathbf{EG}}| \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}\,.$$

40. koroll. A $v = c$ esetén a 39. koroll.-ból $\overline{\mathbf{AB}} = 0$ következne. Ez azonban lehetetlen, mert ez esetben *két soha egybe nem eső pont:* **E** és **G** mégis *egyszerre haladna* át egy harmadik (**A**)-ponton, a XII. ax.-val szöges ellentétben. Ezért csakis a $v < c$ eset következhetik be, vagyis egy vektor az inercia-rendszerben legalábbis a saját irányában csakis c-nél *kisebb* v sebességgel mozoghat.

41. koroll. A XXII. ax.-ban említett **G**-pont is állandó v-sebességgel mozog (α)-n. Tehát a XXII. ax.-ban az **E**- és **G**-pontok valójában szimmetrikusan szerepelnek.

42. koroll. Ha az **E**-, **F**-, **G**-pontok az inercia-rendszernek ugyanazon nyugvó $|\mathbf{OX}|$-egyenesén egyező irányú és nagyságú állandó v-sebességgel haladnak, vagyis e pontok éppen ezért a XX. ax. $\{(\alpha) = (\beta)\}$ alapján egymáshoz képest bármely párosításukban merevek, akkor az $\overline{\mathbf{EG}}$ vektor az $\overline{\mathbf{EF}}$-nek egyszersmind megnyújtottja: $\overline{\mathbf{EG}} = \gamma \cdot \overline{\mathbf{EF}}$. Sőt az $\overline{\mathbf{EF}}$ a XIV. ax. jóvoltából korlátlanul megnyújtható, vagyis a 7. def.-nak megfelelő *szabályos* vektor, mert per def. $\overline{\mathbf{OX}}$ is szabályos.

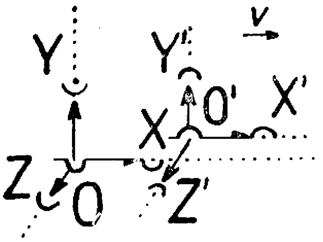
A klasszikus geometria nyelvén szólva ez azt jelenti, hogy egy egyenes önmagában (legalábbis állandó sebességgel) eltolható: tehát a mozgás következtében nem „lép ki" egyetlen pontja sem az egyenesből.

Ez a megállapítás a 2. § 4. def.-jából és a XII. ax.-ból következik.

34. def. Egyenletes transzlációval mozgó vonatkoztatási rendszer értelmezése.

Mozogjon az **O**, **X**, **Y**, **Z** inercia-rendszer $\overline{\mathbf{OX}} \equiv \overline{x}$ tengelyén az az O'-pont, amelynek pálya-egyenlete: $x_{0'} = v \cdot t$, ahol v $(< c)$ állandó.

A XIV. ax. és 42. koroll. miatt okvetlenül mozgathatunk az x-tengelyen oly X'-pontot is, amely az O'-hoz képest merev és $|\overline{\mathrm{O'X'}}| = 1$ (25. ábra).



25. ábra

A XV. ax. jóvoltából tudunk ezenfelül egy az **Y**-ponton átfektetett és az x-szel párhuzamos egyenesen „átellenesen" mozgatni egy és csakis egy Y'-pontot, amelyre éppen ezért $|\overline{O'Y'}| = 1$ és a XXI. ax. miatt még $\overline{O'Y'} \cdot \overline{O'X'} = 0$. Azonos módon vehetünk fel végül egy Z'-pontot is azáltal, hogy az előbbi mondatban **Y** és Y' helyett **Z**-t és Z'-t írunk. Így eljutottunk az O', X', Y', Z' orthonormált vonatkoztatási rendszer értelmezéséhez, amely az **O, X, Y, Z** inercia-rendszerben egy mozgó vonatkoztatási rendszer $\overline{\mathbf{OX}}$-irányú egyenletes (v-sebességű) transzlációjának fogható fel.

