JÁROSI ANDRÁS főiskolai adjunktus:

A NEGATÍV SZÁMOK BEVEZETÉSÉVEL KAPCSOLATOS NÉHÁNY PROBLÉMA AZ ÁLTALÁNOS ISKOLAI SZÁMTAN TANÍTÁSÁBAN

Az általános iskolai számkörbővítés utolsó lépése a negatív számok bevezetése, s ezzel a racionális számkör teljes kiépítése. Fontosság tekintetében semmivel sem marad mögötte az addig végzett két számfogalombővítésnek (a 0 szám és a törtszám fogalma), nehézségei pedig jóval nagyobbak az előzőkénél. Ennek a ténynek a tárgykör sajátosságaiból fakadó okai közismertek. Nagy matematikusok (pl. F. Klein) és kiváló metodikusok (pl. V. M. Bragyisz) egyaránt felhívják rá a figyelmet. Az anyag tantervi elhelyezése pedig újabb szempontok tekintetbe vételét teszi szükségessé. A negatív számok tanítása ugyanis jelenleg közvetlenül az algebra elemeinek bevezetése előtt történik, az algebrába pedig szorosan beleépül az egyenletek tanítása. Úgy kell tehát tanítanunk a negatív szám fogalmát és a racionális számokkal való műveleteket, hogy megfelelően előkészítsük mind az algebra elemeinek, mind az egyenleteknek a tanítását Azt sem szabad szem elől téveszteni, hogy az általános iskola elvégzése után a tanulók egyre nagyobb többsége középiskolában folytatja tanulmányait. A középiskolai matematika-tanítás pedig elég magasfokú absztrakciót kíván. Az absztraháló képességet sok konkrét tény elemzésével lehet kifejlesztenünk a tanulókban. Az elemzés alapjául szolgáló tények lehetnek a matematika absztrakt tényei is. Nem mehetünk mindig vissza a gyakorlati élet jelenségeihez már az általános iskolában sem, különben a tanulók sohasem jutnának el a bizonyításig. Tanításunknak tehát elég konkrétnek kell lennie, hogy a tanulók a valóságból eredőnek lássák a negatív számokat, helyesen fogják fel azok értelmét, ugyanakkor azonban elég absztraktnak ahhoz, hogy képesekké tegyük a tanulókat tanulmányaiknak a középiskolában való törés nélküli folytatására. Meg kell találnunk az átmenetet az általános és középiskolai matematikatanítás között. Ennek érdekében sokat tehetünk az előjeles számok tanítása során.

A negatív számok tanítása terén fennálló problémák súlyát érzik kartársaink, általános- és középiskolaiak egyaránt; az általános iskolai kartársak közvetlenül a tárgykör tanítása alkalmával, a középiskolában tanítók pedig következményeiben. A problémák kielégítő megoldását az nehezíti, hogy az alkalmazott módszerek fogyatékosságai elsősorban nem azoknál a kartársaknál éreztetik hatásukat, akiknek munkája nyomán a hiányosságok bekövetkeztek, hanem a tanulmányok egy későbbi szakaszán. A szóbanforgó témára vonatkozó közlemények aránylag ritkán jelennek meg, akkor is inkább szakfelügyelők vagy olyan szaktanárok tollából, akiknek valamely körülmény folytán a kétféle iskolatípus tantervi anyagán túlmenő áttekintése van.

Ennek a dolgozatnak a megjelenésében is elsősorban a főiskolai munka játszott közre, ti. az általános iskolai matematikatanítás módszertanának előadása tette szükségessé, hogy foglalkozzam a témával. Hozzájárult az oktatási reform országos méretű programmá való szélesítése is, amely számunkra kötelezően előírja, hogy minden tőlünk telhetőt tegyünk meg célravezetőbb, gazdaságosabb módszerek kidolgozására.

Munkám közvetlen elindítója *„A matematika tanítása”* c. folyóirat 1958. évi 3., illetve 1959. évi 5. számában megjelent két cikke volt. Az első *Kelemen* Jánosné—*Mosonyi* Kálmán: *A racionális számok tanítása,* a második *Taišl Jan-nak* a csehszlovák *Matematika ve škole* c. folyóiratból ugyanezen a címen átvett tanulmánya. A két tanulmány együtt hűen tükrözi a jelenlegi helyzetet, egyrészt, hogy szükséges és folyamatban van új utak keresése, nemcsak nálunk, hanem más országokban is, másrészt, hogy a módszerek megválasztásának kérdésében eltérők a vélemények. Az előbi két tanulmány elgondolásában az az alapvető különbség, hogy az első a gyakorlati életnek a negatív számok tanításában felhasználható, meglehetősen szűk problémakörére épít, s nem fordít elég gondot az általánosításra, továbbá — a monotonitás elvétől eltekintve — nem tulajdonít nagyobb jelentőséget a műveletek tulajdonságainak, míg a második tanulmány a műveletek tanításában azok általánosabb, az „új” számokra, de a „régiekre” is érvényes értelmezéséből, vagy pedig a műveletek alapvető tulajdonságainak megtartásából építi fel a műveletekre vonatkozó ismereteket; a negatív szám fogalmának, valamint a műveletek közül elsősorban az összeadásnak a tárgyalásakor erősen támaszkodik a gyakorlati életre, azt a kivonásnál már háttérbe szorítja, a szorzásnál és osztásnál pedig teljesen absztrakt módon jár el.

A konkrét és absztrakt viszonyában mutat elsősorban nagy eltérést a fenti két közlemény, de ugyanez a különbség tapasztalható a VIII. osztályban jelenleg használatban lévő kísérleti tankönyv és a második tanulmány között.

Felmerült bennem a kérdés: hogyan fogadják a tanulók ezt az absztraktabb tárgyalási módot, felkelti-e érdeklődésüket, hogyan kapcsolódnak bele a közös munkába, magukévá tudják-e tenni ilyen módon a tanított anyagot, azaz járható-e ez az út az általános iskolában?

Magamban a kérdésre határozott igennel válaszoltam, azonban, az általános iskolában tanító kartársak véleménye megoszlott. S mivel erre elfogadható választ csak a gyakorlat adhat, elhatároztam, hogy megpróbálom kísérlet útján eldönteni a kérdést. Részletesen kidolgoztam a negatív szám fogalmának bevezetését, a műveletek közül pedig az összeadást és a kivonást saját elgondolásom szerint. A szorzásra és osztásra teljesen elfogadtam Taisl elgondolását. Az így összeállított terv szerint tanítottam az anyagot az osztás kivételével, tekintettel arra, hogy az már nem okoz különösebb problémát.

