NAGY FERENC tanszékvezető főiskolai tanár:

# A KÖRSOROK TÁRGYALÁSA A FŐISKOLAI GEOMETRIAI ANYAGBAN

1. A körsorok és duálalakzataik a körseregek, nem összefüggő anyagrész. Az *elemi geometria* rendszeres felépítése és alkalmazása során a következő anyagrészekkel kapcsolatban ismertetjük meg ezeknek az alakzatoknak a fogalmát és fajtáit:

*két kör kölcsönös helyzete,*
*az egyszerű geometriai helyek és*
*pontnak körre vonatkozó hatványa.*

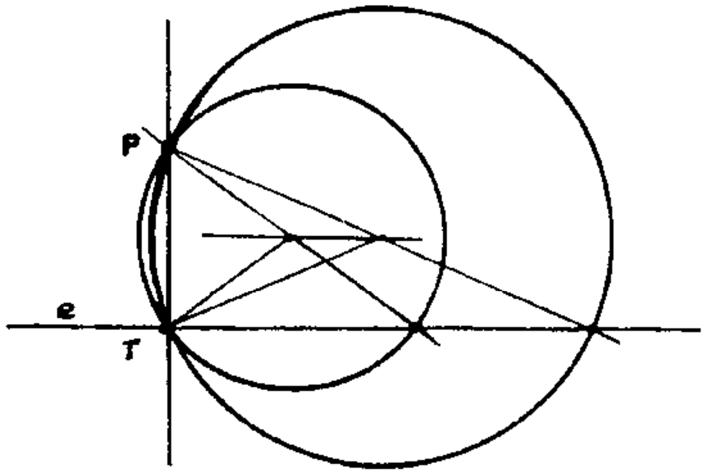
A geometria (euklidészi) szerkesztésekben nyilván igen fontos szerepük van ezeknek a körsokaságoknak. Különösen gyakran alkalmazzuk a koncentrikus köröket, a parabolikus körsorokat és a hiperbolikus körseregeket. A geometriai helyek szerkesztő módszerében nagyrészt körsorokban gondolkodunk. A geometriai transzformációk tárgyalásában önként kínálkozik a körsokaságok szerkezetének vizsgálata. Három ismert feladatcsoportban:

*adott sugarú körlemezek elhelyezése,*
*a Pappus-féle feladatok- és*
*az Apollonius-féle feladatokban*

érintő köröket szerkesztünk, ami körsorok elemeinek a meghatározását jelenti.

A körsorok és körseregek ilyen sokféle fölhasználási és alkalmazási lehetősége az elemi geometriai anyag tárgyalás-módját jellemezheti. Ebben a közleményben tehát tárgyunkat a főiskolai *oktatás módszertana* szempontjából vizsgáljuk. Néhány egyszerű elemi geometriai és koordináta-geometriai tétel, feladat vizsgálata során nemcsak az anyagrészek közötti összefüggéseket mutatjuk meg, hanem ezt a tárgyat nagymértékben előkészítjük a projektív geometriai és differenciál-geometriai teljesebb tárgyalásra is.

2. Az alapszerkesztések között szerepel: adott egyenesre nem illeszkedő pontból merőleges szerkesztése. A szerkesztés elvégezhető többféle módon. Egyik módja a következő. (1. ábra.) A $P$ tartójú sugársor egy speciális elemét kell megszerkeszteni (az $e$-n lévő talppontját.) Egy tetszőleges sugárnak $P$ és $e$-vel való metszéspontja közötti szaka-

