A HIPERCIKLUS ÉS HIPERSZFÉRA

DR. PELLE BÉLA

I.

Ebben a dolgozatban a hiperciklusra és hiperszférára vonatkozó tételeket foglaljuk össze. Bolyai a 27. §-ban bizonyít egy ide vonatkozó tételt, azonban nem adja ezeknek a rendszeres felépítését. Ezen anyagrészek is hasonló gondolatmenettel tárgyalhatók, mint a paraciklus- és paraszféráról szóló paragrafusok. A kettő együtt, párhuzamosan is felépíthető, vagy a 24. § után dolgozható fel. Mi ez utóbbit választottuk. Az I—IV. axiómacsoportra felépített „abszolut" geometria tételeit kiegészítve az Appendix alapján a párhuzamosság értelmezésével és az ezekből még levezethető „abszolut" geometriai tételekkel, továbbá a Σ és S rendszerre vonatkozó néhány tétellel, erre építve tárgyaljuk a hiperciklusra és hiperszférára vonatkozó tételeket. Alapirodalomként Varga Ottó: „A geometria alapjai" című munkáját és Bolyai János „Appendix"-ét választottuk, az idézett tételek innen valók.

Ezek alapján felépítésünk a következő:

II.

Értelmezés: Ha egy α síkra merőleges sugárnyalábra nézve megszerkesztjük a nyaláb MA^{+}* félegyenesére illeszkedő A pontnak összes korrespondeáló pontjait (M illeszkedik α-ra), akkor ezen pontok összességét az α alapsíkhoz tartozó $|MA|$ távolságú hiperszférának nevezzük. MA a hiperszféra tengelye. Ebből az értelmezésből következik, hogy az MA^{+}-hoz tartozó merőleges sugárnyaláb minden egyenesének a hiperszférán egy és csak egy pontja van.

Értelmezés: Ha egy a egyenesre merőleges egyenesseregre nézve megszerkesztjük a sereg MA^{+} félegyenesére illeszkedő A pontnak összes korrespondeáló pontjait (M az alapegyenesnek pontja), akkor ezen pontok összességét hiperciklusnak nevezzük, MA a hiperciklus tengelye.

Ebből az értelmezésből szintén következik, hogy az MA^{+}-hoz tar-

* A jel félegyenest jelöl. Pl.: MA MA félegyenes.

tozó merőleges egyenessereg minden egyenesének a hiperciklusson egy és csak egy pontja van.

1. tétel: Ha az a egyenesre MA merőleges, akkor az a egyenes és az MA^{+}-ra illeszkedő A pont egyértelműen meghatározza az a és $|MA|$-hoz tartozó hiperciklust.

Bizonyítás: a 64. tétel** — „Adott egyenesnek adott pontjából egy és csak egy egyenes létezik, amely az adott egyenesre merőleges" — és a 65. tétel — „Egy nem egy g egyenesre illeszkedő B pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik, amely az adott egyenesre merőleges" — értelmében az a egyenesre merőleges egyenesek egyértelműen állíthatók elő és a 66. tétel — „Ha két a és b egyenes ugyanazon harmadik g egyenesre merőleges, akkor az a és b-nek nem lehet metszéspontja" — értelmében ezeknek nincs közös pontjuk. A 104., 105., 107. tételek értelmében a korrespondeáló pontok egyértelműen megszerkeszthetők és a 111. tétel 6. segédtétele értelmében — „Ha az a, b, c egyenesek egy n egyenesre merőlegesek, akkor az a, b, c egyenesen a korrespondeáló pontok megfeleltetése tranzitív és emiatt a, c az a, b párhoz tartozik". — ezek a merőlegesek egy sereghez tartoznak, tehát az a egyenes és $|MA|$ egyértelműen határozza meg az a és MA^{+} tengelyhez tartozó hiperciklust.

2. tétel: Az α sík és az erre merőleges MA-ra illeszkedő A pont (M az α-nak pontja) egyértelműen határozza meg a hiperszférát.

Bizonyítás: A 131. oldalon (V. O. „A geometria alapjai") közölt eljárással a síkra merőleges egyenesek egyértelműen meghatározhatók. Ezek a 114. tétel értelmében — „Ha a nyaláb egyenesei egymást nem metszik, akkor két egyenesnek vagy van közös merőlegesük, vagy nincs. Az első esetben a nyaláb egy síkra merőleges egyenesekből áll." — egy nyalábhoz tartoznak. A korrespondeáló pontok egyértelmű meghatározásából következik, hogy az α-hoz $|MA|$ távolságú hiperszférát α és MA^{+} egyértelműen meghatározza.

A 123. tételből — „A sík bármilyen kongruens leképezésénél egy egyenessereg ismét egy egyenesseregbe megy át. Tehát egy epiciklus epiciklusba" és a 145. tételből — „Kongruens leképezésnél egy egyenesnyaláb ismét egyenesnyalábba megy át, és bármilyen e nyalábhoz tartozó episzféra önmagába megy át." — következik a:

3. tétel: Bármilyen kongruens leképezésnél hiperciklus hiperciklusba, hiperszféra hiperszférába megy át.

A 126. tétel alapján — „Ha egy egyenessereget ennek egy egyenesén való tükrözéssel leképezzük, akkor a sereg önmagába megy át. Továbbá a sereghez tartozó bármilyen epiciklus saját magába megy át."

4. tétel: Ha egy egyenesre merőleges egyenessereget annak egy egyenesére tükrözzük, akkor az egyenessereg önmagába megy át és az ugyanakkora távolsághoz tartozó hiperciklus szintén önmagába.

Mivel a tükrözés kongruens leképezés, így a hiperciklus bármely húrját vele egybevágó húrjába viszi át és a két ponthoz tartozó hiperciklus ívet szintén. A kongruens leképezés folytán a kezdeti és vég-

** A §-sal jelölt tételek Bolyai Appendixéből valók, a többi tételek Varga Ottó: A geometria alapjai című munkájából.

pontok elmozdulása egyenlő, tehát a hiperciklus önmagába eltolható vonal. Az eltolással bármely húrja vele egybevágó és megyező menetű más húrja helyébe lép. Igy a hiperciklikuson egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak.

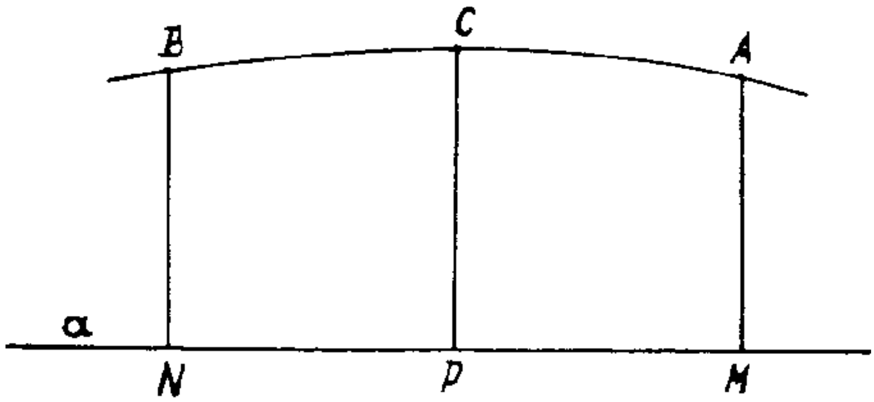
A 2-höz idézett 145. tételből pedig következik:

5. *tétel:* Ha egy síkra merőleges egyenesnyalábot két nyalábegyenes által meghatározott síkra tükrözzük, akkor az egyenesnyaláb önmagába megy át és ugyanazon távolsághoz tartozó hiperszféra szintén.

6. *tétel:* A hiperciklus bármely pontjának az alapegyenestől mért távolsága egyenlő $|MA|$-val.