Ezt az elgondolást ismertetem az alábbiakban, valamint azt, hogy milyen mértékben sikerült megvalósítanom.

1. A negatív szám fogalma

A negatív számok bevezetését a tanmenet szerint a törtek ismétlése előzi meg. Ennek befejezése kiváló alkalom arra, hogy áttekintsük az eddig megismert számokat és a velük végezhető műveleteket. Így megvizsgálhatjuk azt a kérdést is, hogy elvégezhető-e minden esetben valamennyi művelet. Megállapíthatjuk, hogy az összeadás és a szorzás mindig elvégezhető, a kivonás és az osztás azonban nem. A kivonás akkor nem végezhető el, ha a kivonandó nagyobb, mint a kisebbítendő, az osztás pedig 0 osztó esetén. Megvizsgáljuk mindkettő okát is. A kivonás azért nem végezhető el az említett esetben, mert nem ismerünk nullánál kisebb számokat. A tanulók ilyenkor azt mondják, hogy nincsenek a nullánál kisebb számok. A 0-val való osztás pedig értelmetlen.

A következő órán felvetjük az így előkészített problémát. Valóban nincsenek a nullánál kisebb számok? Nincsenek a nullánál kisebb mennyiségek? Gondoljunk pl. a hőmérsékletre. Van-e a nullánál alacsonyabb hőmérséklet? Van. A minusz 1 fok, minusz 2 fok stb. Itt a minusz szóval éppen azt fejezzük ki, hogy a nullánál alacsonyabb hőmérsékletről van szó.

Lehet-e a nullánál is kevesebbet jelentő vagyoni helyzet? Lehet, mégpedig akkor, ha valakinek adóssága van.

Vannak tehát a nullánál is kevesebbet jelentő mennyiségek, így a nullánál kisebb számok is.

Most ezekkel a számokkal fogunk megismerkedni.

Ha pl. este a hőmérséklet 9 fok és reggelig 5 fokot süllyed, akkor a hőmérő reggel $9 - 5 = 4$ fokot mutat. Ha pedig este 3 fok a hőmérséklet és reggelig 4 fokot süllyed, akkor hány fokot mutat reggel a hőmérő? Minusz 1 fokot. Ha az előbbi módon akarjuk kiszámítani, akkor most a $3 - 4$ kivonást kell elvégeznünk. A hőmérő higanyszála ugyanis fokozatosan süllyed 3 fokról a 0 fokig, majd innen a minusz 1 fokig. Ugyanezt kivonással jelölve:

$$3 - 4 = (3 - 3) - 1 = 0 - 1 = -1$$

A minusz egy fok tehát azt jelenti, hogy a 0-nál egy fokkal alacsonyabb a hőmérséklet.

Megmagyarázzuk a jelölést is. A $0 + 1$ összeadás elvégzése után az eredmény 1, nem írtuk ki a 0-t, most a $0 - 1$ kivonás elvégzése után az eredmény -1 lesz, itt sem írjuk ki a 0-t.

Hasonló a helyzet, ha Pista 3 Ft megtakarított pénzéből kis húgának szeretne valamit venni névnapjára s kiderül, hogy a kiválasztott ajándék 4 Ft-ba kerül. Édesapjától, akivel együtt ment vásárolni, kölcsön kér 1 Ft-ot s hazaviszi az ajándékot. 3 Ft-ja volt és 4 Ft-ot költött. Mennyi pénze van? Az előbbi kivonást elvégezve megállapíthatjuk, hogy —1 Ft-ja van, azaz tartozik 1 Ft-tal. A —1 Ft azt jelenti, hogy a 0-nál 1 Ft-tal kevesebb pénze van.

A 3 — 4 kivonást elvégezhettük volna hőmérő közbeiktatása nélkül is, az összeg kivonásának módjára. Ahogy 12-t úgy vonunk ki, hogy először kivonunk 10-et, majd 2-t, a 4-et, azaz 3 + 1-et is úgy vonhatjuk ki, hogy kivonunk 3-at, majd 1-et, így is megkaphatjuk a —1-et. A —1 tehát a nullánál 1-gyel kisebb számot jelent.

Hová helyezzük el a számegyenesen? A számegyenesen egy kiválasztott számnál kisebb számok tőle balra vannak, a nagyobbak pedig tőle jobbra. Ezt a rendet továbbra is fenntartjuk, és a számegyenest balra meghosszabbítva ábrázoljuk a —1-et, a 0-tól egy egységgel balra.

Az ábrázolás után megkérdezzük: Melyik szám nagyobb, a —1, vagy a 0? Mennyivel nagyobb? Hol van a 0 a számegyenesen a —1-hez viszonyítva? (Tőle egy egységgel jobbra.) Hogyan lesz 0-ból —1? Hogyan lesz —1-ből 0? (Ha 1-et hozzáadok.)

Ezután azt vizsgáljuk meg a számegyenesen, hogy a —1 hogyan viszonyul az 1-hez. Kérdések: Melyik kisebb, a —1 vagy az 1? Miért? Mennyivel kisebb? Miért? Melyik nagyobb, —1 vagy 1? Miért? Mennyivel nagyobb? Miért? Hogyan lesz 1-ből —1? Hogyan lesz —1-ből 1?

Hasonló módon viszonyítjuk a —1-et a 3-hoz, majd a 4-hez, 5-höz, utóbbi két esetben azonban az indoklásokat elhagyhatjuk.

Miután a —1-et így szervesen hozzákapcsoltuk az eddigi számokhoz, a 3 — 5 kivonás elvégzésével bevezetjük a —2-t. Megkeressük a helyét a számegyenesen a 0-tól 2-vel, a —1-től 1-gyel balra. Megállapítjuk, hogy a 0-nál 2-vel, a —1-nél 1-gyel kisebb; a 0 2-vel, a —1 pedig 1-gyel nagyobb, mint —2. Ezután a —1 esetéhez hasonló módon viszonyítjuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokhoz, valamint ezeket a számokat —2-höz. Minden egyes esetben megállapíthatjuk az összehasonlítás eredményét lehetőleg más-más tanulóval, hogy valamennyien gondolkodjanak az új számok viszonylataiban.

Megismertetjük még a —3, —4, —5 számokat az előbb elmondottak szerint, a további negatív egész számokra pedig csak utalunk, majd bejelentjük, hogy a most megismert új számokat negatív számoknak nevezzük, s leírásukkor mindig eléjük írjuk a „—" jelet, annak kifejezésére, hogy ezek a számok a nullánál kisebbek, hiszen olyan kivonással jutunk hozzájuk, amelynél a nullából is el kellett vennünk. (Minusz = kisebb.)