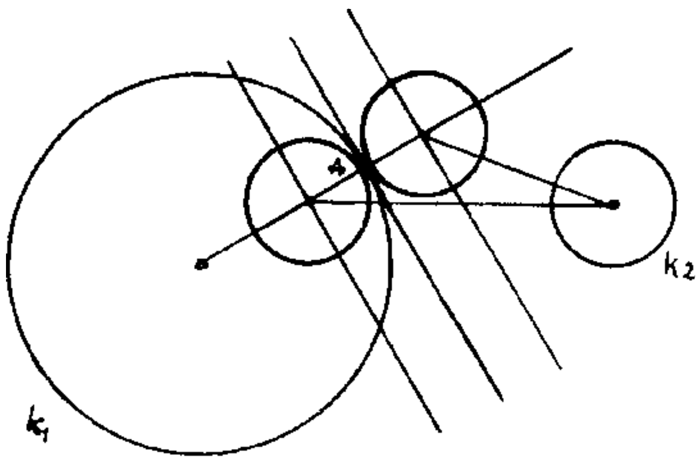



*1. ábra*

szára, mint átmérőre kört rajzolunk. Ez a kör kimetszi $e$-n a talppontot. Ha a bizonyítás céljából kiegészítjük az ábrát, rögtön felismerhető a hiperbolikus körsor, amelynek minden eleme átmegy a keresett talpponton. (Két ponttól egyenlő távollevő pontok geometriai helye a két pont közötti szakasz felező merőlegese, amely a két ponton átmenő körök középpontjainak is geometriai helye.) Ez a szerkesztés ezzel a körsorral úgy is elvégezhető, hogy az $e$ egyenest tekintjük felező merőlegesnek.

Az ellipszis olyan pontok geometriai helye, amelyeknek két adott ponttól mért távolságaik összege állandó. Ilyen pontok a két adott ponthoz, mint középponthoz tartozó egyközepű (koncentrikus) körök bizonyos elemeinek metszéspontjai (a sugarak összege a megadott állandó). Ugyanazon két koncentrikus körsokaság megfelelő ellenpárjainak metszéspontjai adják a konfokális ellipsziseket. (Ugyanígy származtathatók a konfokális hiperbolák is.)

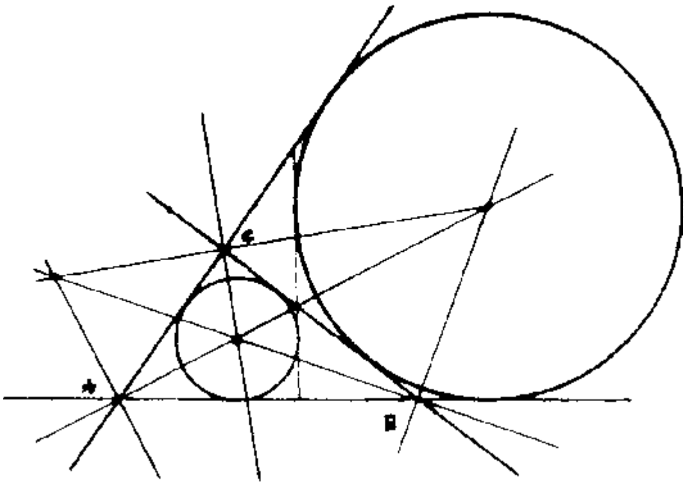
A *Pappus*-féle feladatok közül vizsgáljuk a két kör esetét. Adva van tehát $k_1$, $k_2$ és $A$ pont illeszkedik $k_1$-re. Ez a feladat is elvégezhető többféleképpen. Vizsgáljunk ebből két módot. (2. ábra.)




*2. ábra*

A $k_1$ kör és a rajta kijelölt $A$ pont egy parabolikus körsort határoz meg. Válasszuk ennek egy speciális elemét, az $A$ pontba húzott érintőt. Ezzel a feladatot visszavezettük egy egyszerűbb feladatra. Ezt transzformációval még egyszerűbb feladatra vezetjük vissza. A $k_2$ kört összenyomjuk a középpontjára, az érintőt $r_2$-vel eltoljuk önmagával párhuzamosan (mindkét irányban.) Most már a pont és egyenes esetében egy hiperbolikus és egy parabolikus körsor körét szerkesztjük meg. Ez a kör a visszatranszformáláskor vele koncentrikus körbe megy át. (A felező merőleges is két koncentrikus körsokaság egyenlő sugarú körei metszéspontjainak a geometriai helye.) A feladat elvégzésének másik, egyszerűbb módja, ha a $k_1$ és $A$ által meghatározott parabolikus körsor másik speciális elemeit, az $r_2$ sugarúakat választjuk. Itt is hasonlósági transzformációval haladunk tovább. (A feladat egyszerűsége miatt mindkét módot a 2. ábrán tüntettük fel.)