Bizonyítás: Tekintsük az a alapegyeneshez tartozó $|MA|$ távolságú hiperciklusnak egy tetszőleges B pontját. B-re illeszkedjen az NB seregegyenes. Az $|MN|$-t merőlegesen felező seregegyenes legyen PC. A 4. tétel értelmében PC-re tükrözéskor a hiperciklus önmagába megy át, továbbá az N pont M-be és M az N-be, NB egyenes MA-ra és fordítva. Az értelmezés alapján így B az A-ba és A a B pontba kerül, tehát $|MA| \equiv |NB|$. Ezzel a tételt igazoltuk.

Az MABN négyszög (AB húr az oldala) Saccheri négyszög.



1. ábra

7. *tétel:* A hiperszféra bármely pontjának az alapsíktól mért távolsága egyenlő $|MA|$-val.

Bizonyítás: Legyen az α alapsíkhoz tartozó $|MA|$ távolságú hiperszférának B egy tetszőleges pontja, és a ráilleszkedő seregegyenes NB. Az $|MN|$-t merőlegesen felező sík tartalmazza a merőleges sugárnyaláb két egyenesét, tehát az 5. tétel értelmében ezen síkra tükrözve a hiperszféra önmagába megy át, továbbá az előbbi gondolatmenet alapján A B-e és B az A-ba és $|MA| \equiv |NB|$.

Ezek alapján érvényesek a következő tételek:

8. *tétel:* Egy α síktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a hiperszférát alkotja. Ezt az α alapsík $|MA| = d$ távolságú távolságfelületének, ekvidisztáns felületének nevezzük.

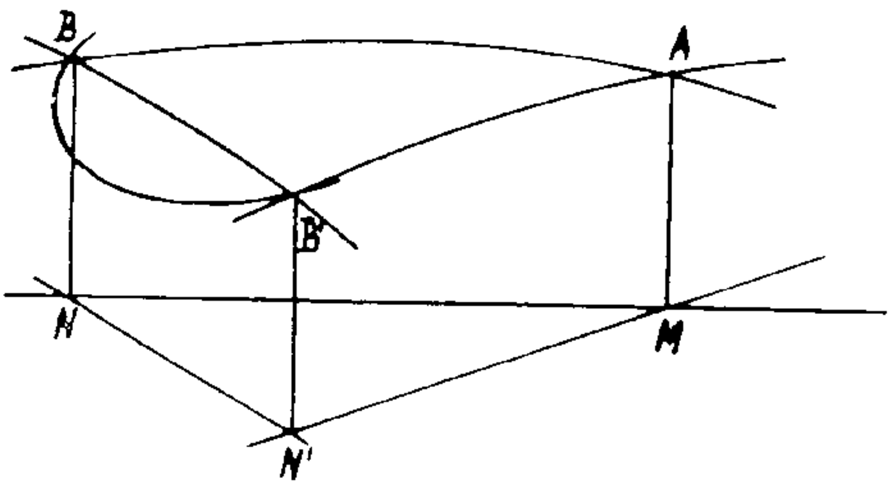
9. *tétel:* Egy a egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a hiperciklikuson van. Ezt az a alapegyenes $|MA| = d$ távolságú távolságvonalának, ekvidisztáns vonalának nevezzük.

10. tétel: Minden sík hiperszféra és minden egyenes hiperciklus. Ui. az értelmezés alapján ha d = 0, akkor a hiperszféra és hiperciklus egybeesik az alapsíkkal, illetve az alapegyenessel. — „Ha az episzféra tengelyén át fektetünk síkot, akkor az episzférának ezen síkra illeszkedő pontjai egy epiciklust adnak. Az episzféra bármely két pontján átmegy egy epiciklus."

11. tétel: A hiperszféra MA tengelyére illesztett tetszőleges síknak és a hiperszférának metszésvonala hiperciklus. Ezt a hiperszféra MA tengelyéhez tartozó hiperciklusának nevezzük. Ennek alapegyenese a tetszőleges síknak és az alapsíknak a metszésvonala.

12. tétel: Ha a hiperszféra MA tengelyéhez tartozó hiperciklusát MA körül megforgatjuk, akkor a hiperciklus a szóbanforgó hiperszférát írja le és távolságvonala az alapsíkját.

Bizonyítás: Az elforgatás során az MA-ra M-ben merőleges alapvonal elforgatottja merőleges marad MA-ra. A 141. tétel szerint — „Az összes egy g egyenesre vagy 0 pontban merőleges egyenes egy síkra illeszkedik" — a merőlegesek által meghatározott sík azonos az alapsíkkal, tehát az alapvonal az alapsíkot írja le.



2. ábra

Továbbá a 119. tételből — „Egy olyan ABCD négyszögben, amelyben az A és B-hez tartozó szögek derékszögek, és az AB egyenes ugyanazon oldalán fekvő | AD | és | BC | oldalak egybevágóak, a D és C-nél levő szögek szintén egybevágóak. Az | AB | oldal középmerőlegese a | CD | oldalnak is középmerőlegese" — és a kongruens leképezésből következik, hogy NBA∢ ≡ MAB∢ ≡ N'B'A' ∢ (akár a húrt, akár az ívet tekintjük), tehát A-hoz a B és A' korrespondeáló pontok. Ugyancsak a 119. tétel és a 7. tétel alapján NBB∢ ≡ N'B'B'∢. Így B és B' is korrespondeáló pontok. Ezek szerint az elforgatott hiperciklus bármely pontja a hiperszférán van.

A 11. és 12. tételek következménye:

Következmény: A hiperszféra MA tengelyére illesztett síkok által kimetszett hiperciklusok egybevágók.

Ezekből következik egy általánosabb tétel:

13. tétel: Ha a hiperciklust tengelye körül elforgatjuk, hiperszférát ír le, alapvonala pedig a hiperszféra alapsíkját. (A bizonyítás megegyezik az előző tétel bizonyításával.)

A 11., 12., 13. tételek alapján igaz a:

14. tétel: Minden hiperszféra előállítható hiperciklus forgatásával. Ui., ha volna olyan, amelyet nem tudnák előállítani, akkor annak egyik tengelyére illesztett sík által a hiperszférából kimetszett hiperciklust tengelye körül elforgatva nem írná le a hiperszférát. Ez ellentmondás.

15. tétel: A hiperszférát mindig elforgathatjuk alkalmasan választott tengelye körül úgy, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott pontja másik tetszőlegesen kiválasztott pontjának helyére lépjen.

Bizonyítás: Tekintsünk egy síkot és a hozzátartozó |MA| távolságú hiperszférát. Legyen a hiperszféra tetszőleges két pontja B és B', a hozzátartozó tengelyek NB^+ és $N'B'^+$, ahol N és N' az alapsíkban vannak. Az |NN'|-t merőlegesen felező síkban legyen MA^+ merőleges az alapsíkra, és ennek a hiperszférán levő pontja A. Az MAP síkra tükrözve, a hiperszféra önmagába megy át, B → B'-be, továbbá az MAN sík MAN' síkba, így MA körül a két sík egymásba forgatható, vagyis MA körül forgatva a hiperszférát B a B'-be kerül.

Értelmezés: A hiperciklus érintőjén azt az egyenest értjük, amelynek a hiperciklussal csak egy közös pontja van.

A 128. tételt — „Minden epiciklusnak, amely nem egyenes, minden A pontjában van érintője. Ez az érintő az A ponton áthaladó seregegyenesére merőleges."

16. tétel: Minden hiperciklusnak minden A pontjában van érintője. Ez az érintő az A ponton átmenő seregegyenesre merőleges.

A 129. tétel — „Ha A az epiciklusnak egy pontja, akkor azon átfektetett egyenes, amennyiben nem érintő, az epiciklust legfeljebb még egy pontban metszi." — szerint:

17. tétel: Ha A a hiperciklusnak egy pontja, akkor azon átfektetett g egyenes, amennyiben nem érintő, a hiperciklust legfeljebb még egy pontban metszi.

Az értelmezésből, a 16. és 17. tételekből következik:

18. tétel: Egy egyenes a hiperciklust vagy nem metszi, egy vagy legfeljebb két pontban metszi.

Értelmezés: A hiperszféra érintősíkja az a sík, amely a hiperszféra egyetlen pontját tartalmazza.

