PELLE BÉLA főiskolai adjunktus:

A RECIPROCITÁS ALKALMAZÁSA AZ APOLLONIUS-FÉLE FELADAT MEGOLDÁSÁNÁL

A dolgozatban a reciprocitásnak egy érdekes alkalmazását mutatjuk meg a közös fókuszú kúpszeletek metszéspontjainak a meghatározásánál, majd a kapott eljárást alkalmazzuk az Apollonius feladatok megoldására. Az első részben röviden összefoglaljuk azokat a tételeket, amelyekre az alkalmazás során szükségünk lesz. A tételek egyrészét Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie c. könyve alapján összegeztük, a másik részét ezek általánosításából, illetve konkrét esetre való alkalmazásából kapjuk.

Térjünk át ezután az anyag rendszeres tárgyalására.

1. A reciprocitás

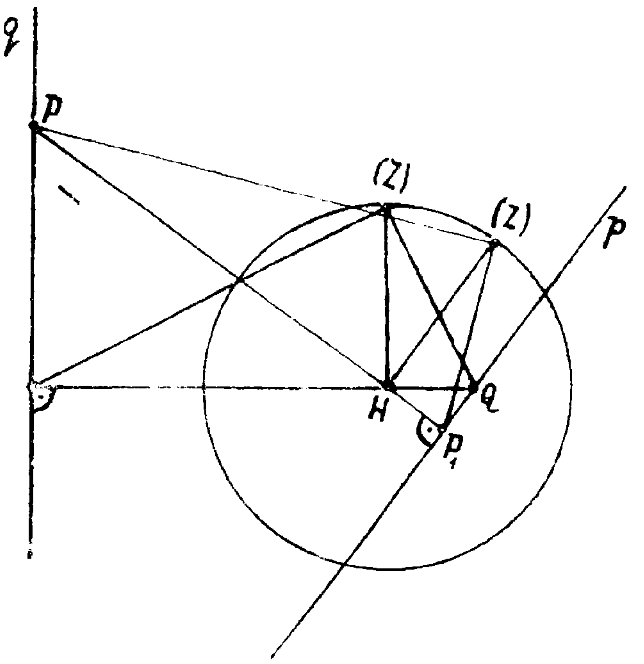
Ez a leképezés a sík minden pontjához ugyanazon síknak egy egyenesét rendeli. A síkban választunk egy állandó H-pontot, amelyet a reciprocitás főpontjának nevezünk. A reciprocitás Z-centrumaként jelöljünk meg a térben egy pontot, amely H felett egységnyi magasságban van. H tehát Z-nek az alaprajza. A síkban fekvő P-ponthoz a következő előírás szerint rendelünk egy síkban fekvő p egyenest: A PZ egyenesre Z-ben egy normálsíkot helyezünk, ennek a normálsíknak és a síknak a metszőegyenese p. A p egyenes megszerkesztéséhez rajzolunk egy H középpontú egységsugarú kört. PZ egy derékszögű háromszög átfogója, melyet PH körül beforgatunk. A beforgatott (Z) a C körre esik. A keresett p egyenes merőleges PH-ra P_1-en keresztül. (P [Z] P_1 derékszögű háromszög.) (1. ábra)

Legyen a PH távolság r és p-nek a H-tól való távolsága ϱ. A derékszögű háromszögből:

$$\varrho = \frac{1}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Ennek megfelelően a P pontot és a p egyenest egymás reciprokainak nevezzük. Ezekre érvényes a következő fontos tétel:

1. Reciprocitásnál az illeszkedés megmarad, azaz, ha egy P pont a q egyenesen van, akkor P-nek a reciprok p egyenese q-nak a reciprok Q pontján megy keresztül. (1. ábra)



1. ábra

2. Adottak a P_1 és P_2 pontok és azoknak a p_1 és p_2 reciprok egyenesei. A P_1P_2 egyenes reciprok a p_1 és p_2 metszéspontjához [1].
A H főpontnak nincs végesben fekvő reciprok egyenese. Az (1) formulában ugyanis $r = 0$. Hogy ez a hiányosság megszűnjön, legyen a főpont reciproka a sík végtelen távoli egyenese. A H főponton átmenő egyenesnek megfelelő reciprok pont pedig legyen a p-re merőleges irányú végtelen távoli pont.