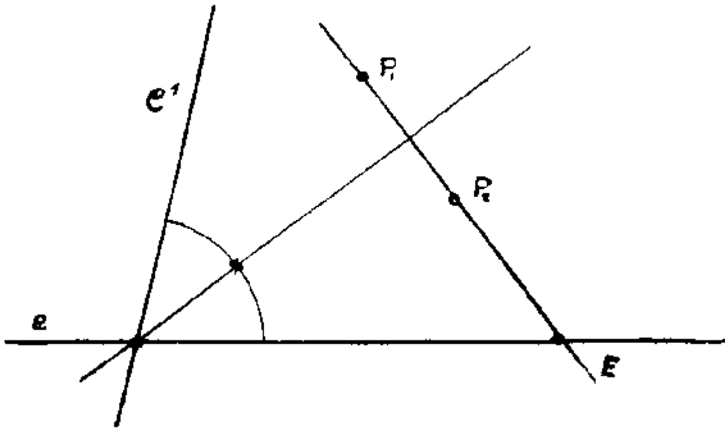
Az *Apollonius*-féle feladatok közül tekintsük a három egyenes esetét. Szerkesszük meg a háromszög érintő köreit. (3. ábra.)



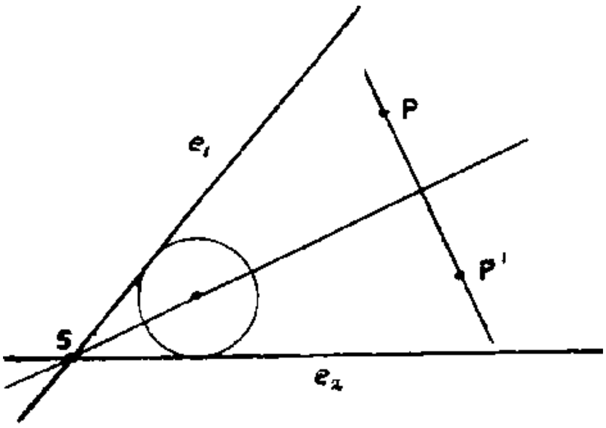
*3. ábra*

Mindegyik érintő kör három hiperbolikus körsereg közös köre. A szögfelezők a körseregek centrálisai. Egy körsereg körei hasonlóállásúak. A hasonlóállás fixpontja a háromszög csúcsa. A belső és egyik külső érintő körnek közös érintője a háromszög harmadik oldala. Ennek az oldalnak a szögfelezővel való metszéspontja a két kör belső hasonlósági pontja (fixpont). E ponton át a másik belső érintőt úgy szerkeszthetjük meg, hogy a háromszöget tükrözzük a szögfelezőre. A két belső érintő újabb hiperbolikus körsereget határoz meg.

Vizsgáljuk most az *Apollonius*-féle feladatok közül a két pont és egy egyenes, azután a két egyenes és egy pont eseteket. E két feladat egymás duálja. (4. és 5. ábra.)