19. tétel: A hiperszférának minden A pontjában van érintője és ez merőleges az MA^+ tengelyre.

Bizonyítás: Az MA^+-hoz tartozó hiperciklusnak A-ban van egy érintője. Az MA körül elforgatott hiperciklusok mindegyikének A-ban csak egy érintője van és ezek merőlegesek MA-ra, tehát egy síkban vannak. Mivel az elforgatott hiperciklusok a hiperszférán vannak, a síknak a hiperciklusokkal, illetve a hiperszférával csak egy közös pontja van, tehát érintősík.

A hiperciklus, kör, hiperszféra, gömb értelmezésből következik:

20. tétel: A hiperciklus nem lehet kör, a hiperszféra pedig nem lehet gömb.

A 127. tétel — „A sík három tetszőleges, nem egy egyenesre illeszkedő pontja meghatároz egy és csak egy epiciklust, amely nem egyenes" — alapján érvényes a következő tétel:

21. tétel: Ha két hiperciklusnak három pontja közös, akkor a két hiperciklus azonos.

22. tétel: Ha B az a és $|MA|$-hoz tartozó hiperciklus tetszőleges pontja és NB^+ az MA^+-hoz tartozó a-ra merőleges seregbeli egyenes, akkor az [a; MA^+]-hoz tartozó hiperciklus és az [a; NB^+]-hez tartozó hiperciklus egybeesik.

Bizonyítás: Legyen az NB^+-hez tartozó hiperciklus tetszőleges pontja C és PC^+ az NB^+ és MA^+-hoz tartozó seregegyenes. Mivel a három nyalábegyenesen $AMN \sphericalangle \equiv BNM \sphericalangle$ és $BNP \sphericalangle \equiv CPN \sphericalangle$, így a definíció alapján $AMP \sphericalangle \equiv CPM \sphericalangle$. Tehát a C az NB^+ mellett MA^+-hoz tartozó hipercikluson is rajta van. Így a két hiperciklusnak három pontja közös, tehát a 21. tétel értelmében a két hiperciklus egybeesik. Így bármely seregbeli egyenes lehet tengelye a hiperciklusnak.

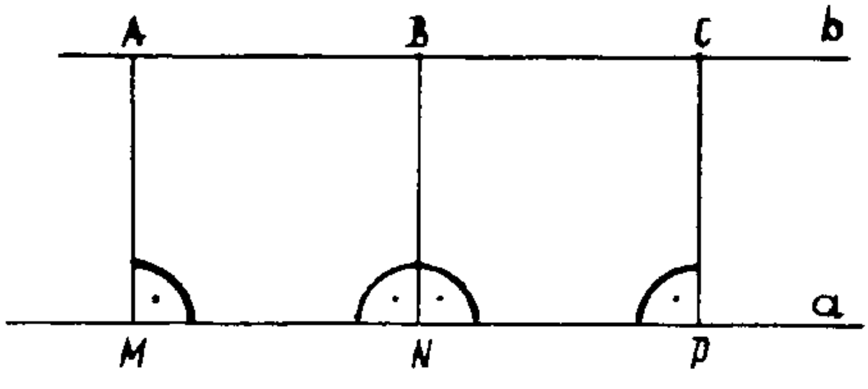
23. tétel: Ha az α és MA^+-hoz tartozó hiperszférának B egy tetszőleges pontja és NB merőleges α-ra, akkor az [α; MA^+]-hoz tartozó hiperszféra egybeesik az α és NB^+-hez tartozó hiperszférával.

Bizonyítás: Az egyenesnyaláb szerkesztéséből következik, hogy az MA^+-hoz és NB^+-hez tartozó merőleges egyenesnyalábok egybeesnek. Mivel A és B korrespondeáló pontpár, így mindazok a pontok, amelyek A-hoz korrespondeálók, B-hez is azok és fordítva. Így az MA^+-hoz tartozó hiperszféra minden pontja illeszkedik az NB^+-hez tartozó hiperszférára és fordítva. Ezek szerint a két hiperszféra azonos.

Így a hiperszférának MA^+ mellett a tetszőleges NB^+ is tengelye, vagyis a nyalábegyenes bármelyike lehet a hiperszféra tengelye.

24. tétel: Ha az a alapegyeneshez és $|MA| \neq 0$ távolsághoz tartozó hipercikluson van három pont, amely egy egyenesre illeszkedik, akkor a párhuzamossági szög R, vagyis az euklidesi geometriát kapjuk.

Bizonyítás:



3. ábra

Legyen az a alapegyenes tetszőleges három különböző pontja M; N; P, az ezeken átmenő hiperciklus tengelyek MA^+; NB^+ és PC^+, a hiperciklus pontok: [A; B; C]. A 12. tételben idézett 119. tétel alapján MABN; NBCP és MACP Saccheri-féle négyszögekben MAB$\sphericalangle \equiv$NBA$\sphericalangle$; NBC$\sphericalangle \equiv$PCB$\sphericalangle$ és MAB$\sphericalangle \equiv$PCA$\sphericalangle$, tehát NBA$\sphericalangle \equiv$NBC$\sphericalangle$. De NBA$\sphericalangle$+NBC$\sphericalangle$ = 2R-ből NBA$\sphericalangle$ = NBC$\sphericalangle$ = PCB$\sphericalangle$ = MAB$\sphericalangle$ = R.

Ekkor viszont a 153. tétel – „Ha létezik a síkon egy olyan négyszög, amelynek minden szöge derékszög, akkor minden olyan négyszögben, amelyben három szög derékszög, a negyedik is derékszög." – a 154. tétel – „Ha egy háromszögben a szögösszeg két derékszög, akkor minden háromszögben a szögösszeg két derékszöggel egyenlő". – és a 155. tétel – „Ha a háromszög szögösszege = π tétel fennáll, akkor egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át csak egy nem metsző egyenes húzható" – értelmében a párhuzamossági szög R.

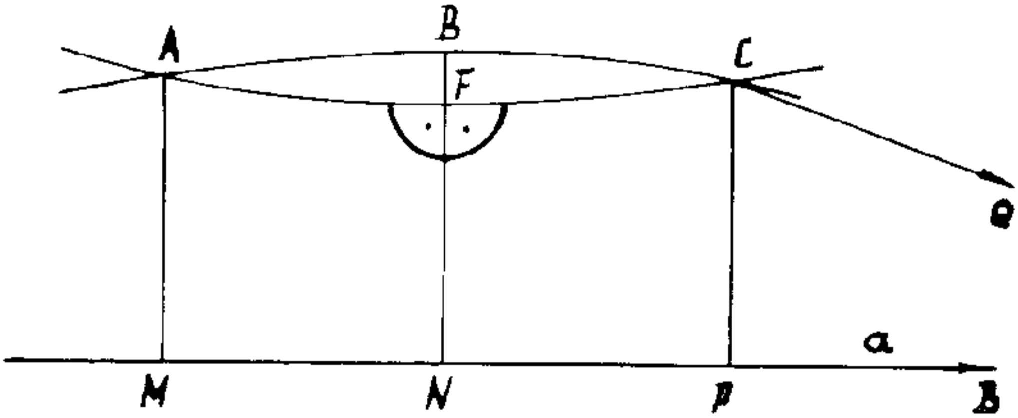
A bizonyításból az is következik, hogy:

25. tétel: A Σ rendszerben minden hiperciklus egyenes.

26. tétel: Ha az a alapegyeneshez és $|MA| \neq 0$ távolsághoz tartozó hipercikluson három pont nem illeszkedik egy egyenesre, akkor a párhuzamossági szög kisebb R, vagyis a hiperbolikus geometriát kapjuk.

Bizonyítás: Legyen az a alapegyenesen a három M; N; P pont olyan, hogy $|MN| \equiv |NP|$. A pontokon átmenő hiperciklus tengelyek MA^+; NB^+; PC^+.

Az MACP Saccheri-féle négyszögben MAC$\sphericalangle \equiv$ PCA$\sphericalangle \neq$ R.