43. koroll. A 34. def.-ban értelmezett $\overline{O'X'}$ a 42. koroll. alapján korlátlanul megnyújtható, vagyis szabályos vektor. De a XV. ax. alapján beláthatjuk azt is, hogy az $\overline{O'Y'}$ és $\overline{O'Z'}$ is korlátlanul megnyújtható vektorok, mert $\overline{\mathbf{OY}}$ és $\overline{\mathbf{OZ}}$ egy inercia-rendszernek tengelyei, amelyek éppen ezért korlátlanul megnyújthatók. Ezért az O', X', Y', Z' vonatkoztatási rendszert is inercia-rendszernek kell minősítenünk. Az **O, X, Y, Z** inercia-rendszernek a 32. def.-ban említett órapontjául pedig célszerűen akár az O'-pontot is választhatjuk, és fordítva: az O', X', Y', Z' rendszer órapontja viszont maga az **O**-pont is lehet.

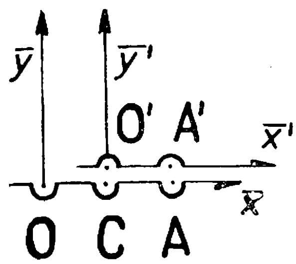
Fenti megfontolások egyben azt is bizonyítják, hogy az O', sőt bármely állandó sebesség-vektorú pont is inerciális.

C) *Két inercia-rendszer kapcsolata (Lorentz-transzformáció)*

Ugyanazon eseménynek (pl. két pont egymáson való áthaladásának) mind az **O, X, Y, Z** inercia-rendszerben, mind a 34. def. szerint hozzá képest mozgó O', X', Y', Z'-ben beszélhetünk helyéről és idejéről, amelyet az x, y, z, ill. x', y', z' tér-koordinátákkal és a t, ill. t' idő-koordinátával adhatunk meg.

44. koroll. Egy esemény tér-koordinátáinak átszámítása mozgó inercia-rendszerre.

a) Szorítkozzunk először az x-tengelyen lejátszódó $a = (\mathbf{A}, A')$ eseményre. Nevezetesen nyugodjék a 34. def.-ban értelmezett O', X', Y', Z' mozgó vonatkoztatási rendszernek $\overline{O' X'} = \overline{x}$'-tengelyén az A'-pont (26. ábra). Ez az A'-pont az **O, X, Y, Z** inercia-rendszer $\mathbf{OX} \equiv \overline{x}$ tengelyén nyugvó tetszőleges **A**-ponton a 42. koroll. értelmében okvetlenül áthalad valamely t-időben.



26. ábra

Ugyanazon t-kor az O'-pont viszont szükségképpen az $\overline{x}$-tengelynek valamely **C** nyugvó pontján halad át, amelyre nézve a 34. def. értelmében $|\overline{\mathbf{OC}}| = v \cdot t$.

Ezért a 39. koroll. miatt

$$x' = |\overline{O' A'}| = \frac{|\overline{\mathbf{CA}}|}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Itt azonban

$$|\overline{\mathbf{CA}}| = |\overline{\mathbf{OA}}| - |\overline{\mathbf{OC}}| = x - vt .$$

Tehát

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \qquad \text{(a)}$$

b) Ha az a)-ban említett **A**-pont y és z koordinátája nem zérus, akkor az a)-beli levezetést nem az $\overline{x}$-tengely mentén, hanem egy ezzel párhuzamos oly tengelyen kell megismételni, amely átmegy az $x = o, y \neq o, z \neq o$ ponton. Ekkor x'-re az a)-belivel azonos kifejezés adódik, viszont a O', X', Y', Z'-ben a XV. ax. és a 32. def. értelmében:

$$y' = y ; \; z' = z . \qquad \text{(b)}$$

Az a)- és b)-beli egyenletek éppen a címben felvetett feladat megoldását, vagyis a térkoordináták *speciális Lorentz-féle transzformációját* állítják elő.

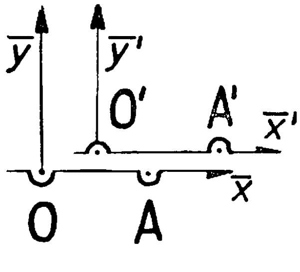
45. koroll. Két esemény időközének kifejezése a mozgó inercia-rendszer időmértékével.

A 34. def.-val értelmezett és a 43. koroll.-ban inerciálisnak talált O', X', Y' Z' vonatkoztatási rendszerben órapontul legegyszerűbben az **O**-pontot választhatjuk. Csakhogy a 32. def.-ban említett tetszőleges $\varkappa$ arányossági tényezőt itt az EINSTEIN által felismert *reciprocitási elv* alapján célszerű megválasztanunk, vagyis úgy, hogy

valahányszor O' sebessége az **O, X, Y, Z**-*ben (állandó) v, mindannyiszor az* **O** *sebessége az O', X', Y', Z'-ben —v legyen.*

Más szóval: mozgó O', X', Y', Z' inercia-rendszer ne legyen az **O, X, Y, Z**-hez képest kitüntetve.