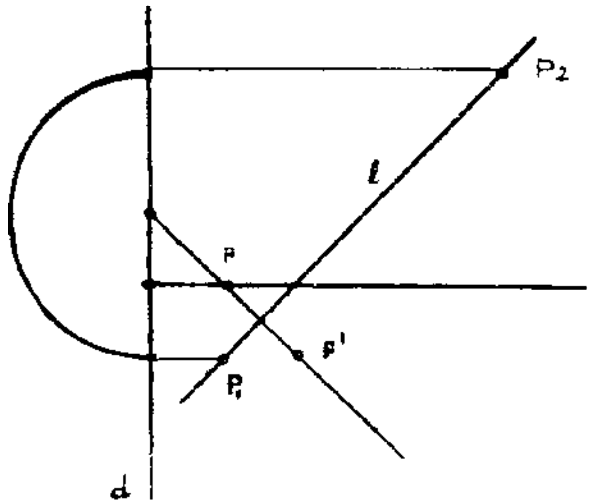

4. ábra



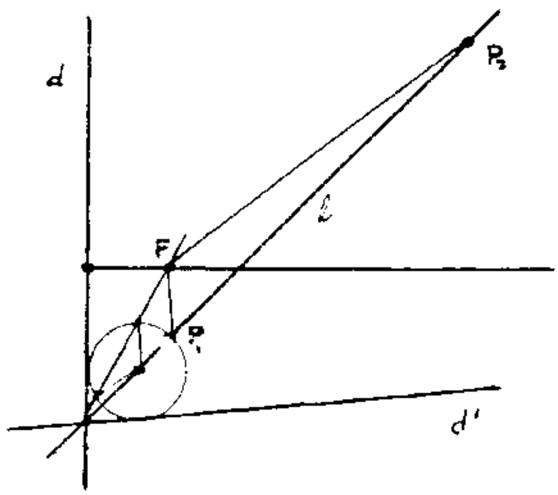

5. ábra

A 4. ábrán a $P_1$, $P_2$ alappontokkal bíró hiberbolikus körsornak azokat a köreit kell megszerkeszteni, amelyeknek az $e$ egyenes közös érintője. A körsor tetszőleges eleméhez az $E$ pontból érintőt szerkesztve, az $e$ egyenesen kijelöljük az érintési pontokat, ill. a felező merőlegesen, a centrálison a körök középpontjait. Az 5. ábrán az $e_1$ $e_2$ közös érintőjű hiperbolikus körseregnek azokat a köreit kell megszerkeszteni, amelyeknek a $P$ közös pontja. Itt is a körseregnek tetszőleges elemét metszve $SP$-vel, a szögfelezőn, a centrálison kijelöljük a körök középpontjait. — A két feladat egymásra visszavezethető, ha a 4. ábrán az $e$ egyenest tükrözzük a centrálisra, az 5. ábrán pedig a $P$ pontot tükrözzük a centrálisra. Ezzel mindkét feladat elvégzésére egy-egy új módszert nyertünk. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy közös centrálisú hiperbolikus körsor és hiperbolikus körsereg közös köreit szerkesztettük meg.

Végezzük el a következő feladatot: adva van a parabola fókusza és direktrixe meg egy egyenes. Szerkesszük meg a parbola és az egyenes metszéspontjait! (6. és 7. ábra.)




*6. ábra*

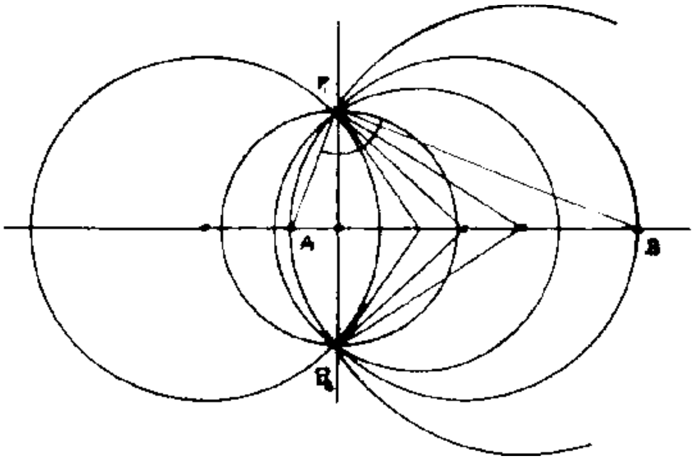



*7. ábra*

A parabola $F$-től és $d$-től egyenlő távollevő pontok geometriai helye. Átfogalmazva: a parabola olyan körök középpontjainak a geometriai helye, amelyek átmennek $F$ ponton és érintik $d$ egyenest. (Olyan parabolikus körsokaság, amelyben a közös pont nem illeszkedik a közös érintőre.) A parabola és az egyenes metszéspontjai két ilyen kör középpontja. A szerkesztést a 6. ábrán a következő módon végezzük el: az a kör, amelynek középpontja $l$ egyenesen van és átmegy $F$ ponton, az átmegy $F$-nek $l$-re képezett $F'$ tükörképén is. Ezzel ezt a feladatot a 4. ábrán elvégzett feladattá fogalmaztuk át. A 7. ábrán pedig a következőképpen okoskodtunk: amely körnek a középpontja az $l$ egyenesen van és érinti $d$ egyenest, az érinti $d$-nek $l$-re képezett $d'$ tükörképét is. Így meg feladatunkat az 5. ábrán elvégzett feladattá fogalmaztuk át. A szerkesztést tehát kétféleképpen végeztük el. A 6. ábrán a parabolikus körsokaság és egy hiperbolikus körsor közös köreit szerkesztettük meg. — Felvethető a kérdés, hogy ha a 6. és 7. ábra szerkesztéseiben a 4. és 5. ábra módszereit alkalmaztuk, akkor megfordítva: a 4. és 5. ábrán mi az értelme a parabolának? — Ha a 4. és 5. ábrán elvégzett Apollonius-féle feladatokat a geometriai helyek módszerével végeznénk, akkor a két feladatban a felező merőleges és a szögfelező mellett még 2—2 parabola is szerepelne, és a feladatok elvégzései 3—3 geometriai hely metszéspontjainak megszerkesztéséből állnának. Az alkalmazott módszerek ezeket a szerkesztéseket is jelentik.