4. ábra

Ui., ha PCA$\sphericalangle$ = R, akkor a Σ rendszer geometriája érvényes a 24. tételben idézett tételek alapján. Igy a 25. tétel értelmében F és B egybeesik, ami ellentmond a feltevésnek. Az 1-ben idézett 66. tétel szerint a B és FC nem metszi egymást. Mivel a PC és FC$\sphericalangle \neq$ R, így C-ben a PC-re illesztett merőleges nem esik egybe FC-vel, tehát az a-ra nem illeszkedő C ponton át, nemcsak egy egyenes húzható, amely nem metsző — tehát geometriánk nem azonos a Σ rendszerrel, – de pl. a CP metsző. A kapott eredmény – hogy a párhuzamossági szög nem lehet R – alapján a párhuzamossági szög csak kisebb lehet, mint R. Ezzel a tételt igazoltuk. Igy S-ben a hiperciklus görbe vonal.

E tétel következményei:

1. következmény: Az S rendszerben nincs Σ rendszerbeli téglalap.

2. következmény: A b egyenes, amelynek a hiperciklussal két közös pontja van, nem lehet párhuzamos a-val.

Ui., ha párhuzamos lenne, akkor az A ponthoz tartozó párhuzamossági távolság a párhuzamos iránya mentén fogy (ez már bizonyítható az Appendix 15. §-ban) $|MA| > |PC|$. Ez pedig ellentmondás. Így $PCB\sphericalangle > PCQ\sphericalangle$, ahol CQ^{-} párhuzamos a-val.

3. következmény: Az a alapegyenessel párhuzamos egyenesnek a hiperciklussal csak egy közös pontja van.

Ui., ha az a-val párhuzamos CQ^{-}-nak még egy közös pontja lenne, akkor az ellentmondana az előbb felhasznált tételnek és ha egy közös pontja sem volna, akkor ez ellentmondana a következő tételnek: — „A párhuzamossági távolság bármely kicsiny előre megadott távolságnál kisebbé válik". — „Ha $AX \parallel SZ \parallel JY$, akkor S-ben az (AX, SZ) sáv egybevágó az (AX, JY) sávval, vagyis a rész egybevágó az egésszel". (Ezek a tételek az Appendix 15. § után mind bebizonyíthatók.)

27. tétel: Az a egyenest metsző és a hiperciklus síkjában fekvő egyenesnek a hiperciklussal mindig van egy közös pontja. Ui., ha nem volna, ez ellentmondana azon tételnek, hogy — „A párhuzamossági távolság nem a párhuzamosság irányában minden határon túl nő." (E tétel igazolható az Appendix 15. § után.) — A következő tétel bizonyításához az alábbi segédtételt használjuk fel:

Segédtétel: Ha a és b nem metsző és nem párhuzamos egyenesek, akkor mindig van egy olyan egyenes, amely mindkettőre merőleges. A segédtétel bizonyítása megtalálható az Appendix 158. vagy 222. oldalán. A bizonyítás alapján kimondható:

Segédtétel: Az a egyenesre nem illeszkedő C ponton átmenő egyeneseknél az a-hoz húzott közös merőlegesek hossza kisebb vagy egyenlő C-nek az a egyenestől mért távolságával. Ui., ha volna olyan egyenes, amelynél az a-hoz húzott közös merőleges hossza nagyobb C-nek a-tól mért távolságától, akkor az előző segédtételben bizonyítottak alapján C nem lehetne pontja az egyenesnek, ez pedig ellentmondás.

28. tétel: Ha az a alapegyeneshez b nem metsző, de nem is párhuzamos egyenes, akkor b-nek az a alapegyeneshez és $d \neq 0$ távolsághoz tartozó hiperciklussal $d > |NF|$ esetén kettő, $d = |NF|$ esetén egy és $d < |NF|$ esetén nincs metszéspontja, ahol $|NF|$ a nem metsző egyenesek közös merőlegesének távolsága.

Bizonyítás: Tekintsünk egy b egyenest, amely nem metszi a-t és nem is párhuzamos vele. A segédtétel értelmében a-nak és b-nek van egy közös merőlegese, NF. Legyen $d > |NF|$. A segédtételben az is bizonyított, hogy a b félegyenes távolodó pontjainak távolsága a-tól minden határon túl nő, tehát egyszer egyenlő lesz d-vel. Ekkor viszont b-nek a hiperciklussal egy közös pontja van. Legyen ez C és PC^{+} a hozzátartozó tengely. Tükrözzük az NFCF négyszöget az NF egyenesre. Az így kapott MPCA négyszögnek A csúcsa rajta van a hipercikluson is, mert $|MA| \equiv |PC|$ és a b egyenesen is, mert b merőleges NF-re, az F pontban. Igy a 18. tétel értelmében b-nek két közös pontja van a hiperciklussal.

Ha $d = |NF|$, akkor a segédtételben bizonyítottak alapján csak egy közös pont van, vagyis b érintője a hiperciklusnak. Ugyanígy látható be, hogy ha $d < |NF|$, akkor nincs közös pont. A segédtételeknek és a 28. tételnek következményei:

1. következmény: A hiperciklus tetszőleges C pontjára illeszkedő és az alapegyenest nem metsző egyeneseknek a hiperciklussal egy és két közös pontjuk van. Ui. az előzőek alapján a PC tengelyre C-ben merőleges egyenesnek egy közös pontja van. Ha ezt forgatom úgy, hogy a PCb$\sphericalangle$ < R legyen, akkor még egy pontban metszi a b egyenes a hiperciklust. A metszéspontok távolodásával a közös merőleges szakasz hossza csökken. Párhuzamos helyzetben másik metszéspont nincs, a közös merőleges szakasz hossza nulla. A következő helyzetben az alapegyenest metszi. Ha az érintőt ellenkező irányba forgatom, a metszéspont a hiperciklusón PC ellenkező oldalán lesz, mint előbb volt, a közös merőleges hossza ismét tart a nullához. Párhuzamos helyzetben nem metszi, utána az alapegyenest metszi.

2. következmény: Ha a C pont az alapegyenes és a hiperciklus között van, akkor a C-re illeszkedő egyenesek közül azok, amelyek a-t nem metszik, a hiperciklust két pontban metszik, az a-val párhuzamosak pedig egy pontban.

3. következmény: Ha a C pont a hiperciklusnak ellenkező oldalán van, mint az alapegyenes, akkor a C-re illeszkedő és a-t nem metsző egyeneseknek a hiperciklussal kettő, egy és nulla metszéspontjuk van.

Az eddigiek alapján S rendszerben érvényesek a következő tételek:

29. tétel: S-ben egy háromszög oldalfelező merőlegesei vagy egy pontra illeszkednek, vagy egy közös egyenesre merőlegesek, vagy párhuzamosak. Ui. a három csúcspontot összekötő $|AB|$ és $|BC|$ szakaszok felező merőlegese lehet metsző, párhuzamos vagy nem metsző. Az ezek által meghatározott egyenessereghez tartozik a harmadik oldalfelező merőleges is a következő tétel értelmében: — „Egy háromszög merőleges oldalfelezői egy sereghez tartoznak" — (u. o. 117. tétel.)

Ennek közvetlen következménye a

30. tétel: S rendszerben három pont körön, hiperciklusón vagy paraciklusón van.

Ui. az oldalfelező merőlegesek által meghatározott egyenesseregben vannak olyan egyenesek, melyek A, B, illetve C-re illeszkednek.

31. tétel: S-ben egy háromszög három magasságvonala vagy egy pontra illeszkedik, vagy egy közös egyenesre merőlegesek, vagy párhuzamosak. Ui.: két magasságvonal metsző, párhuzamos, vagy nem metsző lehet, a harmadik magasságvonal a kettő által meghatározott sereghez tartozik (u. o. 121. tétel).

Ugyanígy látható be a:

32. tétel: S-ben egy háromszög két külső szögfelezője és a harmadik csúcshoz tartozó belső szögfelezője egy pontra illeszkedik, vagy egy közös egyenesre merőlegesek, vagy párhuzamosak.