A végtelen távoli elemek összekötését és metszést definiáljuk a következőképpen:

3. a. P és Q_∞ összekötő egyenese P-n keresztül párhuzamos a Q_∞ felé mutató iránnyal.

3. b. p és g_∞-nek a metszéspontja a p-vel párhuzamos irányú végtelen távoli pont.

4. a. P_∞ és Q_∞ összekötő egyenese a végtelen távoli egyenes.

4. b. Két párhuzamos egyenes metszéspontja a végtelen távoli pont [2].

Miután az egyenes és pont reciprok ábráját megvizsgáltuk és az ezzel kapcsolatos tételeket rögzítettük, tekintsük a kör reciprok ábráját. Vegyük fel a reciprocitás H főpontját és k körét, továbbá egy R sugarú, M középpontú C kört, amelyre $MH = m$. Szerkesszük meg a C kör reciprok c görbéjét. E célból határozzuk meg a C kör egy tetszőleges t érintőjének a reciprok T pontját és ennek felhasználásával írjuk fel a c görbe egyenletét.

Az érintő ϱ távolsága ...... $\varrho = HK + KL = HK + R$

HKM derékszögű háromszögből $HK = m \cdot \cos \varphi$ tehát

$$\varrho = m \cdot \cos \varphi + R$$

A reciprok T pontnak r távolságára az (1)-ből a következő egyenletet találjuk:

$$r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R + m \cdot \cos\varphi} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{m}{R}\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

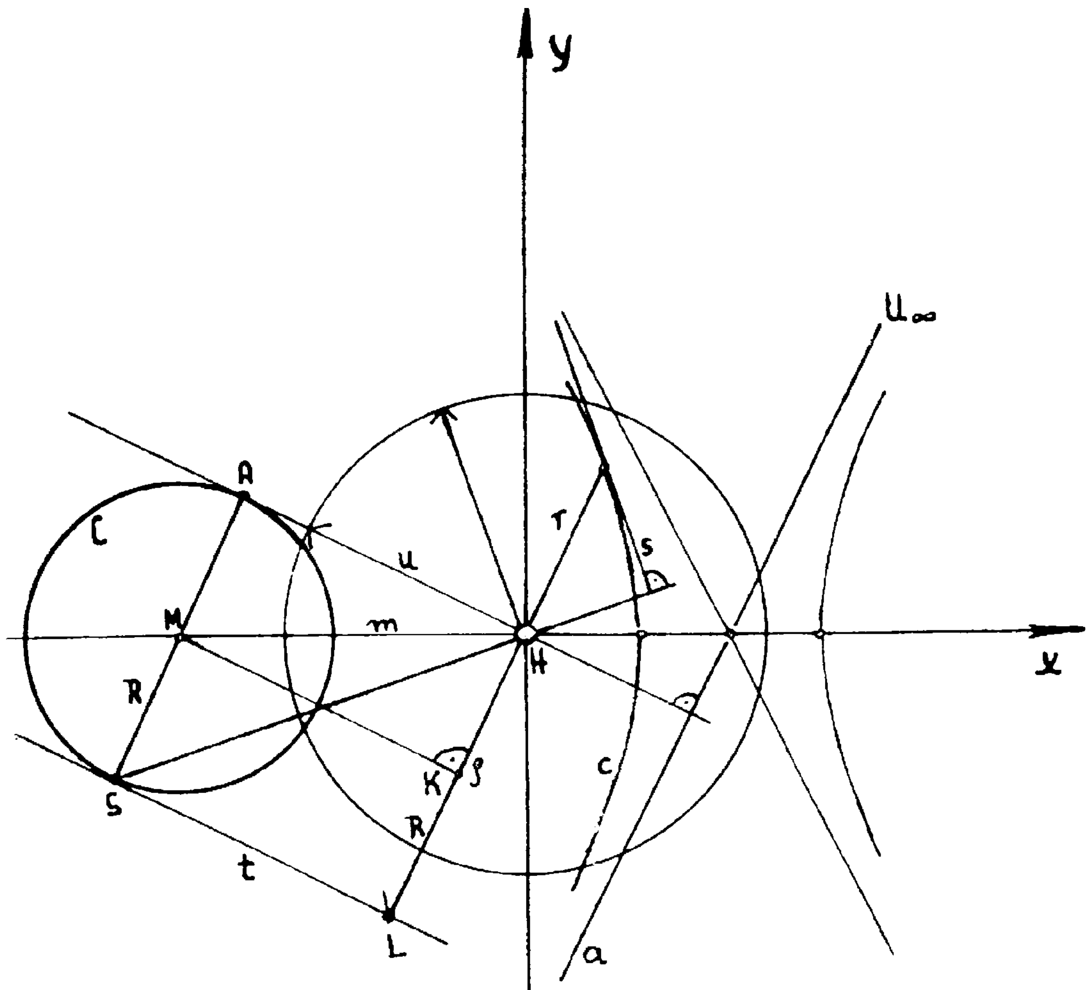
ahol $p = \frac{1}{R}$ és $\varepsilon = \frac{m}{R}$.