3. Két kör nemcsak hasonló, hanem hasonlóállású is. A koncentrikus körsokaság elemei hasonlóállásúak, fixpont a centrum. A parabolikus körsor körei hasonlóállásúak a közös pontjukra, mint fixpontra. A hiperbolikus körseregben a hasonlóállás fixpontja a közös érintőpár metszéspontja. Stb. Ezeket az eddigi szerkesztési feladatokban föl is használtuk. A tengelyes tükrözést is alkalmaztuk a szerkesztésekben. Az inverzió is felismerhető a hiperbolikus körsorban.

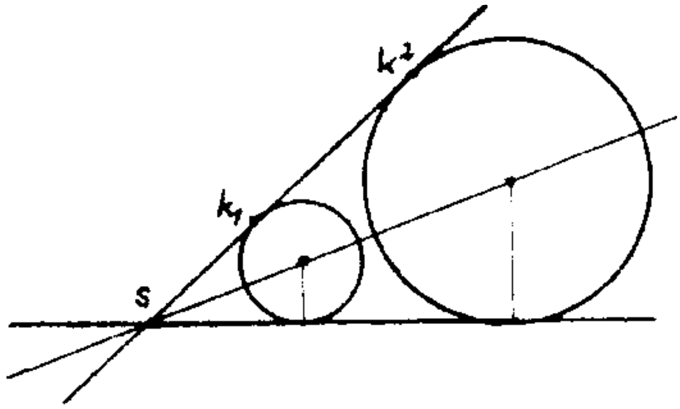
A hiperbolikus körsor bármely eleme a legkisebb körre, mint vezérkörre, inverz pontpárban metszi a centrálist. (8. ábra.) A bizonyítás az ábráról leolvasható. $A$ és $B$ inverz pontpárok. Az inverzió hatványa negatív.



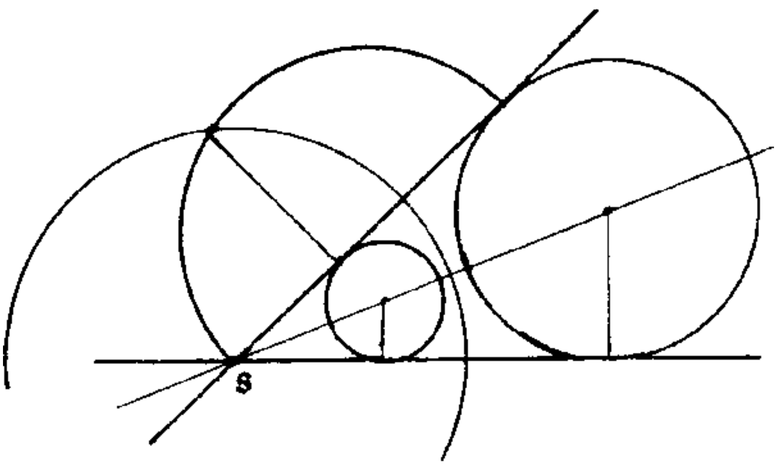

8. *ábra*

Ha az alappontokhoz meghúzzuk a körök sugarait, akkor közös alapú egyenlőszárú háromszögeket kapunk. Ezek egymásból affinitással származtathatók. Az affinitás tengelye a közös alap egyenese.