33. tétel: Σ rendszerben a hiperszféra sík.

Bizonyítás: A 25. tétel értelmében Σ-ban a hiperciklus egyenes. A 14. tétel értelmében minden hiperszféra előállítható hiperciklus forgatásával. A tengely körül elforgatott egyenes pedig síkot ír le (u. o. 141. tétel). Igy Σ-ban minden hiperszféra sík.

34. tétel: S-ben a d $\neq$ 0 távolsághoz tartozó hiperszférának bármely három pontja nem illeszkedik egy egyenesre, tehát a hiperszféra görbe felület.

Bizonyítás: Tekintsük a hiperszféra három A; B; C pontját. Tegyük fel, hogy ezek egy egyenesre illeszkednek. Akkor az ezekhez tartozó NA^+; NB^+; PC^- tengelyeken a 24. tételben bizonyítottak alapján téglalapot kapunk. Viszont a 26. tétel 1. következménye alapján S-ben nincs téglalap. Tehát A; B; C nem illeszkedhet egy egyenesre.

35. tétel: A hiperszféra valamelyik B pontjára illeszkedő és a hiperszféra MA^+ tengelyére merőleges sík a hiperszférát körben metszi.

Bizonyítás: Tekintsük a tételben szereplő síknak és a hiperszféra metszetének egy B pontját. A sík C-ben messe AM^+-t. Az MA, NA seregbeli egyenesek síkja által a hiperszférától kimetszett hiperciklus ív legyen AB. A 12. tétel értelmében MA körül elforgatva a hiperciklust, a B pont a hiperszférán mozog. De ugyanakkor a síkon is rajta van, mert a sík $|CB|$ elforgatott C középpontú szakaszának végpontja, amely körön mozog. Ez a kör tehát benne van a síkban, rajta van a hiperszférán, vagyis azok közös pontjai. Igy ezen síknak és a hiperszférának közös pontjai körön vannak.

Ebből a tételből következik:

36. tétel: Ha az AB hiperciklus-ívet az MA^+ tengely körül elforgatjuk, akkor a B pont a hiperszférán kört ír le.

37. tétel: A hiperszféra A pontjára illeszkedő egyenes, ha az alapsíkkal párhuzamos, akkor a hiperszférával csak egy közös pontja van és ha az alapsíkot metszi, ugyancsak egy közös pontja van a hiperszférával.

Megjegyzés: Sík és egyenes párhuzamosságát a következőkép értelmezzük: Sík és egyenes akkor párhuzamos, ha a síkban van olyan egyenes, amely párhuzamos az egyenessel.

Az Appendix 7. § alapján az értelmezésből következik, hogy az egyenesre illesztett minden sík párhuzamosokban metszi a tekintett síkot.

Bizonyítás: Az MA^+ tengelyre és az A ponton átmenő b egyenesre illesztett sík a hiperszférát hiperciklusban metszi a 11. tétel értelmében. A 28. tétel 1 következménye értelmében a b egyenesnek két közös pontja van a hiperciklussal, ha a b nem metszi az alapegyenest és egy, ha azzal párhuzamos, vagy azt metszi. Mivel a síknak nincs a hiperciklusön kívül közös pontja a hiperszférával a 11. tétel értelmében, így az arra illeszkedő b egyenesnek sincs. Ezzel a tételt igazoltuk.

38. tétel: Az alapsíkot nem metsző egyenesnek a hiperszférával kettő, egy vagy nulla közös pontja van, az alapsíkkal párhuzamos vagy metsző egyenesnek mindig egy közös pontja van.

Bizonyítás: Az egyenesre illesztett és az alapsíkra merőleges sík a hiperszférát hiperciklusban metszi. A hiperciklussal a nem metsző egyenesnek a 28. tétel értelmében kettő, egy, vagy nulla közös pontja van, a párhuzamos egyenesnek a 26. tétel 3. következménye értelmében egy és a metszőnek a 27. tétel értelmében szintén egy közös pontja van, így a hiperszférával is.

39. tétel: Az α síkban fekvő tetszőleges a alapegyeneshez tartozó hiperciklusnak, ha egy pontja az α-hoz tartozó hiperszférán van, akkor minden pontja azon van.

Bizonyitás: Az a alapegyenes és a közös pont meghatározza a hiperciklushoz tartozó távolságot, legyen ez $|MA|$. Tekintsük a hiperciklus tengelyeinek α-n levő merőleges vetületeit. Ezek merőlegesek az a-ra és a két sík (α és a hiperciklus síkja) hajlásszögét zárják be a hiperciklus tengelyeivel. A hiperciklus pontokból húzzunk merőlegeseket α-ra. Ezek metszik a tengelyek vetületeit, az így kapott derékszögű háromszögek a következő tétel alapján — „Ha két ABC, illetve A'B'C' háromszögre $|AB| \equiv |A'B'|$, $(BAC)\sphericalangle \equiv (B'A'C')\sphericalangle$ és $(ACB)\sphericalangle \equiv$ $\equiv (A'C'B')\sphericalangle$ egybevágóságok fennállnak, akkor a két háromszög egybevágó" — egybevágóak, mert egy oldal és két szögük egybevágó. Igy a hipercikluspontokból α-ra húzott merőleges szakaszok egybevágóak, tehát a hipercikluspontok a hiperszférának is pontjai.

Ebből következik:

40. tétel: Ha egy β sík metszi az α alapsíkot, akkor a hiperszférát hiperciklusban metszi.

Bizonyitás: Ha a hipercikluson kívül a β-nak és hiperszférának még volna közös pontja, akkor ezen át a metszésvonalra húzott merőleges egybeesik valamelyik seregbeli egyenessel. Igy ez az egyenes két pontban metszené a hiperszférát és egy pontban az alapsíkot. Ez ellentmond a 37. tételnek.

41. tétel: Ha egy β sík párhuzamos az α alapsíkkal, akkor β a hiperszférát paraciklusban metszi.

Megjegyzés: Két sík párhuzamosságát a következőképp értelmezzük: két sík akkor párhuzamos, ha van olyan két párhuzamos egyenesük, amelyekre illesztett síknak α- és β-val alkotott lapszögösszege 2R. Ebből az értelmezésből következik a 9. § alapján, hogy minden párhuzamos egyenespárra illesztett síknak α és β-val alkotott lapszögösszege 2R. (Ez az értelmezés megtehető a 9. § után.)

Bizonyitás: Az értelmezés és az Appendix 9. § értelmében a MA^+ tengelyre illeszthető olyan sík, amely merőleges α és β-ra és a metszésvonalakra $MR^+ \| AQ^+$. Szerkesszük meg β síkban az AQ^+-hoz párhuzamos egyeneseket. Legyen egy ilyen egyenes BX. Ennek a merőleges vetülete α-n NY. A 7. § értelmében $NY^+ \| BX^+ \| AQ^+ \| MR^+$, a 9. § értelmében pedig a (BX; NY) síkja merőleges α és β-ra. Tükrözzük erre a síkra α és β-t. Azoknak tükörképei önmaguk, AQ-nak CH, MR-nek PK, ahol A és C ugyanazon paraciklusnak pontjai és $AQ^+ \| CH^+ \|$ $\| PK^+ \| MR^+$, továbbá MA megfelelője PC és $|MA| \equiv |PC|$. Ezzel azt kaptuk, hogy a paraciklus bármely tetszőleges pontjának a távolsága α-tól egyenlő $|MA|$-val. Tehát a paraciklus rajta van a paraszférán.

Ha a síknak a hiperszférával még volna közös pontja, akkor az ezen át szerkesztett párhuzamosra azt kapnánk, hogy két közös pontja van a hiperszférával. Ez pedig ellentmond a 37. tételnek.

Értelmezés: Egy α sík és egy b egyenes akkor nem metszők, ha az α síkban van olyan a egyenes, amely b-vel nem metsző és (a; b) egy síkban van.