A „régi" számokat is el kell neveznünk, hiszen a „régi" és „új" megkülönböztetés csak most használható, amikor a negatív számok még valóban „újak". Azokat pozitív számoknak nevezzük és az összeadás + jelével jelölhetjük meg úgy, hogy eléjük írjuk a + jelet, annak kifejezésére, hogy a 0-nál nagyobbak. (0+2 = +2)

Azt is megemlítjük, de nem különösebb hangsúllyal, hogy a pozitív számok „+" jelét és a negatív számok „—" jelét előjeleknek nevezzük. A negatív szám előjelét mindig ki kell tennünk; a pozitív szám előjelét elhagyhatjuk, azonban jegyezzük meg, hogy az előjel nélküli szám mindig pozitív számot jelent.

A következő láncszem az előzők szellemében néhány negatív törtszám kivonással való előállítása és ábrázolása a számegyenesen, hogy ezzel a negatív törtszámokat is beillesszük az eddigi számok közé.

A fentebb ismertetett módszernek két jellegzetessége van:

Az egyik az, hogy az új számfogalmat egészen kis számkörben alakítottuk ki és ott kapcsoltuk a régihez, ahol az természeténél fogva a legcélszerűbb. Ebben a számkörben a viszonyok szemléletesen áttekinthetők, könnyen érthetők, és a többi új számokra már nehézség nélkül átvihetők. Ezzel elértük azt, hogy az eljárás absztrakt mozzanatai ellenére sem szakadtunk el a szemlélettől, de a gyakorlati élet közelségétől sem.

A másik sajátos vonást az jelenti, hogy az új számokkal egyidejűleg azok nagyságviszonyait is megállapítottuk, mégpedig a 0-hoz, egymáshoz és a pozitív számokhoz való viszonyítást egyszerre. Ezzel valósággal egybeolvasztottuk az új számokat a régiekkel, szervesen összetartozó, egymást kiegészítő dialektikus egységbe. Szívesen idézem itt Faragó Lászlót: „Igen fontos és a matematikatanítás filozófiai tudatosságának szempontjából külön is említést érdemel az a gondolat, hogy egyetlen szám sem létezhet másként, mint más számokkal, a számok rendszereivel kapcsolatban. Így pl. a helyes szemléletű tanítás érdekében tisztában kell lennünk azzal, hogy a negatív számok csak a pozitív számokhoz viszonyítva nyernek „realitást", és „önállóságot", „függetlenséget" csak az algebrai (formális logikai) absztrakció kölcsönöz számukra." (F. L. A matematikatanítás feladatai a világnézeti nevelés terén. A matematika tanítása, 1959. évi 2. szám. 48. oldal.)

* * *

Miután így megismertük a negatív számokat, mint a nullánál kisebb számokat, felhasználhatjuk azokat a változás jellemzésére. Mindenekelőtt *a változás fogalmát kell tisztáznunk.* A legalkalmasabbnak látszik ezt a hőmérsékleti változásokkal illusztrálni. Az adatokat célszerű áttekinthető táblázatba foglalni. Ne lepődjünk meg azon, hogy egyes esetekben délben alacsonyabb a hőmérséklet mint reggel, ilyen előfordulhat a gyakorlatban is, csak sokkal ritkábban, mint az ellenkezője. Ezt a tanulókkal is megbeszélhetjük. A didaktikai cél érdekében szükségünk van ilyen adatokra a későbbiek során is.

A hőmérséklet		A változás
reggel	délben	
12°	18°	18° — 12° = 6° (növekedés)
5°	9°	9° — 5° = 4° (növekedés)
5	3°	3° — 5° = —2° (csökkenés)
4	1°	1° — 4° = —3° (csökkenés)
4°	0°	0° — 4° = —4° (csökkenés)
4°	4°	4° — 4° = 0° (0 változás)

Az első két esetben természetes, a gyakorlatban is szokásos eljárásról van szó. A változást úgy kaptuk, hogy a későbbi hőmérsékletből vontuk le a korábbit, a déliből a reggelit. A harmadik esetben is azt szoktuk mondani, hogy a változás 2°. Ha azonban pontosabban ki akarjuk fejezni a változást, akkor azt is meg kell mondanunk, hogy növekedésről vagy csökkenésről van-e szó. Ezt úgy tudhatjuk meg, hogy az eredeti állapotot jelző adatot leszámítjuk a változás bekövetkezése utáni állapotot kifejező adatból. Így a változás még azt is jelzi, hogy növekedésről vagy csökkenésről van-e szó. Azt láthatjuk ugyanis, hogy amikor a hőmérséklet növekedett, a változás pozitív, amikor pedig a hőmérséklet csökkent, a változás negatív. Beszélhetünk ezenkívül nulla változásról is. Tehát a matematika nyelvén a valóság most pontosabban, jobban jellemezhető, mint a mindennapi beszédben.

A táblázat utolsó előtti sorának adataiból arra is rámutathatunk, hogy —4° a jelen esetben jelenthet hőmérsékletet, de a hőmérséklet változását is, mégpedig 0°-ról —4°-ra. Ha tehát 0 fokról esik a hőmérséklet —4 fokra, akkor a hőmérséklet és a változás egyaránt —4°.

Egyúttal azt is észrevehetjük, hogy a negatív számmal kifejezett mennyiség ellentétes a pozitív számmal kifejezett mennyiséggel. Ezt már korábban is tapasztalhattuk: vagyon—adósság, meleg—hideg. Tehát a pozitív és negatív számok alkalmasak az ellentétes mennyiségek jelölésére.

* * *

A későbbiek szempontjából *bevezetjük még az ellentett számok* fogalmát: 5 és —5, 2 és —2, stb. 5-nek —5 és —5-nek 5 az ellentettje. Ezek a számegyenesen a 0-hoz viszonyítva szimmetrikusan helyezkednek el.

Az abszolút értéket az ellentett számokkal kapcsolatban tárgyaljuk. Az ellentett számok ebben egyeznek meg. A számok abszolút értéke a számegyenesen a 0-tól való távolságukat jelenti. Jellemezzük az abszolút értéket úgy is, hogy az előjel elhagyásával kapott szám. Ez 0-tól különböző szám esetében mindig pozitív. Pozitív szám abszolút értéke maga a szám, negatív szám abszolút értéke az ellentettje, 0 abszolút értéke 0.