Vizsgáljuk a 9. és 10. ábrán a hiperbolikus körsereg két elemének a viszonyát. A 9. ábrán megállapítható, hogy az $S$ pontra nézve $k_1$ körnek nagyítása a $k_2$ kör. (Az arány az ábra alapján szintén megállapítható.) A $k_2$ körnek kicsinyítése a $k_1$ kör. A megfelelő ívek egyenlő szélességű vonallal vannak jelölve. A 10. ábrán a két kör egymás inverzképei. A megfelelő ívek szintén egyenlő szélességű vonalak. Itt a megfeleltetés a tükrözésre jellemző megfordítást mutat. Erről alább még szólunk. (Érdemes vizsgálni a centrális tükrözést mindkét ábrán.)

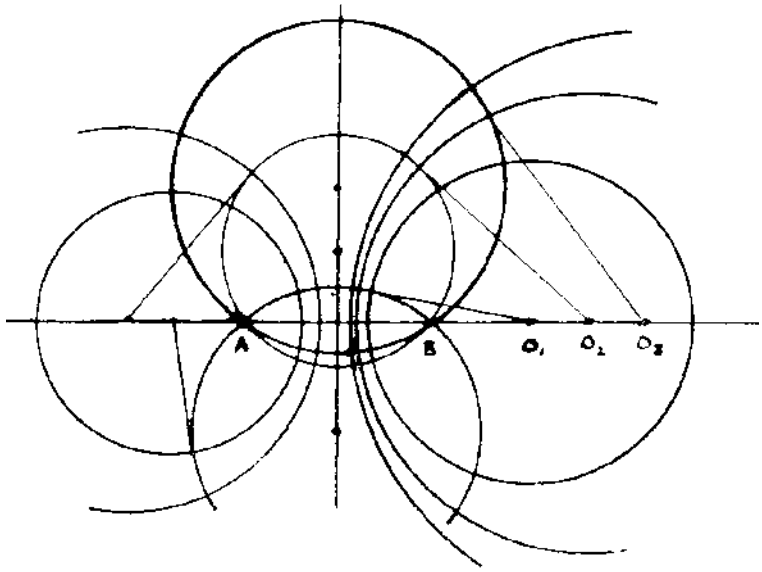



9. ábra




10. ábra

Vizsgáljuk végül az egymást merőlegesen metsző hiperbolikus és elliptikus körsorokat. (11. ábra.) A hiperbolikus körsorban az alappontok egyenese a körsor hatványvonala. Ennek pontjaiból egyenlő hosszú érintők húzhatók a körsor köreihez. Az $O_1$ pontból húzott érintővel, mint sugárral rajzolt kör a körsor elemeit merőlegesen metszi. Erre a körre, mint vezérkörre nézve az alappontok, $A$ és $B$ egymás inverzképei. Az $O_2$, $O_3$. . . pontokból ugyanígy rajzolt körök ugyanilyen tulajdonságúak. Ezek a körök, amelyek középpontjainak geometriai helye (centrálisa) a hiperbolikus körsor hatványvonala, elliptikus körsort alkotnak. A sugár növekedésével a kör mindjobban közeledik a hiperbolikus körsor centrálisához, határesetben egybeesik vele, tehát egyenes lesz, az inverzió pedig tengelyes tükrözésbe megy át. Ezért mondható, hogy az inverzió körre való tükrözés.




11. ábra

Megemlíthető még, hogy az alappontok a hiperbolikus körsor körein is transzformációval kapcsolhatók össze. A legkisebb kör középpontja körül 180°-os elforgatással (ez az előbbi tengelyes tükrözés), a nagyobb körök középpontjai körül mind kisebb szögben történő elforgatással, a hatványvonalon pedig eltolással vihetők át egymásba.

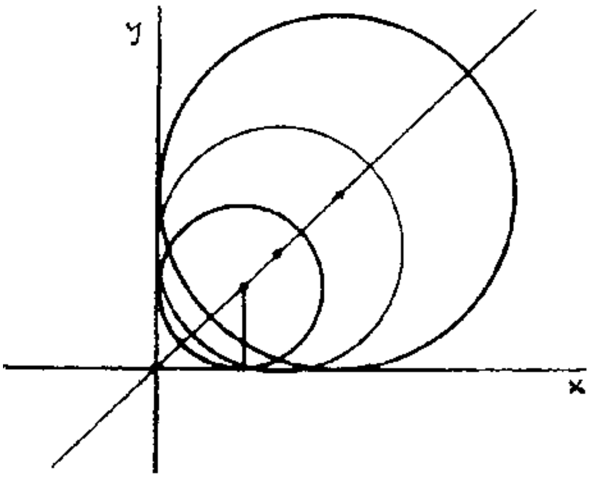
4. *A koordináta-geometriából* is nézzünk néhány egyszerű példát. A középponti helyzetű kör egyenletében:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