Ebből az értelmezésből az egyenesnyaláb szerkesztésénél megtárgyalt feltételek alapján (V. O. „A geometria alapjai" 135. oldalán) következik, hogy a b-re illesztett minden sík α-ból olyan egyenest metsz ki, amely a-t és b-t nem metszi. A 2. tételben idézett 114. tételből és a 28. tétel előtti segédtételből pedig következik, hogy ezek egy γ síkra merőleges egyenesek.

Illesszünk a b egynesre egy β síkot, amely nem metszi α-t. Szerkesszük meg β síkban is a nyalábegyeneseket. Ezek is merőlegesek a γ síkra. Az α és β síkban fekvő bármely két nyalábegyenes közös merőlegese benne van a γ síkban, továbbá az α-ban levő nyalábegyenesek (seregegyenesek) a 116. tétel értelmében — „Egy sereg, amely nem sugársor vagy olyan egyenesek összessége, amelyek egy egyenesre merőlegesek vagy nincsen közös merőlegesük". — egy egyenesre merőlegesek így ez a merőleges az α és γ sík metszésvonalára esik. Ugyanúgy a β síkban levő nyalábegyenesek közös merőlegese a β és γ sík metszésvonalára illeszkedik. Mivel a két metszésvonal nem metszi egymást, van egy közös merőlegesük. Ezen merőleges talppontjaira α-ban és β-ban két-két egyenes illeszkedik, amelyek merőlegesek rá. (Egy-egy nyalábegyenes és egy-egy metszésvonal.) Igy a metszésvonalak közös merőlegese merőleges az α és β síkokra.

Ebből következik:

1. következmény: a két sík közös merőlegesének talppontjain átmenő nyalábegyenesekre (legyenek ezek b és a') illesztett síknak az α és β-val alkotott lapszögösszege 2R.

2. következmény: a közös merőleges körül elforgatva a b és a' nyalábegyeneseket, azok a β, illetve α síkot írják le.

3. következmény: A b egyenesre illesztett azon β' sík, amelynek (b; a') síkjával képezett lapszöge kisebb R, nem feltétlen metszi α-t. Ui. messe γ-t a c egyenesben. A közös merőleges szakaszhoz tartozó párhuzamossági szög kisebb R az S rendszerben, így C nem feltétlen metszi α és γ metszésvonalát. Akkor viszont van egy közös merőlegesük és ez az előzőek alapján merőleges α és β'-re.

Ezekből következik:

42. tétel: Ha két sík nem metszi egymást és nem is párhuzamos, akkor van egy egyenes, amely mindkét síkra merőleges.

43. tétel: Ha egy sík nem metszi és nem is párhuzamos az α síkkal és az α-hoz tartozó hiperszférának egy A pontját tartalmazza, akkor β a hiperszférát körben metszi.

Bizonyítás: Az A ponthoz tartozó MA hiperszféra tengelyre illeszkedő sík α és β-t a és b nem metsző egyenesekben metszi. Szerkesszük meg az a és b-hez tartozó nyalábegyeneseket α és β-ban. Az ezekre merőleges síknak a metszésvonala α és β-n merőlegesek az α és β beli nyalábegyenesekre. A két metszésvonal közös merőlegese: KO merőleges az α és β síkokra. Ha az A-ra illeszkedő nyalábegyenesnek két közös pontja van a hiperszférával — A és B, akkor ezeket a nyalábegyenesekre merőleges sík elválasztja. (Ez következik a 28. tételben közölt eljárásból.) Akkor a β síkban levő nyalábegyenesek közös merőlegese is két pontban C és D-ben metszi a hiperszférát a 28. tétel 2. következménye alapján, ahol $|OC| = |OD|$ (ugyancsak a megjelölt tétel alapján). A KO közös merőlegesre illeszkedő KF^+ hiperszfératengelyre is merőleges a β sík, amelynek a hiperszférával már négy közös pontja van. Így a 35. tétel értelmében β a hiperszférát körben metszi.

Ha az A-ra illeszkedő b nyalábegyenesnek egy közös pontja van a hiperszférával, akkor a β síkban fekvő nyalábegyenesek közös merőlegese átmegy az A ponton. Ennek a 28. tétel 1. következménye alapján a hiperciklussal kettő vagy egy közös pontja van. Ha kettő van, akkor az előzőek alapján β a hiperszférát körben metszi, ha egy van, akkor az α és β sík közös KO merőlegese az MA^+ hiperszféra tengelyre illeszkedik, így β MA-ra merőleges az A pontban, vagyis érintője a hiperszférának, a metszet tehát nulla sugarú kör.

A 28., 42., 43. tételekből következik:

44. tétel: Minden olyan síkhoz, amely a hiperszférát körben metszi, tartozik egy hiperszféra tengely, amelyre a sík merőleges. Továbbá az MA^+ hiperszféra tengelyre merőleges, az α alapsíkot nem metsző síkok a hiperszférát körben metszik, ha $0 < |MO| < |MA|$, ahol $|MO|$ az α és nem metsző sík közös merőleges szakasza, és $|MA|$ az α-hoz tartozó hiperszféra távolsága.

Ebből és a 28. tétel 3. következményéből érvényes:

45. tétel: Az S rendszerben sík és hiperszféra viszonya a következő lehet: a sík a hiperszférát nem metszi, érinti, körben, paraciklusban vagy hiperciklusban metszi.

46. tétel: A hiperszféra tetszőleges két pontja a hiperszférának számtalan hiperciklusát határozza meg.

Bizonyítás: A tetszőleges két pontra számtalan olyan sík illeszthető, amely az alapsíkot metszi. Minden ilyen sík a 40. tétel értelmében hiperciklusban metszi a hiperszférát. Ezzel a tételt igazoltuk.

47. tétel: Hiperszférán két hiperciklus kölcsönös helyzete a következő lehet: nem metszik egymást, metszik egymást egy, illetve két pontban.

Bizonyítás: Ha a két hiperciklust kimetsző síknak nincs közös pontja, akkor a hiperciklusoknak sincs. Ha a két sík metszésvonala metszi vagy párhuzamos az alapsíkkal, akkor a metszésvonalnak a hiperszférával egy közös pontja van, a 38. tétel értelmében, így a két hiperciklusnak is.

Ha a két sík metszésvonala nem metszi az alapsíkot, akkor a 38. tétel értelmében a metszésvonalnak a hiperszférán kettő, egy vagy nulla közös pontja van, így a hiperciklusoknak is.

48. tétel: Hiperszférán hiperciklus és paraciklus kölcsönös helyzete a következő lehet: nem metszik egymást, metszik egymást egy, illetve két pontban.

Bizonyítás: Ha a hiperciklust és paraciklust kimetsző síkok nem metszik egymást, akkor a két görbének nincs közös pontja. (Hogy az α alapsíkhoz felvehető olyan két sík, amely közül az egyik α-val párhuzamos, a másik α-t metszi, de az α-val párhuzamos síkot nem, az következik abból, hogy a párhuzamossági szög kisebb R.) Ha a síkok metszik egymást, akkor a metszésvonal az alapsíkkal vagy párhuzamos, vagy nem metszi azt. Így a hiperszférával nulla, egy, illetve két közös pontja lehet a 38. tétel értelmében. Ezek szerint a hiperciklus és paraciklusnak is.

49. tétel: Hiperszférán hiperciklus és kör kölcsönös helyzete a következő lehet: nem metszik egymást, metszik egymást egy, illetve két pontban.

Bizonyítás: Ha a hiperciklust és kört kimetsző síkok nem metszik egymást, akkor a görbék sem. (Hogy két ilyen sík felvehető az következik a párhuzamossági szög kisebb R feltevésből.) Ha a két sík metszi egymást, akkor a metszésvonal az α alapsíkot nem metszi, így a hiperszférával kettő, egy vagy nulla közös pontja van, tehát a két görbének is.

50. tétel: Hiperszférán két paraciklus kölcsönös helyzete a következő lehet: nem metszik egymást, metszik egymást egy, illetve két pontban.