Az abszolút érték fogalmának felhasználásával is megfogalmazzuk a racionális számok nagyságviszonyaira megállapított törvényszerűséget. Eddig az összehasonlítás alapja az volt, hogy a számok a számegyenesen egymáshoz viszonyítva hogyan helyezkednek el. Most tulajdonképpen csak a negatív számok összehasonlításával kell behatóan foglalkoznunk. Ha balra haladunk a számegyenes negatív felén, egyre kisebb számokhoz jutunk, ugyanakkor az abszolút értékük nő. Tehát *a negatív szám annál kisebb, mennél nagyobb az abszolút értéke.* Nem lesz azonban fölösleges ezt gyakorlati példával is megvilágítani: ki „áll jobban", akinek —5 Ft-ja, vagy akinek —10 Ft-ja van? (Bragyisz módszertana, 242 oldal.)

2. A racionális számkör

A negatív számok bevezetése után meg kell beszélnünk a racionális szám fogalmát. Nem elegendő ehhez bejelentenünk, hogy a pozitív és negatív számokat, valamint a 0-t közös néven racionális számoknak nevezzük. A tanulókban ugyanis az a téves felfogás alakulhat ki, hogy az előjel adja a szám racionális jellegét. Ezért mégegyszer át kell tekintenünk az eddigi számfogalmakat, s a számfogalom bővítésének lehetőségeit az alapműveletek szokásos sorrendjében. Így a számfogalom felépítésében rámutatunk arra, hogy kivonással juthatunk el a természetes szám fogalma után az egész számokhoz, amelyek magukban foglalják e természetes számokat is, osztással pedig a törtszámokhoz, s ezek speciális esetekként magukban foglalják az egész számokat is. A racionális számok tehát a közönséges tört alakban felírható számokat jelentik. Ezek lehetnek pozitívok és negatívok; összekapcsolja, vagy ha úgy tetszik, elválasztja őket a nulla, amely sem negatív, sem pozitív.

* * *

Mielőtt rátérnék a racionális számokkal való műveletek tárgyalására, szeretném még megindokolni, hogy *miért kapott elsődlegességet a negatív szám fogalmának bevezetése alkalmával a 0-hoz való viszonyítás,* és miért nem a pozitív számok ellentettjeiként értelmeztük a negatív számokat, mint azt az említett második tanulmány is tette. Utóbbi esetben az a helyzet állt volna elő, hogy bevezettük volna a „—" jelet az ellentétes mennyiségek jelölésére, mint előjelet, ugyanakkor használjuk a kivonás jelölésére is. Valamilyen formában meg kell indokolnunk a tanulók előtt, hogy egy szimbólumot két fogalom jelölésére is használunk, s önkéntelenül is felmerül a kérdés, hogy nem okoz-e zavart, miről ismerjük fel adott esetben, hogy a kivonás jelét jelenti-e, vagy pedig előjelet. Ezt a megkülönböztetést a tanitás során el kellene tüntetnünk, s ez fölösleges, elkerülhető.

A későbbiek szempontjából is kedvezőbb az itt alkalmazott eljárás. Amikor ugyanis azt akarjuk kifejezni egy *a* számról, hogy pozitív, akkor azt mondjuk, hogy nagyobb a nullánál, $a > 0$, a negatív számot pedig azzal jelöljük meg, hogy kisebb a nullánál, $a < 0$.

Mi *a mennyiség mértékeként vezettük be a negatív számokat, és nem a változás mértékeként,* utóbb azonban kimutattuk, hogy a negatív szám a változás mértékét is jelentheti. A két jelentés között megkerestük a kapcsolatot.

A változás mértékeként azért értelmeztük a negatív számokat, mert ez kitűnően felhasználható a racionális számok összeadására, s azért került csak utóbb sor erre, mert a mennyiség mértéke egyszerűbb fogalom, mint a mennyiség változásának a mértéke.

3. Racionális számok összeadása

Miután a negatív szám fogalmát és az eddig tanult összes számokat magában foglaló racionális számkör fogalmát tisztáztuk, rátérünk a megismert számkörben az alapműveletek tanítására. Rögtön megjegyezzük azonban, hogy a megismert számfogalom az eddigiek során korántsem vált teljessé, s amig ebben a tárgykörben maradunk, a vele való foglalkozás állandóan mélyíti, tartalmában gazdagítja a számfogalmat.

Az összeadás tanítására az előjeles számoknak azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy alkalmasak a változás jellemzésére.

A reggel, délben és este mérhető hőmérsékletekből táblázatot készítünk. Az adatokat úgy választjuk meg, hogy alkalmasak legyenek az összeadás valamennyi esetének a megbeszélésére az abszolút értékek és előjelek szempontjából.

Miután beírtuk a reggeli, déli és esti hőmérsékleteket, megállapítjuk esetenként a hőmérsékletváltozást reggeltől délig, déltől estig, végül reggeltől estig, a változás fogalmának korábbi értelmezése szerint. A gyakorlati kivitelezésnek sokféle módja lehetséges. Mi úgy jártunk el, hogy a hőmérsékletváltozások első két oszlopát az iskolában készítettük el, az összes változást, azaz a reggeltől estig bekövetkezett változást pedig a tanulók házi feladat keretében állapították meg. A változások minden értékét színessel, pirossal írtuk a könnyebb áttekinthetőség végett. Így a következő táblázat áll rendelkezésünkre:

A hőmérséklet					Összes változás
Reggel	Változás	Délben	Változás	Este	
1°	+4°	5°	+2°	7°	+6°
1°	+1½°	2½°	+3½°	6°	+5°
7°	—2°	5°	—3°	2°	—5°
7°	—½°	6½°	—1½°	5°	—2°
3°	+6°	9°	—2°	7°	+4°
6°	+2°	8°	—5°	3°	—3°
6°	—3°	3°	+1°	4°	—2°
3°	—1°	2°	+4°	6°	+3°
2°	+6°	8°	—6°	2°	0
7°	—2°	5°	+2°	7°	0
5°	—2°	3°	0	3°	—2°
6°	0	6°	—4°	2°	—4°
1°	0	1°	+2°	3°	+2°
2°	+3°	5°	0	5°	+3°

Szeretném még egyszer hangsúlyozni, hogy az összes változást nem összeadás útján nyertük, hanem a reggeli és esti hőmérséklet összehasonlításából.

Az első két sor adatai azt mutatják, hogy az összes változás egyenlő a két egymás után bekövetkezett változás összegével. Ez természetes, hiszen ha a hőmérséklet pl. először 4 fokkal, majd 2 fokkal emelkedik, akkor a két egymás utáni változás eredményeként összesen 6 fokkal emelkedik.