Ez az egyenlet pedig egy kúpszeletet ábrázol (2. ábra). Érvényesek tehát a következő tételek:

5. Egy körnek a reciprok ábrája egy kúpszelet, ennek egyik fókuszában van a reciprocitás főpontja.

6. Minden kúpszelet reciprok ábrája egy kör, főpontként a kúpszelet egyik fókuszát kell választani [3].

7. Egy reciprocitásnál a C görbe érintője a reciprok c görbe pontjába megy át és megfordítva C-nek pontjai c-nek érintői lesznek.



2. ábra

Figyeljük meg, hogy az MH egyenesen lévő körátmérő végpontjainak a reciprok egyenesei a kúpszeletek csúcsérintői, a körközéppont megfelelője pedig a kúpszelet vezérvonala.

A 2. ábrán $m > R$, tehát a (2) alapján $\varepsilon > 1$, a c kúpszelet hiperbola. Az U_∞ végtelen távoli pontnak megfelelő u reciprok egyenes a H főpontból a körhöz húzott érintő lesz. Az A érintési pontnak megfelelő reciprok egyenes pedig a hiperbolát a végtelen távoli pontban érinti, tehát ez az aszimptota. Ez párhuzamos az MA iránnyal. A főpontból húzott körérintők érintési pontjai a körívet két részre osztják, egy-egy ív egy-egy hiperbola ágnak felel meg.

Ha C kör átmegy a H főponton, akkor $\varepsilon = 1$ és $m = R$, a kúpszelet parabola.

Ha pedig H a C kör belsejében van, akkor $m < R$ és így $\varepsilon < 1$. A kúpszelet ellipszis.

A 7. tétel értelmében az érintőkből a reciprok görbe pontjai lesznek. Válasszunk ki a C körhöz két érintőt. Ezek megfelelői a reciprok görbének pontjai. Ezt a két pontot összekötő egyenesnek a megfelelője a 2. tétel értelmében a körérintők metszéspontja lesz. Az összekötő egyenes a kúpszeletet az érintőknek megfelelő pontokban metszi. Ezek szerint:

8. Ha egy kúpszeletet egy g egyenessel metszetünk, akkor a metszéspontokat úgy szerkesztjük meg, hogy g-nek a reciprok G pontjából érintőt húzunk a kúpszelet reciprok köréhez, és ezek visszaállítottjai lesznek a metszéspontok.

Két kör reciprok ábrája két közös fókuszú kúpszelet. A körök érintői a kúpszelet metszéspontjai lesznek, tehát a közös érintőknek megfelelő pontok mindkét kúpszeletnek pontjai lesznek, vagyis közös pontok. Igy:

9. a. Két kör közös érintőinek reciprok ábrája a közös fókuszú kúpszeletek metszéspontjai.

9. b. Közös fókuszú kúpszeletek metszéspontjait úgy határozzuk meg, hogy a kúpszeleteknek megfelelő körökhöz érintőket húzunk és az ezeknek megfelelő reciprok pontok lesznek a metszéspontok.

Ezek szerint tehát a kúpszeletek metszéspontjai meghatározhatók, ha azok egyik fókusza közös.

Tekintsük át röviden, hogy két közös fókuszú kúpszeletnek hány metszéspontja lehetséges.

Ha a körök olyan helyzetűek, hogy a főpont mindkettőn kívül van, akkor a körök megfelelői hiperbolák. A két körhöz négy-három-kettő-egy-nulla érintő húzható, tehát két közös fókuszú hiperbolának is ugyanennyi közös pontja lehet.