Legyen (a 44. koroll.-hoz hasonlóan) A' az $\overline{O'X'} \equiv \overline{x}'$ tengelynek egy nyugvó pontja (l. 27. ábrát, amely a 26. ábrától csak abban különbözik, hogy most $|\overline{\mathbf{OC}}| = 0$).



27. ábra

A $t = 0$ időben O' áthalad **O**-n, de ezzel az eseménnyel egyidejűen az A' is okvetlenül áthalad az $\overline{x}$-tengely valamely nyugvó **A**-pontján. A 34. def.-ban értelmezett O'-pont pálya-egyenlete miatt a

$$t = |\overline{\mathbf{OA}}|/v \qquad \text{(a)}$$

időköz eltelte után pedig szükségképpen az O'-pont halad át az **A**-n. Ez a két áthaladási esemény {jelöléseinkkel: (O', **O**) és (O', **A**)} az O'-n a t' időközt határozza meg, amelytől a reciprocitási elv megköveteli, hogy

$$t' = |\overline{O'A'}|/v \qquad \text{(b)}$$

értékű legyen.

A 39. koroll. alapján azonban:

$$|\overline{O'A'}| = |\overline{\mathbf{OA}}| \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}\,.$$

Ezt az egyenletet a következő alakban is írhatjuk:

$$|\overline{O'A'}| = \frac{|\overline{\mathbf{OA}}| - \dfrac{v^2}{c^2}|\overline{\mathbf{OA}}|}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad \text{(c)}$$

Itt az (O', **A**) esemény helykoordinátái: $x = |\overline{\mathbf{OA}}|$; $x' = |\overline{O'A'}|$. Ezért (a) és (b) alapján: $x = v \cdot t$ és $x' = v \cdot t'$. E jelölésekkel (c) így alakul:

$$v \cdot t' = \frac{vt - \dfrac{v^2}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Ezt az egyenletet v ($\neq 0$)-vel osztva a keresett

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad \text{(d)}$$

egyenlethez jutunk, amely megadja az **O, X, Y, Z**-ben t időben és az x-koordinátájú helyen lejátszódó esemény t' idejét az x irányban állandó v sebességgel mozgó O', X', Y', Z' vonatkoztatási rendszerben. Az utolsó egyenlet kiegészíti a 44. a)- és b)-ben levezetett két egyenlet (közös nevük: *speciális Lorentz-transzformáció*).

D) *A Lorentz-transzformáció néhány következménye*

46. koroll. Az x', y', z' és t' koordinátákat adó speciális Lorenzt-transzformációnak inverze (vagyis x, y, z és t-re megoldott alakja) a v előjelétől eltekintve azonos alakú az eredetivel. Vagyis a Lorentz-transzformáció visszaadja a 45. koroll.-ban megfogalmazott reciprocitási elvet is.

35. def. Legyen **A** és **B** az **O, X, Y, Z** inercia-rendszerben nyugvó két pont, amelynek tér-koordinátái rendre x_A, y_A, z_A és x_B, y_B, z_B. Játszódjék le **A**-n egy α-esemény a t_A, **B**-n pedig egy β-esemény a t_B rendszer-időben. Az α- és β-események *téridő-* (vagyis: *világ-*) *távolságán* az

$$s_{\alpha\beta} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - c^2 (t_A - t_B)^2}$$

mennyiséget értjük.

Az $s_{\alpha\beta}$ mennyiség egyidejűség ($t_A = t_B$) esetében a *tértávolság* (σ_{AB}) értékét veszi fel. Más esetben (pl. akkor is, ha $|\overline{AB}| = 0$) az $s_{\alpha\beta}$ imagináriussá is válhatik.