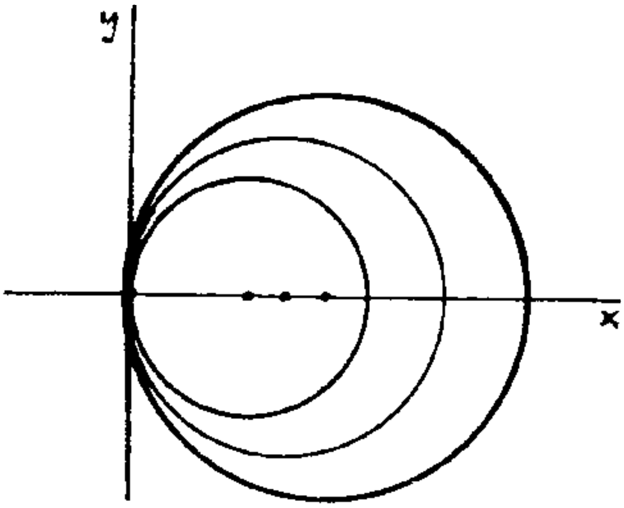
ha $r$-t változtatjuk, akkor koncentrikus köröket kapunk. Az $r$ paraméterhez tehát koncentrikus körsokaság tartozik. Ezt hasonlósági transzformációnak tekinthetjük. Az általános helyzetű kör egyenletében:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

három paraméter van. Az $r$ jelentését említettük, $a$ és $b$ geometriai jelentése párhuzamos eltolás. Ha a paraméterek közötl a következő összefüggés van: $a = b = r$, akkor a következő hiperbolikus körsereget jelenti az egyenlet. (12. ábra.) Ha $a = r$ és $b = 0$, akkor parabolikus körsort állít elő az egyenlet. (13. ábra.)

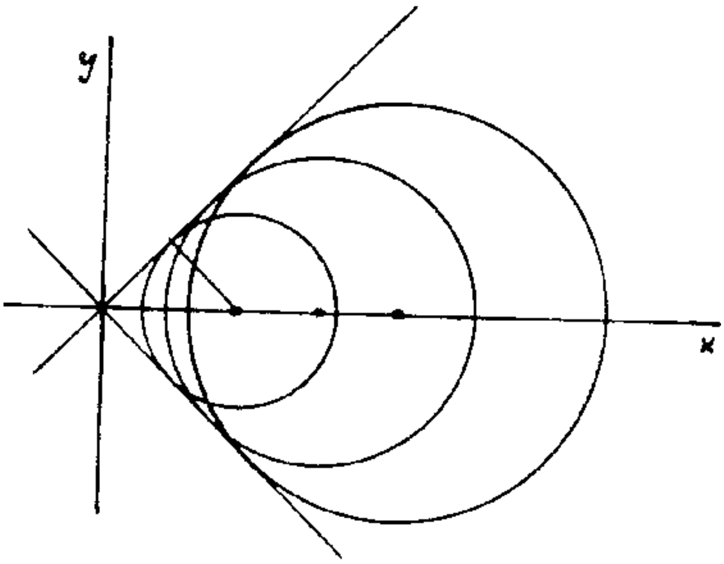



*12. ábra*




*13. ábra*

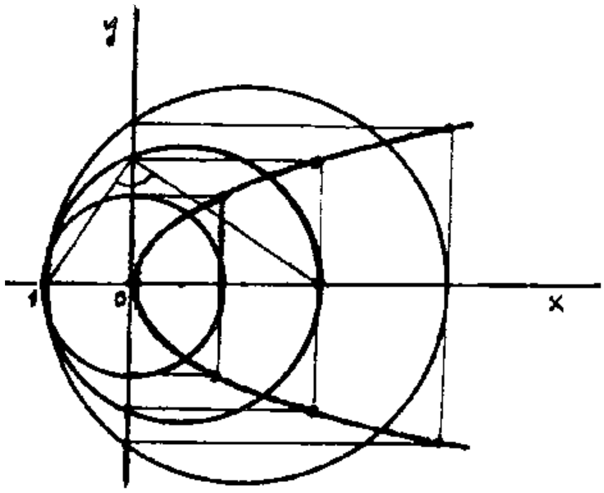
A következő egyenlet: $(x - a)^2 + y^2 = a^2/2$ szintén hiperbolikus körsereget állít elő. (14. ábra.)