Ha a két kör olyan helyzetű, hogy a H főpont egyiken kívül van, a másikra pedig illeszkedik, akkor az egyik kör megfelelője hiperbola, a másiké parabola. A két körhöz négy-három-kettő-egy-nulla érintő húzható, így a közös fókuszú hiperbolának és parabolának is ugyanannyi közös pontja van.

Ha a H egyik körön kívül, a másikon pedig belül van, akkor a körök megfelelője hiperbola és ellipszis. Ezek közös pontjainak a száma is megegyezik az előzőékkel.

Ha mindkét kör illeszkedik a H főpontra, akkor a körök megfelelői parabolák. A H közös ponttal bíró két körhöz három-kettő-egy közös-érintő húzható, eszerint két közös fókuszú parabolának három (kettő a végesben, egy a végtelenben), kettő és egy (a végtelenben) közös pontjuk lehet.

Ha a két kört úgy vesszük fel, hogy a főpont egyikre illeszkedik, a másikon pedig belül van, akkor a közös érintők száma kettő, vagyis a közös fókuszú parabolának és ellipszisnek mindig kettő, közös pontja van.

Végezetül két olyan körhöz, amelyek mindegyike a főpontot belsejében tartalmazza kettő-egy-nulla közös érintő húzható, vagyis két közös fókuszú ellipszisnek kettő-egy-nulla közös pontja lehet.

Vizsgáljuk ezután a két azonos főpontú, de különböző centrumú reciprok leképezés közötti összefüggést. Legyen a Z_1 centrum egységnyi magasságban a sík felett, Z_2 pedig a magasságban. Az első esetben (1. ábra) $PH \cdot HP_1 = 1$, a másodikban $PH \cdot HP_2 = a^2$. Ebből pedig $PH = \frac{a^2}{HP_2}$ és így $HP_2 = a^2 \cdot HP_1$. Tehát a H középpontból nyújtással vagy összenyomással az egyik leképezéshez tartozó reciprok átvihető a másik leképezéshez tartozó reciprokba. Ebből továbbá az is leolvasható, hogy hiperbolából, parabolából és ellipszisből ismét hiperbola, parabola és ellipszis lesz, továbbá a közös pontok a transzformáció után is közös pontok maradnak. Eszerint:

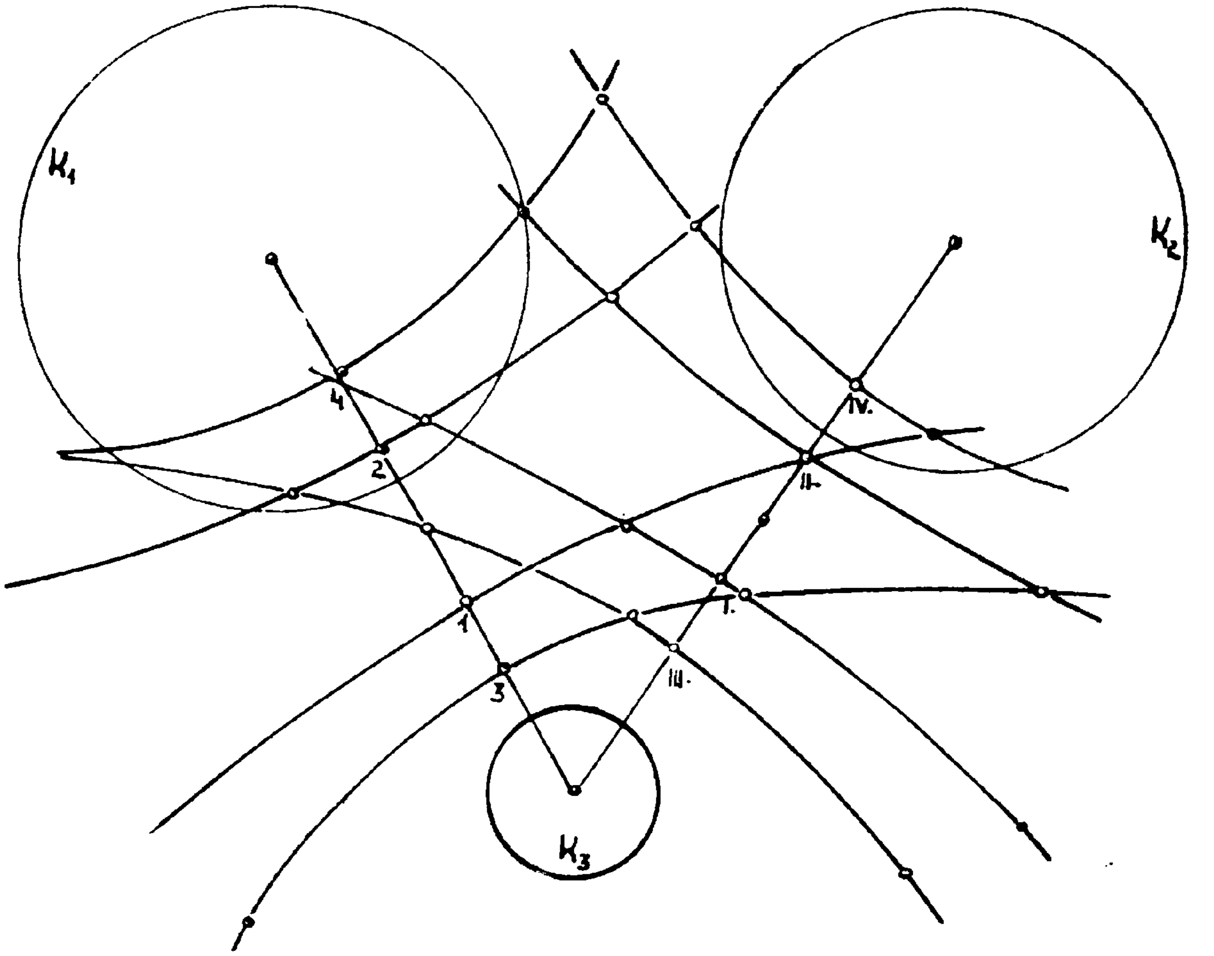
10. A közös fókuszú kúpszeletek metszéspontjainak a megszerkesztésénél a reciprocitás köre tetszőleges sugárral rajzolható meg.

Ebben a leképezésben megállapítottunk egy feltételt, amelynek, ha eleget tesznek a kúpszeletek, akkor a metszéspontjaik megszerkeszthetők. A szerkesztésnél a következők szerint járunk el: a kúpszeletek közös fókuszát választjuk főponttul, ekörül tetszőleges sugárral kört rajzolunk, a kúpszelet csúcspontjaiból megszerkesztjük a reciprok kör egy átmérőjének két végpontját, ebből megrajzoljuk a köröket és meghúzzuk a közös érintőit, ezek visszaállítottjai lesznek a metszéspontok.

Alkalmazzuk az itt összegezett tételeket az Apollonius-féle feladat megoldásánál. A feladat eredeti megfogalmazásában igy szól: Szerkesztendő három adott kört érintő kör. Az adatok között engedjük meg a nulla és a végtelen sugarúakat is. Az érintőkörök középpontjait általában kúpszeletek szolgáltatják. Ezek a kúpszeletek pedig mindig előállíthatók úgy, hogy fókuszuk közös legyen. Igy az érintőkörök középpontjai az előbbiek alapján megszerkeszthetők.

2. *Az Apollonius-féle feladat megszerkesztése*

a) Szerkesszünk három adott kört, érintő kört. Vegyük fel a három kört úgy, hogy egyik sem messe a másikat. Válasszuk ki k_3-at és ehhez viszonyítva vizsgáljuk a másik kettőt érintő körök középpontjainak mértani helyét. Azon köröknek a középpontjai, amelyekből rajzolt körök $k_1\, k_3$-t érintik, hiperbolákon vannak, ugyanúgy $k_2\, k_3$-at érintő körök