46. koroll. Ugyanazon két esemény világ-távolsága Lorentz-transzformációra invariáns. Vagyis az α- és β-esemény világ-távolsága az **O, X, Y, Z** inercia-rendszerben pontosan akkorának látszik, mint a mozgó O', X', Y', Z' inercia-rendszerben. Az $s^2_{\alpha\beta}$ világ-távolságot értelmező négyzetösszeg első három tagja a két eseménynek a 21. koroll.-ban megismert tér-távolság négyzetét adja (ez pozitív definit), az utolsó tagja viszont mindig negatív. Ezért az $s^2_{\alpha\beta}$ negatív értéket is felvehet (pl. az $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ esetben, ezért $s^2_{\alpha\beta}$ indefinit). E sajátság alapján a tér-idő-, vagyis világ-kontinuumot nem minősíthetjük teljesen euklidesinek, hanem csak *kvázieuklidesinek.*

Látjuk, hogy e kontinuum bármely eseményéhez kölcsönös és egyértelmű módon egy négyelemű reális értékrendszert rendelhetünk, és ennek ismeretében mindig ki tudjuk számítani tetszőleges két esemény világtávolságát is, amely a tér-idő-koordináták Lorentz-transzformációjára nézve invariánsan viselkedik. Ezzel egyben a világ-kontinuum analitikus modelljét sikerült megalkotnunk, mert minden kinematikai állításunkat ki tudjuk fejezni az analízis nyelvén is. E modell létezése pedig azt bizonyítja, hogy axióma-rendszerünk feltétlenül ellentmondás-mentes, akár az analízis.

47. koroll. Általános Lorentz-transzformáció.

A 44. és 45. koroll.-ban adott speciális Lorentz-transzformációból (ahol O' sebessége éppen x-irányú) *Herglotz* nyomán oly általános is levezethető, amelyben O' (és vele az X', Y', Z' egység-pontok) v-sebessége az x-iránytól tetszőlegesen eltér.

E célból legyen az **O**, **X**, **Y**, **Z**-rendszerben valamely esemény helyzetvektora $\bar{r} = x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{y} + z \cdot \bar{z}$. Ez a 9. és 17. koroll. értelmében egyértelműen felbontható egy a $\bar{v}$ sebességgel egyező irányú

$$\bar{r}_{||} = \frac{(\bar{r}\,\bar{v})\,\bar{v}}{v^2} \tag{a}$$

és egy erre merőleges $\bar{r}_{\perp} = \bar{r} - \bar{r}_{||}$ vektori tagra. Éppen ezért azonban az $\bar{r}_{||}$-et az O' kezdőpontú rendszer valamely $\bar{x}$'-menti $\bar{r}'_{||}$ helyvektorába a speciális Lorentz-transzformáció viszi át, amely most vektori jelekkel így is írható:

$$\bar{r}'_{||} = \frac{\bar{r}_{||} - \bar{v} \cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ ; \qquad t' = \frac{t - \dfrac{\bar{v}\,\bar{r}_{||}}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{b}$$

Ha az $\bar{r}$-nek az O'-ben egy $\bar{r}'$ felel meg, és erre a XXI. ax., ill. 44. koroll. jóvoltából szintén fennáll:

$$\bar{r}' = \bar{r}'_{||} + \bar{r}'_{\perp}\ ; \quad \bar{r}'_{\perp} = \bar{r}_{\perp}\ ,$$

akkor a (b) első egyenlete miatt:

$$\bar{r}' = \frac{\bar{r}_{||} - \bar{v} \cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \bar{r} - \bar{r}_{||}\ .$$

Az (a) egyenlet alapján tehát:

$$\bar{r}' = \bar{r} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)(\bar{r}\,\bar{v})\,\bar{v} - \frac{\bar{v} \cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{c}$$

Ezt az egyenletet a keresett általános Lorentz-transzformációvá egészíti ki (b) második egyenlete, amelyben $\bar{r}_{||}\,\bar{v}$ helyébe kívánt módon $\bar{r}\,\bar{v}$ írható, vagyis

$$t' = \frac{t - \dfrac{\bar{v}\,\bar{r}}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{d}$$

Minthogy most bebizonyosodott, hogy a speciális Lorentz-transzformációból az általános (c), (d) is bevezethető, ezért biztos, sehol sem véthetünk az általánosság ellen, amikor csak a speciális Lorentz-transzformációból vonunk le következtetéseket.

5. §. Függelék

A) *Néhány megjegyzés.*

A fizika egyes ágazatainak (így a dinamikának, termodinamikának stb.) axiomatikus megalapozása *(kodifikálása)* igen hasznosnak bizonyult. Segítségével az empirikus törvények közül a legegyszerűbbeket kutathatjuk fel, és ezeket a logikai következményeiktől jól megkülönböztethetjük.