Bizonyítás: A paraciklust kimetsző két síknak vagy nincs metszésvonala – ekkor a paraciklusok nem metszik egymást – vagy van. A metszésvonal az alapsíkot vagy nem metszi, vagy azzal párhuzamos. Így az előzőek alapján két paraciklus közös pontja nulla, egy, kettő lehet.

51. tétel: Hiperszférán paraciklus és kör kölcsönös helyzete a következő lehet: nem metszik egymást, metszik egymást egy, illetve két pontban.

Bizonyítás: A paraciklust és kört kimetsző két síknak vagy van metszésvonala, vagy nincs. Ha nincs, akkor a paraciklusnak sincs, ha van, akkor az az alapsíkot nem metszi. Mivel a nem metsző egyenesnek a hiperszférával kettő, egy vagy nulla közös pontja van, így a hiperciklus és körnek is.

52. tétel: Hiperszférán két kör kölcsönös helyzete a következő lehet: nem metszik egymást, metszik egymást egy, illetve két pontban.

Bizonyítás: A két kört kimetsző síkoknak, ha van metszésvonala, az az alapsíkot nem metszi. Ebből az előzőek alapján a tétel már következik.

Egy hiperszfératengelyre illeszkedő két sík által kimetszett hiperciklusnak metszési szögén az epiciklus mintájára (V. O. „A geometria alapjai" 138. oldalán) a síkok lapszögét értjük, vagyis a közös pontban húzott hiperciklus érintők szögét.

53. tétel: Ha a hiperszférán két hiperszféra tengelyhez tartozó két hiperciklust a két hiperszféra tengely által meghatározott hiperciklus úgy metsz, hogy annak egyik oldalán a belső szögek összege 2R-nél kisebb, akkor a két hiperciklus nem feltétlen metszi egymást azon az oldalon.

Bizonyítás: Az egymást nem metsző sík és egyenes értelmezése után

(41. tétel után) megállapított harmadik következmény alapján két nem metsző egyenesre illeszkedő két sík nem feltétlen metszi egymást. A két hiperszféra tengely nem metsző egyenesek. Igy, ha az ezekre illeszkedő két sík nem metszi egymást, akkor a hiperciklusok sem.

Nevezzük ezen hiperciklusok közül az első nem metszőket párhuzamosoknak.

Ezek alapján kimondható a következő tétel:

54. tétel: A hiperszférán a hiperbolikus síkgeometria érvényes.

Bizonyítás: Tekintsük egyeneseknek a hiperszférán azokat a hiperciklusokat, amelyeket a hiperszféra — tengelyre illesztett síkok metszenek ki. A 147. tétel értelmében — „Az episzférán érvényes az I.—III. axiómacsoportra felépített síkgeometria, amennyiben az episzférán az egyenest nem körré elfajult epiciklussal helyettesítjük" — az I.—III. axiómacsoport a hiperszférán érvényes.

Az 53. tétel értelmében a 14. § is érvényes, így a hiperbolikus geometria érvényes a hiperszférán.

Még kimutatjuk a folytonossági axiómák teljesülését.

IV.$_1$: Létezzék egy hiperciklus egy ráilleszkedő A ponttal, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik: Ha P egy A-tól különböző pont a hiperciklusón és A_1 olyan pont, amelyre (AA_1P) elrendezés érvényes, akkor létezik egy olyan $A_1 \ldots A_n$ pontsorozat, amelynek elrendezése $(AA_1 \ldots A_n)$, továbbá $\overset{\frown}{AA_1} \equiv \overset{\frown}{A_1A_2} \equiv \ldots \equiv \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ és (APA_n).

Ezen axióma érvényessége a következőképp látható be:

A 148. tétel értelmében — „Az archimédesi axióma minden egyenesre érvényes" — így a hiperciklushoz tartozó alapvonalra is. Tekintsük az alapvonal ezen M_i pontjaihoz tartozó hiperszféra (hiperciklus) tengelyeket. Az értelmezés alapján a tengelyeknek egy pontja van a hiperciklusón. Mivel a tengelyek nem metsző egyenesek, így a hiperciklusón kapott A_i pontok elrendezése $(A\,A_1 \ldots A_n)$. A 4. tétel értelmében viszont érvényes az $\overset{\frown}{AA_1} \equiv \overset{\frown}{A_1A_2} \equiv \ldots \equiv \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ egybevágóság is. Tehát az archimédesi axióma a hiperszférán teljesül.

IV.$_2$: Ha egy hiperciklusón végtelen sok $\overset{\frown}{A_nB_n}$ ív van adva, amelyekre $(A_kA_{k+1}B_1)$ és $(A_1B_{k+1}B_k)$ érvényes és nem létezik olyan hiperciklusív, amely teljesen egy A_jB_j és az összes többi rákövetkezőben fekszik, akkor létezik legalább egy olyan P pont, amely az összes hiperciklusívre illeszkedik.

Ennek az axiómának érvényessége is az előzőéhez hasonlóan látható be. Ui. a hiperciklus alapegyenesére az axióma érvényes, mivel minden egyenesre érvényes. Az alapegyenes ezen pontjaira illeszkedő tengelyek a hiperciklusból ugyanilyen tulajdonságú pontokat metszenek ki, mert nem metsző egyenesek és ha két olyan pont lenne a hiperciklusón, amely mindegyik ív belsejében van, akkor az alapegyenes egy pontjába két merőlegest húzhatnánk, ami ellentmondás.

Az epiciklusok egybevágóságának értelmezése alapján érvényes a következő tétel:

55. tétel: A hiperszférából annak tengelyére illeszkedő síkok által kimetszett hiperciklusok egybevágók.

Ui. a két sík nyalábegyenesekre illeszkedik, ezek középsíkja szintén. Erre tükrözve a hiperszféra önmagába megy át, a két sík egymásba, így a hiperciklusok szintén.

Mivel a paraciklusok egybevágók, következik:

56. tétel: Hiperszférán a paraciklusok egybevágók.

57. tétel: Hiperszférán vannak egybevágó körök, de nem minden kör egybevágó és vannak egyebevágó hiperciklusok, de nem minden hiperciklus egybevágó.

Bizonyítás: Tekintsünk két olyan síkot, amelyeknek α-hoz a közös merőlegeseik egybevágók, de különböző hiperszféra tengelyre illeszkednek. Az ezek által kimetszett körök kongruens leképezéssel egymásba vihetők, tehát egybevágók. Ha a közös merőlegeseik nem egybevágók, akkor nincs olyan kongruens leképezés, amely a hiperszférát önmagába és a két síkot egymásba vinné át. Ugyancsak ha legalább az egyik hiperciklust kimetsző sík nem hiperszféra tengelyre illeszkedik, nincs olyan kongruens leképezés, amely a hiperszférát önmagába és a két síkot egymásba vinné át, tehát a két hiperciklust sem, így azok nem egybevágók.

Ezek alapján érvényes a következő általános tétel:

58. tétel: A hiperciklusok nem egybevágók.

Ebből és a 12. tételből következik:

59. tétel: A hiperszférák nem egybevágók.

A 8., 9. és a 11. tételek alapján mondhatjuk:

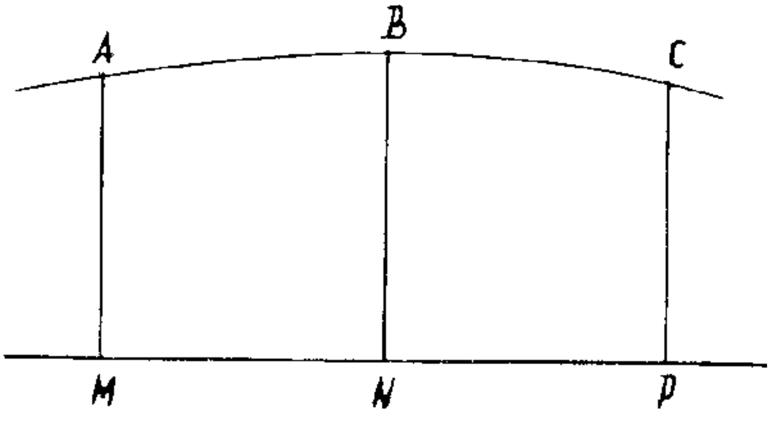
Az alapegyenes és a hozzátartozó hiperciklus párhuzamos, egyenlőközű vagy koncentrikus hiperciklusok.