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban is az összes változást fogjuk tekinteni a két változás összegének. A megállapodás alapján felírjuk az egyes sorokban található adatokból az összeadásokat a következő tagolásban:

$$\begin{aligned} (+4) + (+2) &= +6 \\ (+1^1/_2) + (+3^1/_2) &= +5 \\ (-2) + (-3) &= -5 \\ (-^1/_2) + (-1^1/_2) &= -2 \end{aligned}$$

A felírt összeadásokban tehát nem számítással kaptuk az eredményt, hanem az előbbi megállapításból eredő tényként. Menet közben azonban az egyes összeadások érthetőségét megvilágítjuk a változás fogalmával így: minusz 2 meg minusz 3 az minusz 5. Ez természetes, mert ha a hőmérséklet először két fokkal, azután 3 fokkal csökken, akkor összesen 5 fokkal csökken.

A továbbiakban az első két esetből megállapíthatjuk, hogy pozitív számokat most is úgy adunk össze, mint eddig.

A második két sorban megvizsgáljuk, hogy milyen összefüggés áll fenn az összeg abszolút értéke és a tagok abszolút értéke, valamint az összeg előjele és a tagok előjele között. Ennek alapján megfogalmazzuk két negatív szám összeadásának módját:

Két negatív számot úgy adunk össze, hogy abszolút értékeiket öszszeadjuk és az összeg elé „—" jelet írunk.

Eután felvetjük a kérdést: van-e valami megegyezés az első két sor és a második két sor összeadási feladatában? Igen, mégpedig az, hogy minden esetben két egyenlő előjelű számot kellett összeadnunk, az öszszeg abszolút értéke a tagok abszolút értékének összege, az összeg előjele pedig a tagok közös előjele volt. A tanulókkal közösen megfogalmazzuk a szabályt:

Két egyenlő előjelű számot úgy adunk össze, hogy az abszolút értékeket összeadjuk és az össszeg elé a közös előjelet írjuk.

A következő lépés két különböző előjelű szám összeadása. Felírjuk a táblázat következő négy sorából az alábbi összeadásokat:

$$\begin{aligned} (+6) + (-2) &= +4 \\ (+2) + (-5) &= -3 \\ (-3) + (+1) &= -2 \\ (-1) + (+4) &= +3 \end{aligned}$$

A változás fogalmával most is alátámasztjuk az eredmények érthetőségét minden esetben pl. így: ha a hőmérséklet 6 fokkal emelkedik, azután két fokkal süllyed, akkor végeredményben együttesen csak 4 fokkal emelkedett. A fentiek elemzése során megállapíthatjuk, hogy mind a négy esetben két különböző előjelű szám összegéről van szó. Ismét megkeressük a kapcsolatot az összeg abszolút értéke és a tagok abszolút értéke, továbbá az összeg előjele és a tagok előjele között. Az összeg abszolút értéke egyenlő a tagok abszolút értékének különbségével, az előjele pedig a nagyobb abszolút értékű szám előjelével egyezik meg. Az összeadás szabálya tehát:

Két különböző előjelű számot úgy adunk össze, hogy a nagyobb abszolút értékből kivonjuk a kisebb abszolút értéket és az eredmény elé a nagyobb abszolút értékű szám előjelét írjuk.

(A szabály megfogalmazásakor szándékosan használtuk az eredmény szót, mert akár összeget, akár különbséget mondanánk, egyaránt zavarna.)

Az eddigiekhez hasonló módon állapíthatjuk meg a

$$(+6) + (-6) = 0 \qquad (-2) - (+2) = 0$$

illetve

$$(-2) + 0 = -2 \qquad 0 + (-4) = -4 \qquad 0 + (+2) = +2 \qquad (+3) + 0 = +3$$

összeadásokból, hogy:

Két ellentétes szám összege mindig nulla.

Ha egy kéttagú összeg egyik tagja nulla, akkor az összeg egyenlő a másik taggal. (Vagy egyszerűbben: Ha egy számhoz nullát adunk, vagy nullához adunk egy számot, akkor magát a számot kapjuk.)

Az utolsó két szabály ismeretére, helyesebben ezek megfordítására szükségünk lesz a szorzás tanításakor, ezért megemlítjük, hogy *ha két szám öszege nulla, akkor a két szám egymásnak ellentettje,* továbbá, *ha egy kéttagú összeg értéke egyenlő az egyik taggal, akkor a másik tag nulla.* Utalhatunk rá példával így: Mennyit kell adnunk 6-hoz, hogy 0-t kapjunk? Mennyit kell adnunk —2-höz, hogy —2-t kapjunk?

Eddig csak az összeadás elvégzésének módját ismerték meg a tanulók, még nem tudják, *mit jelent negatív szám hozzáadása egy számhoz.* Negatív szám hozzáadásának fogalmát a számegyenes segítségével világítjuk meg. Pozitív számhoz, nullához és negatív számhoz adjuk ugyanazt a negatív számot, pl. —2-t, s az összeadást ábrázoljuk a számegyenesen. Az összeadásnál használt táblázat néhány adatával is elvégezhetjük a számegyenesen az összeadást, megjegyezve, hogy az első változás induljon ki 0-ból (az összeg első tagját mint a nullából kiinduló változást ábrázoljuk.) A változást nyíllal (vektorral) jelölve látható, hogy negatív szám hozzáadásakor mindig balra haladunk a számegyenesen, ugyanúgy, mint pozitív szám kivonása esetén. A tanulók elég könnyen megállapítják, hogy negatív szám hozzáadásakor ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha a vele egyenlő abszolút értékű pozitív számot kivontuk volna. Több példa alapján megállapítjuk: *negatív szám hozzáadása a vele egyenlő abszolút értékű poztív szám kivonását jelenti.*

Amíg csak pozitív számokat adtunk össze, a hozzáadás mindig növelést jelentett, hozzáadással mindig többet kaptunk. Negatív szám hozzáadásakor viszont kevesebbet kaptunk. Racionális számok körében tehát nem érvényes az összeadásnak az a tulajdonsága, hogy az összeg nagyobb lesz, mint bármely tagja. A hozzáadás nem mindig jelent ezután nagyobbítást. Meg kell tehát vizsgálnunk, hogy érvényesek-e továbbra is az összeadás alapvető tulajdonságai, a felcserélhetőség és a csoportosíthatóság.