De útmutatást ad a kodifikálás oly további, pontosabb ellenőrző kísérletek elvégzésére is, amelyekkel a felismert empirikus törvények érvényességi határait tudjuk megállapítani. *Didaktikai* értéke is elvitathatatlan.

E dolgozat közzétételét az indokolja, hogy a relativisztikus kinematika elemi elveit a geometriával logikai egységben az irodalomban még nem kodifikálták. Ennek az a kézenfekvő magyarázata, hogy az „abszolút tér és idő" egyszerű téveszméjét követő klasszikus (vagyis a nemrelativisztikus) kinematika beérte a geometria elveivel is. Az itt közölt axiómákat a tapasztalatból leszűrt oly egyszerű szabályok alkotják, amelyek pontok viszonylagos mozgását, ill. mozdulatlanságát írják le.

Ezeket hallgatólag eddig is mindig elfogadtuk. A felsorakoztatott axiómák közül szerencsésen csakis az utolsó bír jellegzetesen relativisztikus tartalommal. Axiómáinkban két pont egybeesését, ill. viszonylagos mozdulatlanságát (merevségét) mindig eldönthetőnek tartjuk. Eldöntésére ugyan a természet étalonul nem szolgáltat merev pontpárt, mégis miként két pont viszonylagos mozgásának, úgy viszonylagos mozdulatlanságának (merevségének) is van szükségképpen értelme.

Eszmei merev pontpár (hosszmérték) előállításáról az ún. *korlátozott relativitás elve* miatt kell eleve lemondanunk [8]. Ezt az elvet a jelenleg ismert fizika teljes mértékben igazolta. Az elv szerint *a kinematikailag lehetséges inercia-rendszerek közül a fizikai jelenségek*, ill. eseménysorozatok *egyet sem tüntetnek ki* a többihez képest.

Már pedig, ha létezne eszmeien merev **F**, **G** pontpár, akkor a XXII. ax.-hoz kapcsolódva a kezdetben nyugvó **F** kimozdítását az **A**-ról egyidejűen követné a **G** kimozdulása **B**-ről. Így az **A**-beli ok és **B**-beli okozat egyidejű eseménypár lenne, amit azonban egy az **AB**-vel ellentétes irányban mozgó inercia-rendszerben ugyan nem egyidejűen, de az ok és okozat helyes sorrendjében észlelnénk, az $\overline{\mathbf{AB}}$-vel egyező sebességűben azonban paradox módon az ellenkező, helytelen sorrendben. Ez a tény pedig kitüntetné az $\overline{\mathbf{AB}}$-vel egyező sebességű inercia-rendszereket az ellenkező sebességűekkel szemben, megsértve a korlátozott relativitás elvét. E paradoxont csakis a merev pontpár megvalósíthatóságának tagadása oldja fel.

B) *A dolgozat sajátos jelöléseinek jegyzéke*

Az alábbi táblázat a dolgozat tanulmányozásának megkönnyítésére szolgál

Jelölés	Rövid jelentése	Részletesebb értelmezése megtalálható
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Előírásoknak alá nem vetett (kinematikai) pontok	1. § első bekezdése
$\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathrm{v}}$	**A** kezdő és **B** vég-pont alkotta (hosszúság-) vektor ($\overline{v}$)	1. és 2. def., továbbá VII. ax. is
$\overline{\mathbf{AB}}$	Az $\overline{\mathbf{AB}}$-vektor értéke	1. koroll.
$A, B, C, \ldots$	Ún. planimetriai pontok	11. def.
$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Ún. inerciális pontok	17. def.
$\overline{n}_{\mathrm{ab}}$	Az a és $\overline{\mathrm{b}}$ vektorra merőleges irány	17. def.
$\overline{\mathbf{OX}} \equiv \overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathbf{OY}} \equiv \overline{\mathrm{y}}, \overline{\mathbf{OZ}} \equiv \overline{\mathrm{z}}$	Inercia-rendszer orthonormált tengelykeresztje	18. def.
$[a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}}]$	Az a vektor derékszögű komponensei	19. def.
$\overline{\mathrm{OA}} \parallel \overline{\mathrm{BD}}$	Az $\overline{\mathrm{OA}}$ vektor B-pontbeli parallel „mása"	22. def.
$(\alpha), (\beta)$	Az A, B pontot tartalmazó nyugvó egyenes	22. def.
$(\alpha) \parallel (\beta)$	Párhuzamos egyenesek	23. a) def.
σ_{AB}	Térgörbe ívhosszúsága	21. def.
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Esemény az **A**, **B**, **C**-ponton	27. def.
$\alpha' \,\overline{\cdot}\, \alpha''$	Szimultán események az **A**-ponton	28. def.
$\alpha''' \cdot > \alpha''$	Az α''' esemény későbbi α''-nél	IX. ax.
$\alpha \,\overline{\cdot}\, (\mathbf{A}, \mathbf{B})$	A **B**-pont áthaladása által az **A**-n értelmezett esemény	29. def.
$\alpha \,\underline{\cdot}\, \beta$	Nyugvó **A** és **B** pont egyidejű α és β eseményei	30. def.
(α, β)	Az α- és β-esemény által meghatározott (zárt) időköz	31. def.
$s_{\alpha\beta}$	Az α- és β-események világtávolsága	35. def.
$\mathbf{O}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{A}$	Nyugvó inerciális pontok	31. def.