Az alapsík és a hozzátartozó hiperszféra párhuzamos, egyenlőközű vagy koncentrikus hiperszférák.

Ebből következik, hogy koncentrikus hiperciklusok — illetve hiperszférák között — egy-egyértelmű megfeleltetés létesül, ha a közös tengelyegyenesen levő pontokat rendeljük egymáshoz.

60. tétel: Ha a hipercikluson $\widehat{AB} \equiv \widehat{BC}$ és $MA\perp$, $NB\perp$, $PC\perp$ tengelyek, akkor az alapegyenesen is $|MN| \equiv |NP|$.

Bizonyítás: Egybevágó ívekhez tartozó húrok a 4. tétel alapján egybevágók. ABNM négyszög egybevágó a CBNP négyszöggel a 120. tétel alapján — „Két Saccheri-négyszög egybevágó, hogyha az alapvonallal szemben fekvő oldalak egybevágók, továbbá azok az oldalak, amelyek az alapvonalat a szemben fekvő oldallal összekötik…"



5. ábra

A bizonyításból következik, hogy a tétel általános esetre is igaz. Vagyis:

61. tétel: Ha a hiperciklusonon $\widehat{AB} \equiv \widehat{CE}$ és MA, NB, PC, QE tengelyek, akkor $|MN| \equiv |PQ|$.

62. tétel: Ha $\widehat{AB} = n \cdot |MN|$, akkor $\widehat{AC}$ is $= n \cdot |MP|$, ahol PC az MA és NB középvonala.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján $|MP| \equiv |PN|$ és $\widehat{AC} \equiv \widehat{CB}$. De $\widehat{AC}+\widehat{CB} = 2\widehat{AC} = \widehat{AB}$ és $|MP|+|PN| = 2 \cdot |MP| = |MN|$. Igy $\widehat{AB} = n \cdot |MN|$-ből $2 \cdot \widehat{AC} = n \cdot 2 \cdot |MP|$, vagyis $\widehat{AC} = n \cdot |MP|$. Másképpen felírva: $\widehat{AC} : |MP| = n$.

1. következmény: Az $\widehat{AB}$ ív folytonos felezésével kapott ívekre is igaz a tétel.

2. következmény: Ha $\widehat{AB} = n \cdot |MN|$ és $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, $|MN| \equiv \equiv |NP|$, akkor $\widehat{AC} = n \cdot |MP|$.

63. tétel: Ha $\widehat{AB} = n \cdot |MN|$, akkor a hiperciklus tetszőleges AE ívére és a megfelelő $|MP|$-re is $\widehat{AE} = n \cdot |MP|$.

Bizonyítás: a) Legyen a hiperciklusom az A, B, E pontok elrendezése (AEB). Felezzük meg az AB ívet, az A, B-hez tartozó hiperciklus tengelyek középvonalával. Ez nyilván felezi $|MP|$-t is. Jelöljük a felezési pontokat B_1 és P_1-el. Tegyük fel, hogy E az AB_1 íven van. Akkor ezt ismét felezve A_1 és M_1 pontokat kapunk. Legyen most E az A_1, B_1 íven. Ezt az ívet ismét felezve és a pontokat A_i vagy B_i-vel jelölve, alkalmas jelöléssel elérhetjük, hogy:

$\widehat{AA_1} \leqq \widehat{AA_2} \leqq \ldots \leqq \widehat{AA_n} < \widehat{AE} < \widehat{AB_n} \leqq \widehat{AB_{n-1}} \leqq \ldots \leqq \widehat{AB_1}$, vagyis az elrendezés $(AA_1A_2 \ldots A_nB_nB_{n-1} \ldots B_1B)$. Igy a Cantor féle axióma alapján következik, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{AA_n} = \lim_{n\to\infty} \widehat{AB_n} = \widehat{AE}$$

De az előző tétel értelmében a sorozat bármely szakaszának és megfelelőjének hányadosa adott konstans érték: n, így ezek határértékének és megfelelőjének hányadosa is ezen konstanssal egyenlő.

b) Legyen a hiperciklusom az elrendezés (ABE). Tükrözzük ekkor az $\widehat{AB}$ ívet az NB tengelyre. A 62. tétel 2. következménye értelmében az így kapott B_1 és P_1 megfelelő pontokhoz $\widehat{AB_1} = n \cdot |MP_1|$. Ha E még mindig nem illeszkedik az $\widehat{AB_1}$ ívre, akkor $\widehat{AB_1}$-et ismét tükrözzük B_1N_1-re és így tovább mindaddig, amíg E nem illeszkedik $\widehat{AB_i}$-re. Az előzőekből következik, hogy $\widehat{AB_i} : |MP_i| = n$. Most az $\widehat{AB_i}$ ívre alkalmazva az a) eljárást, kapjuk a tételt.

64. tétel: Ha $\widehat{AB} : |MN| = n$, akkor a hiperciklus tetszőleges $\widehat{CE}$ ívére is: $\widehat{CE} : |PQ| = n$.

Ui. $\overset{\frown}{AE}$ középvonalára tükrözve ABNM-et, az előző helyzet áll elő, arra pedig a tétel igaz.

1. következmény: Hipercikluson és alapvonalán a megfelelő ívek hányadosa egyenlő. Vagyis: $\overset{\frown}{AB} : |MN| = \overset{\frown}{CE} : |PQ|$.

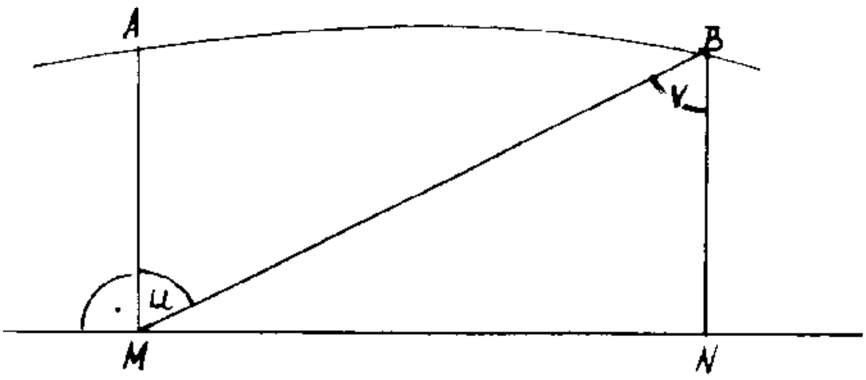
2. következmény: A hiperciklus két tetszőleges ívének hányadosa egyenlő a megfelelő alapvonalszakaszok hányadosával:

$$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CE} = |MN| : |PQ|.$$

Az előző tételek alapján kimondhatjuk:

65. tétel: Az $\overset{\frown}{AB} : |MN|$ hányados független az $\overset{\frown}{AB}$ hosszától. A sinus tétel levezetése után bizonyítható, hogy:

66. tétel: Tetszőleges AB hiperciklus ívre és az alapegyenesen ennek megfelelő $|MN|$ szakaszra: $\overset{\frown}{AB} : |MN| = \sin u : \sin v$, ahol $u = AMB\sphericalangle$ és $v = MBN\sphericalangle$.



6. ábra

(A bizonyítás az Appendix 27. §-ban található.)

Sőt érvényes a következő tétel is.

67. tétel: Az MN alapegyenestől x és y távolságú AB és CD hiperciklusokra is $\overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{AB} = \sin u : \sin v$.

(Bizonyítás az Appendix 162. oldalán.)

IRODALOM

1. *Bolyai János:* Appendix. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
2. *D. Hilbert:* Grundlagen der Geometria. Fünfte Auflage, Leipzig und Berlin 1922.
3. *Varga Ottó:* A geometria alapjai. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1958.
4. *N. I. Lobacsevszkij:* Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből. Akadémiai Kiadó, Budapest 1951.
5. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1960.