A felcserélhetőség igazolására változatos példákat írunk fel:

$$2 + 3 = 3 + 2 \qquad (-4) + (-7) = (-7) + (-4)$$
$$2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2 \qquad (+5) + (-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}) + (+5)$$
$$(-3) + 0 = 0 + (-3)$$
$$(+6) + 0 = 0 + (+6)$$

A felcserélhetőség törvényét érvényesnek találjuk racionális számok összeadásakor is. Látjuk, hogy milyen sok példára van szükség a törvényszerűség megállapítására. A felírása viszont ilyen sokféle adattal nehézkes. Egyszerűbben fejezhetjük ki a fenti példákkal érzékeltetett törvényt, a következő módon: jelöljük az egyik racionális számot a-val, a másikat b-vel. Az a és b így akármelyik fenti számpárt jelentheti, ennélfogva a sok példa helyett az

$$a + b = b + a$$

egyenlőséget írjuk.

Hasonló módon járunk el *a csoportosíthatóság érvényben maradásának megállapítására is.* Gazdag tény-anyagból általánosítunk és algebrai formában is felírjuk az eredményt:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

A tapasztalat azt mutatja, hogy a tanulók csoportosításon értik a tagok sorrendjének megváltoztatásával kapott zárójelezéseket is, pl. $(2 + 3) + 5 = (5 + 2) + 3$, pedig ez már a felcserélés és csoportosítás együttes alkalmazását jelenti. Ügyelnünk kell a fogalmak tisztaságára.

Az összeadás kommutatív és asszociatív törvényét azért írtuk fel algebrai alakban is, mert a *betűjelölés használatára alig van ennél kedvezőbb lehetőség.* Itt ugyanis a lehető legvilágosabban kifejezésre jut, hogy a betűk számokat jelentenek, másrészt indokolt is a betűk használata, mert segítségükkel egyszerűbben és általánosabban kifejezhetjük a matematikai törvényszerűségeket, mint a számok sokaságával. Ezzel hozzájárulunk a betűjelöléshez szükséges absztrakció idejének széthúzásához, előbbre hozzuk — ha kevéssel is — annak kezdetét; ilyen módon is gyarapítjuk azoknak a konkrét tényeknek a számát, amelyekre az algebra elemeinek a tanításakor támaszkodhatunk.

4. A racionális számok kivonása

A kivonás tanításában is azt az utat követjük, amelyet az összeadásnál: *a kivonás eredményét* az összeadásból adódó *tény*-ként kapjuk, és e tények elemzésével jutunk el a negatív, majd a racionális szám kivonásának a fogalmához.

Tanultuk, hogy a kivonást összeadással ellenőrizzük. Pl. $25 - 10 =$

= 15, mert 15 + 10 = 25, azaz ha 25-ből elveszünk 10-et, olyan számot kell kapnunk, amelyhez 10-et hozzáadva visszakapjuk a 25-öt.

A kivonást kivonással is ellenőrizhetjük. Ha 25 — 10 = 15, akkor 25 — 15 = 10, mivel ennek a helyességéhez is csak az kell, hogy 15 + + 10 = 25 legyen. Ez következik az összeadás kommutatív tulajdonságából. Tehát a 15 + 10 = 25 összeadásból két kivonás helyessége is következik: 25 — 10 = 15 és 25 — 15 = 10.

Ha az összeadásnak és a kivonásnak ezt a kapcsolatát, ami lényegében a kivonás definicióját jelenti, kiterjesztjük az egész racionális számkörre, akkor a célszerűen megválasztott összeadásokból számítás nélkül elvégezhetjük a kivonások összes lehetséges típusait, pl. az alábbi módon:

$$(+3)+(+2)=+5 < \begin{array}{ll}(+5)-(+2)=+3 & * \\ (+5)-(+3)=+2 & *\end{array}$$

$$(-4)+(-3)=-7 < \begin{array}{ll}(-7)-(-3)=-4 & * \\ (-7)-(-4)=-3 & *\end{array}$$

$$(+7)+(-4)=+3 < \begin{array}{ll}\boxed{(+3)-(-4)=+7} & \\ (+3)-(+7)=-4 & *\end{array}$$

$$(-5)+(+3)=-2 < \begin{array}{ll}\underline{(-2)-(+3)=-5} & \\ \boxed{(-2)-(-5)=+3} & \end{array}$$

A kivonás eredménye meglepi a tanulókat azokban az esetekben, amikor a kivonandó negatív, azaz amikor „elvettünk", mégis „többet" kaptunk. Az eredmények elfogadását elősegíthetjük a kivonások felírása közben ilyen indoklásokkal: ha —5-höz hozzáadunk +3-at, —2-t kapunk; ha tehát —2-ből „visszavesszük" a —3-at, vissza kell kapnunk a —5-öt; vagy: a —2 fok hőmérsékletváltozás 5 fok hőmérsékletcsökkenésből és 3 fok hőmérsékletemelkedésből adódott. Ha a kettő közül az egyik elmarad (nem következik be), megmarad a másik. A tanulók a műveletek kapcsolatai alapján és az elmondott indoklás hatására elfogadják ezeket az eredményeket, rövid gondolkodás után azonban újra hitetlenkednek, érezve azok szokatlanságát. Így történt ez a kísérlet alkalmával is, amikor az eredmények felírása után felállt egy tanuló és szinte méltatlankodva vetette fel, hogyan lehetséges ez. Majd többen is csatlakoztak hozzá, s ezzel az egész osztály figyelme teljes intenzitással a legkényesebb problémára irányult. Természetesen kiderült, hogy nem minden kivonást láttak érthetetlennek. Megjelöltük azokat az eseteket, amelyeket egyöntetűen elfogadtak (az előző műveletek csillaggal jelzett esetei), pl. (—7) — (—3) = —4, bekereteztük azokat, amelyeket senki sem fogadott el, pl. (+3) — (—4) = +7, a részben elfogadottat pedig aláhúztuk, ilyen csak a következő volt: (—2) — (+3) = —5. Ezután következett az elemzés.

A pozitív számok kivonását mindenki elfogadta, mert arról már tudják, hogy mit jelent. A negatív szám kivonásának az értelmét még nem ismerik, de éppen ezekből a példákból fogják megismerni.

Amikor új számokat vezetünk be, a műveleteket is újra értelmezni kell. Ezt meg is tettük az összeadás esetében, amikor megállapítottuk, hogy negatív szám hozzáadása a vele egyenlő abszolút értékű pozitív szám kivonását jelenti. De ugyanígy jártunk el, amikor a törtszámokat ismertük meg. Akkor megállapítottuk, hogy a törttel való szorzás a szám törtrészének a kiszámítását jelenti. Akkor is értek bennünket meglepetések: (törttel) szoroztunk és kisebbet kaptunk. Pl. $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$. Amikor pedig (törttel) osztottunk, nagyobbat kaptunk. $6 : \frac{1}{3} = 18$.