C) *Ajánlás*

E dolgozatomat kegyelettel ajánlom első és legkedvesebb mesterem: MAGYAR KÁLMÁN tudós tanár (1886—1937) emlékezetének.

IRODALOM

[1] *Mátrai, T.:* Acta Phys. Hung. Tom. *XVII.*, 15. (1964).
[2] *Herglotz, G.:* Ann. d. Phys. *31*, 393, (1910).
[3] *Mátrai, T.:* Acta Phys. Hung. Tom. *V.*, 409, (1956).
[4] *Weyl, H.:* Raum-Zeit-Materie, Springer, Berlin (1919), S. 10.
[5] *Carathéodory, C.:* Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie, Sitzungsber. preuss. Akad. *V.* (1924), S. 12.
[6] *Reichenbach, H.:* Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre, Vieweg, Braunschweig, (1924).
[7] *Laue, M. v.:* Die Relativitätstheorie, Bd. I. Vieweg, Brauschweig (1952), S. 3.
[8] *Laue, M. v.:* Phys. Zs. *12*, 85, (1911).

ÜBER DIE PRINZIPIER EINES ELEMENTAREN AUFBAUES VON QUASI-EUKLIDISCHEN RAUM-ZEIT-KONTINUUM

DR. MÁTRAI TIBOR

In einer [1] der meinen vorigen Arbeiten habe ich eine einheitliche Methode für die Bestimmung der Raummetrik auch in relativistischen (*Herglotz*-schen) Sinne starrbewegenden Medien gegeben [2]. Infolge dieser Methode gelang es mir zu den überraschenden Erkentnis zu kommen, dass sich ein unendlich sich ausdehnende euklidische Raum nur im Inertial-System verwirklichen kann. Sogar die Forderung der unendlichen Ausdehnung kann bestimmt als auch eine geometrische Definition für das Inertial-System dienen [3].

In Interesse dieses vielversprechenden Programms setze ich in dieser Arbeit die Prinzipien der euklidischen Geometrie mit sinngemässer Verzőgerung der Einleitung der unendlichen Ausdehnung (als eines der idealen Elemente) auseinander, undzwar in Sprache der direkten Vektor-arithmetik (d. h. schon auch im Ausgang koordinatenfrei), die ich hier — angeregt von den ähnlichen Bestrebungen von H. *Weyl* [4] — nur von Punkten, von starren (d. h. gegenseitig ruhenden) Verhalten gewissener Punktpaare, sowie von zu solchen zuordnenden Längewert ableite.

Die Formulierung meiner organisch sich verknüpfenden relativistischen kinematischen Prinzipien gründe ich auf die momentane Koinzidenz von zwei beliebigen Punkten. Es gelingt mir also absichtlich im Ausgang den verwickelten Begriff der natürlichen Uhren, sowie des Lichtsignals beizuseitigen, den die früheren Autoren [5, 6] doch in Anspruch genommen haben. Ich zeige, dass die Lorentz-transformation von den auf Grund der bekannten *Lange*-schen Konzeptionen [7] konstruierten kinematischen Prinzipien auf gegenseitig-eindeutliche Weise zu ableiten ist.