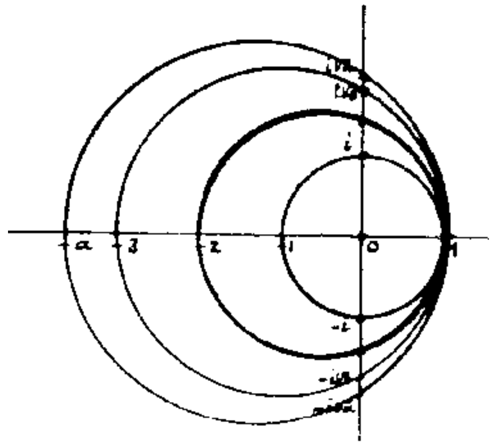

*14. ábra*

Az $y = \sqrt{x}$, $(y^2 = 1 \cdot x)$ parabola pontjait parabolikus körsorral szerkeszthetjük meg. (15. ábra.) A 16. ábrán a parabolikus körsorral negatív számok négyzetgyökeit szerkesztjük meg a komplex számsíkon.

5. Visszatérve az $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ egyenletre, ha az $r$ paraméter értékeit a kör pontjaiban felmérjük a $z$ tengely pozitív irányában, akkor az $xy$ sík fölé $r$ magasságban, vele párhuzamos állású síkba emeljük a kört. (Ugyanezt tesszük a $z$ tengely negatív irányában is.) Így a koncentrikus körök sokasága kúp-felületet alkot. (17. ábra.) A kúp speciális



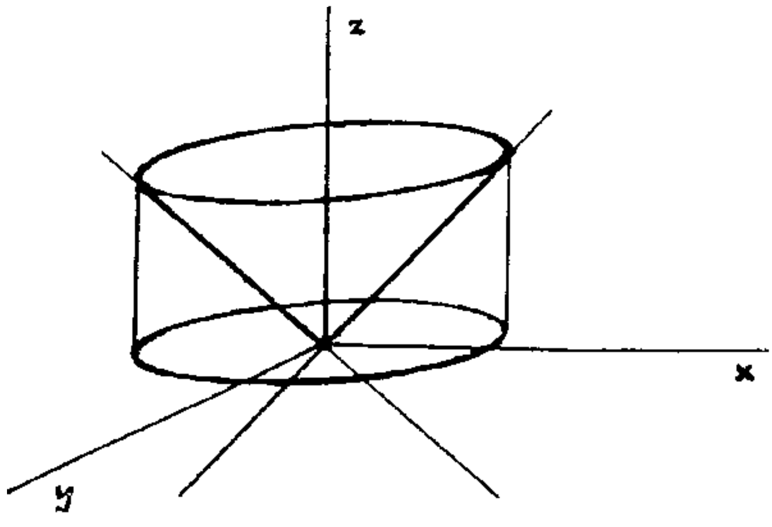

*15. ábra*



*16. ábra*

körkúp, amelynek csúcsa az origóban van, derékszög nyílású, tengelye a *z* tengely. Egyenlete:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$




*17. ábra*

6. E vázlatos fejtegetésből megállapítható, hogy teljes részletességgel ezeket és a további anyagrészeket sem az előadásokban, sem a gyakorlatokon nem tárgyalhatjuk. (Itt a diszkussziókat sem tárgyaltuk.) Az előadások azonban érdeklődést kelthetnek e tárgy iránt, és ha figyelembevesszük még a térgeometriát, az ábrázoló geometriát és a fizikai alkalmazásokat is, akkor e tárgyból néhány szakdolgozati tételt jelölhetünk ki, ami a főiskolai oktatásnak igen fontos feladata. Ha az előadás módszere olyan, hogy érdeklődést tud kelteni a tárgy iránt és a hallgatók önálló munkájára alkalmas területeket tud kijelölni, akkor az az előadás nagymértékben elérte célját.