Most hasonló a helyzet. Negatív szám hozzáadásakor kevesebbet kaptunk. És mégis meglepődünk azon, hogy negatív szám kivonásakor a kisebbítendőnél nagyobb számot kapunk. De nem minden példában tartjuk ezt meglepőnek. Pl. azt minden tanuló elfogadta, hogy $(-7) - (-4) = -3$, mert könnyen el tudjuk képzelni, hogy ha 7 Ft adósságból elveszünk 4 Ft adósságot, akkor 3 Ft adósság marad. Itt is nagyobbat kaptunk kivonással? Igen! 3 Ft adósság kedvezőbb anyagi helyzetet jelent, mint 7 Ft adósság. De a számegyenesen is láthatjuk, hogy -3 több, mint -7. Mennyivel több? 4-gyel. Tehát -4 kivonása ugyanazt eredményezte, mintha $+4$-et hozzáadtam volna. Ugyanez a helyzet, amikor $+3$-ból vonunk ki -4-et. A különbség $+7$, tehát $+4$-gyel több. Csak ezt nem tudjuk olyan könnyen áttekinteni. De ha újra visszagondolunk a hőmérsékletváltozásra, akkor megértjük. 7 fok hőmérsékletemelkedés és 4 fok hőmérsékletcsökkenés együtt, ill. egymásután 3 fok emelkedést jelent. Ha most visszaszámítjuk a 4 fok csökkenést, akkor megmarad a 7 fok emelkedés. Tehát az összeadás, amelyből a kivonást felírtuk és a gyakorlati megoldás egyaránt azt mutatják, hogy -4 kivonása $+4$ hozzáadását jelenti.

Hasonló a helyzet a többi esetekben is. -5 kivonása $+5$ hozzáadását, -3 kivonása $+3$ hozzáadását jelenti.

Mit jelent tehát negatív szám kivonása? Negatív szám kivonása pozitív szám hozzáadását, mégpedig a vele egyenlő abszolút értékű pozitív szám hozzáadását jelenti. A negatív számmal egyenlő abszolút értékű pozitív számot a szóbanforgó szám ellentettjének nevezzük. Érvényes tehát a következő megállapítás: *Negatív szám kivonása a vele ellentett szám hozzáadását jelenti.*

Vajjon érvényes-e a kivonásnak ez az értelmezése pozitív számok kivonására is? Igaz-e, hogy pozitív szám kivonása is a vele ellentett szám hozzáadását jelenti? Igaz-e pl. hogy $(+5) - (+2) = (+5) + (-2)$? A negatív szám hozzáadásának értelmezéséből tudjuk, hogy igaz, de számítással közvetlenül is meggyőződhetünk róla.

Vizsgáljuk meg azt is, hogy a kivonásnak ez a jelentése érvényes-e 0 kivonására. Igaz-e, hogy $(-5) - 0 = (-5) + 0$? Igaz!

Így megállapitottuk, hogy pozitív szám, negatív szám és 0 kivonása, azaz *bármely racionális szám kivonása a vele ellentett szám hozzáadását jelenti.*

Ebből két következtetést vonhatunk le:

1. *Ezentúl minden kivonás helyett végezhetünk összeadást.*
2. *Racionális számok kivonása minden esetben elvégezhető.*

A kivonás fenti definiciójának tudatosítása céljából megmutathatjuk még a kivonás néhány tulajdonságának érvényben maradását.

Ezután is akkor lesz pozitív a különbség, ha nagyobb számból vonunk ki kisebbet, és akkor lesz negatív, ha kisebb számból vonunk ki nagyobbat.

A különbség nem változik, ha a kisebbítendőhöz és kivonandóhoz ugyanazt a számot hozzáadjuk, vagy mindkettőből ugyanazt a számot kivonjuk.

Különbséget ezután is úgy vonunk ki egy számból, hogy a kisebbítendőt kivonjuk és a kivonandót hozzáadjuk.

Megjegyezzük, hogy a felsorolt tulajdonságok bármelyikéből levezethetjük a racionális számok kivonásának szabályát, ha ezeknek a tulajdonságoknak az érvényességét racionális számok különbségére is kiterjesztjük.

* * *

Az összeadást és kivonást egyesíti magában az összevonás. Elvi problémát nem okoz, azonban jól be kell gyakoroltatni. Dolgoztassunk ki sok egyszerű példát, hogy a tanulók megfelelő jártasságot szerezzenek az összeadás, kivonás és összevonás elvégzésében. Helyes az a felfogás, hogy itt sem lehet elhanyagolni a törtekkel való műveleteket, mégis itt elsődleges az előjeles számokkal való számolás. A tankönyvben lévő egyszerű, az egész számokra vonatkozó feladatok nem elegendők házi feladatok céljára, törtes feladatokból viszont fölösleges többet venni. Nagy gondot kell fordítani arra, hogy a tanulók képesek legyenek saját munkájukat ellenőrizni.

5. Racionális számok szorzása

A racionális számok szorzásának tanítása részletesen megtalálható „A matematika tanítása" c. folyóirat említett második tanulmányában. Amikor dolgozatom elején erre a cikkre utaltam, akkor elsősorban a szorzásnak ott található tárgyalásmódjára gondoltam. A módszer lényege az, hogy a szorzás kommutatív és disztributív tulajdonságainak a racionális számok szorzására való kiterjesztésével levezeti a racionális számok szorzásának szabályait. Ezekhez a szabályokhoz tehát mint tételekhez jut el a következő sorrendben: 1. Egy racionális számnak és 0-nak a szorzata. 2. Két különböző előjelű racionális szám szorzata. 3. Két egyenlő előjelű racionális szám szorzata.

A tanítás során éppen az érdekelt, hogy alkalmazható-e ez a teljesen absztrakt felépítés. Felkészültem a várható nehézségekre, az olyasféle tiltakozásokra, amilyet a kivonás tanítása alkalmával tapasztaltam. A gyakorlat azonban most az ellenkezőjével lepett meg. A tanulók nehézség nélkül követték a gondolatmenetet. Mindössze annyi történt, hogy egy tanuló érdekesnek találta azt, hogy $(-1) \cdot (-1)$ ugyanannyi, mint $(+1) \cdot (+1)$.

Megemlítek még két olyan tapasztalatot, amelyeket érdemes figyelembe venni, bármilyen módon tanítjuk is a racionális számok szorzását. Az egyik tanuló két különböző előjelű tényező szorzatának „—" előjeléből a példa alapján azt a következtetést vonta le a törvényszerűségek keresésekor, hogy itt is a nagyobb abszolút értékű szám előjele érvényesül, mint az összeadásnál. A példában véletlenül éppen a nagyobb abszolút értékű tényező volt negatív. Természetesen ellenpéldával azonnal meggyőztem, hogy nem így van. Célszerű tehát a nagyobb abszolút értékű számot pozitívnak választani. Egy másik tanuló két egyenlő előjelű szám szorzatának előjeléből felületesen következtetve három negatív tényező szorzatát is azonnal pozitívnak vélte. Ez arra int, hogy két egyenlő előjelű szám szorzata helyett ne mondjuk egyenlő előjelű számok szorzatát.

A szorzás alaptörvényeit szintén felírtuk algebrai alakban.

* * *

Az osztás tanítására a kísérlet nem terjed ki, tekintettel arra, hogy abban nem merülnek fel komolyabb problémák.

* * *

Befejezésül vissza kell térnem a dolgozat elején megjelölt szempontokhoz és a kísérlet célkitűzéseihez.

Valamennyien tudjuk, hogy lehet a negatív számok fogalmát és a racionális számokkal végezhető műveleteket egyszerűbben is tanítani. Mire való tehát ez a sokrétű módszeres eljárás? — vetődhet fel a kérdés. Miért választunk ilyen nehéz megoldást, mikor éppen a tanulók túlterhelése ellen harcolunk, ha van könnyebb is?

Mindenekelőtt szeretném leszögezni, hogy nem arról van szó, hogy ez az egyetlen helyes módszer. Ez csak egy kísérlet volt a lehetséges és szükséges sok közül éppen a jó módszerek felkutatására. Ha visszagondolok a megtartott órákra, egyáltalán nem él bennem semmiféle maximalizmusnak a benyomása. A tanulók nemegyszer kifejezték, hogy milyen érdekes, amit az órán tanulunk. Jöttek a szünetben is kérdésekkel, vitatkoztak egymással. Mindez azt mutatja, hogy a tanítás módszere megragadta a tanulókat, lekötötte figyelmüket, aktív munkára, gondolkodásra és ellenvetésekre serkentette őket. Sohasem esett szó arról, hogy nehéz, amit tanulunk, mert az óra sohasem fejeződött be úgy, hogy ne értettek volna meg mindent. Természetesen ebből egyáltalán nem szabad azt a következtetést levonni, hogy ez a módszer könnyű. Egyetlen osztályban első alkalommal való kipróbálása csupán arra ad választ, hogy lehet-e így tanítani a negatív szám fogalmát és a racionális számokkal való műveleteket. Lehet és meggyőződésem szerint nem nehezebben, mint másként, csupán kezdettől fogva ebben a szellemben kell végeznünk a munkát.

Mi az előnye ennek a módszernek?

Az anyag legközelebbi alkalmazását tekintve, előkészítettük az egyenletek tanítását azzal, hogy megmutattuk a műveletek kapcsolatait. Az egyenletek megoldásának kezdeti módszere éppen ezekre a kapcsolatokra épül. Előkészítettük az algebra elemeinek tanítását az összes általánosításokkal és a műveletek tulajdonságainak algebrai alakban történő felírásával. Így majd nem kell mondanunk pl. hogy a felcserélés törvénye az algebrában is érvényes, látják, hogy az a racionális számok összeadására és szorzására érvényes akkor is, ha a számokat betűkkel jelöljük.

Ez a módszer segíti a tudományos szemlélet kialakítását. Minden, amit a tanulók megismertek, a valóságból eredt, vagy azzal szoros kapcsolatban volt. Az új fogalmak bevezetését a gyakorlati élet és a továbbhaladás indokolta. Az új összefüggéseket gazdag tény-anyag elemzése útján nyertük elvonással, nem elsietett általánosítással. Ezeket sokoldalúan megvilágítottuk és beleillesztettük az eddigi ismeretek sorába.

A tanulók nem tétlen szemlélői voltak az óráknak, hanem részesei: kemény szellemi munkát végeztek, legtöbbjük érdeklődéssel és szívesen. Megnövelt igényeinkkel szinte munkatársainkká avattuk őket s ők tiltakozás és kényszer nélkül, természetszerűen igazodtak magasabb követelményeinkhez, hiszen látták, hogy éretteknek tartjuk őket a gondolkodásra, elemzésre, kutatásra. Ilyen módon kielégítettük a tanulók megismerési, sőt alkotási vágyát azzal, hogy — *Stéger* Ferenc szavaival élve — felszínre hoztuk azokat a „kincseket", amelyek a viszonyokba való belelátást, a logikus gondolkodást élesítik. „Gyakorlottságot az élet is nyújt, de az elmulasztott belátást ritkán." — idézi Stéger Dörpfeld szavait. (Stéger Ferenc: Koncentráció a mennyiségtan tanításában. Budapest. 64. lap.) Ha nem adjuk napról-napra a logikus gondolkodás valóban kincset érő apró gyöngyszemeit, olyan mulasztást követünk el már az általános iskola éveiben is, amelyet a tanulók később nehezen pótolnak.

Szorosan összefügg ezzel a maximalizmus kérdése. A tanítási órákon a saját munkánkkal és a tanulók munkájával szemben támasztott magasabb követelmények, igények sohasem jelentenek maximalizmust. Éppen azzal kerülhetjük el a későbbi maximalizmust, hogy *az órán megtanítjuk a szükséges ismereteket és megtanítjuk a tanulókat gondolkodni.* Ha ezt nem tesszük, könnyen válhat az egyébként normális követelmény is maximalizmussá a tanulók számára.

Ha ebből a szempontból vizsgáljuk meg az ismertetett eljárást, azt mondhatjuk, hogy előkészíti a tanulókat a középiskolai tanulmányokra. Ráállítja őket arra az útra, amelyen nehézség nélkül tovább bővíthetik a számfogalmat. Felismerik, hogy a műveletek elvégzésének korlátai újabb számfogalomhoz vezetnek s hogy az új számfogalom megalkotásában mekkora szerepük van a műveletek tulajdonságainak. Az egész tanítás során mindig a számfogalom és a művelet tulajdonságai voltak előtérben. Benne élnek a tanulók ezek légkörében. Az irracionális szám fogalma nem fogja váratlanul érni őket és fogják „érezni", hogy a hatványfogalom kiterjesztése szükséges.