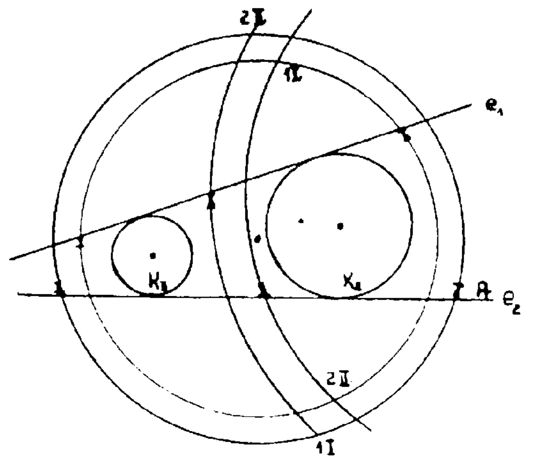


3. ábra

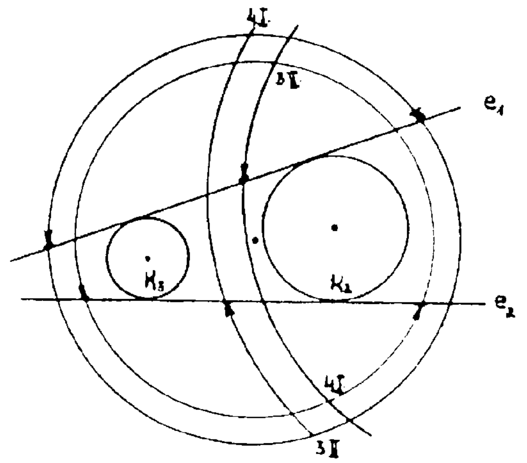
középpontjai is. A közös fókusza ezeknek a hiperboláknak k_3 középpontja. A megoldást tehát közös fókuszú hiperbolák metszései szolgáltatják. (3. ábra)

Két hiperbolát másik kettő legfeljebb tizenhat pontban metszhet. Ezek közül ki kell választani a megoldásokat. A maximális megoldások száma nyolc. Az elemzéssel itt külön nem foglalkozom. Az elemzés csaknem teljes egészében megtalálható B. Gyelone— O. Zsitomirszkij: Geometriai feladatgyűjtemény c. könyvében, a 190. feladatnál. Ennek alapján három nem metsző kör esetében a 4., 5., 6., 7. ábrák mutatják, hogy k_1 helyzetétől függően mely hiperbola ágak metszései szolgáltatják a megoldást. (Pl. a 4. ábrán ha k_1 e_2-t a nyíl felőli oldalról érinti az A pontban, akkor határeset van, ha k_1 az óramutató járásával egyező irányba mozog, akkor a 2 és II. csúcsú hiperbola ágak metszései mindaddig megoldást adnak, amíg k_1 nem érinti e_1 vagy e_2-t a nyíl felőli oldalról.

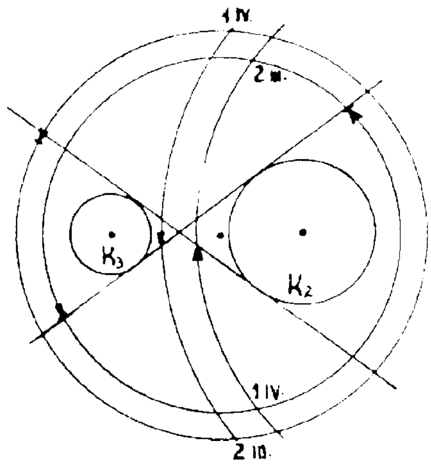
A 8. ábrán nem metsző körök esetében végeztük el a szerkesztést a következőképpen: az $O_1'O_3$ és O_2O_3' centrálisokon megjelöltük a hiperbolák csúcsait, tetszőlegesen megrajzoltuk a reciprocitás körét k_3-mal koncent rikusan, ennek felhasználásával megszerkesztettük a hiperbolák csúcs-



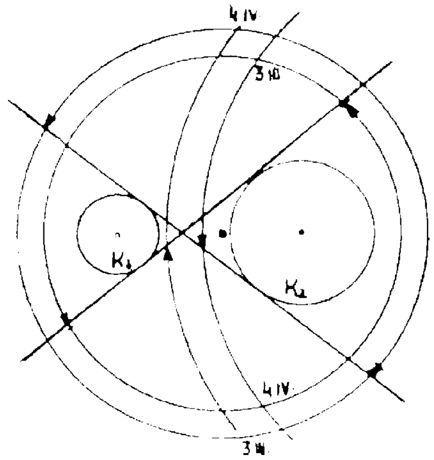
4. ábra



5. ábra



6. ábra

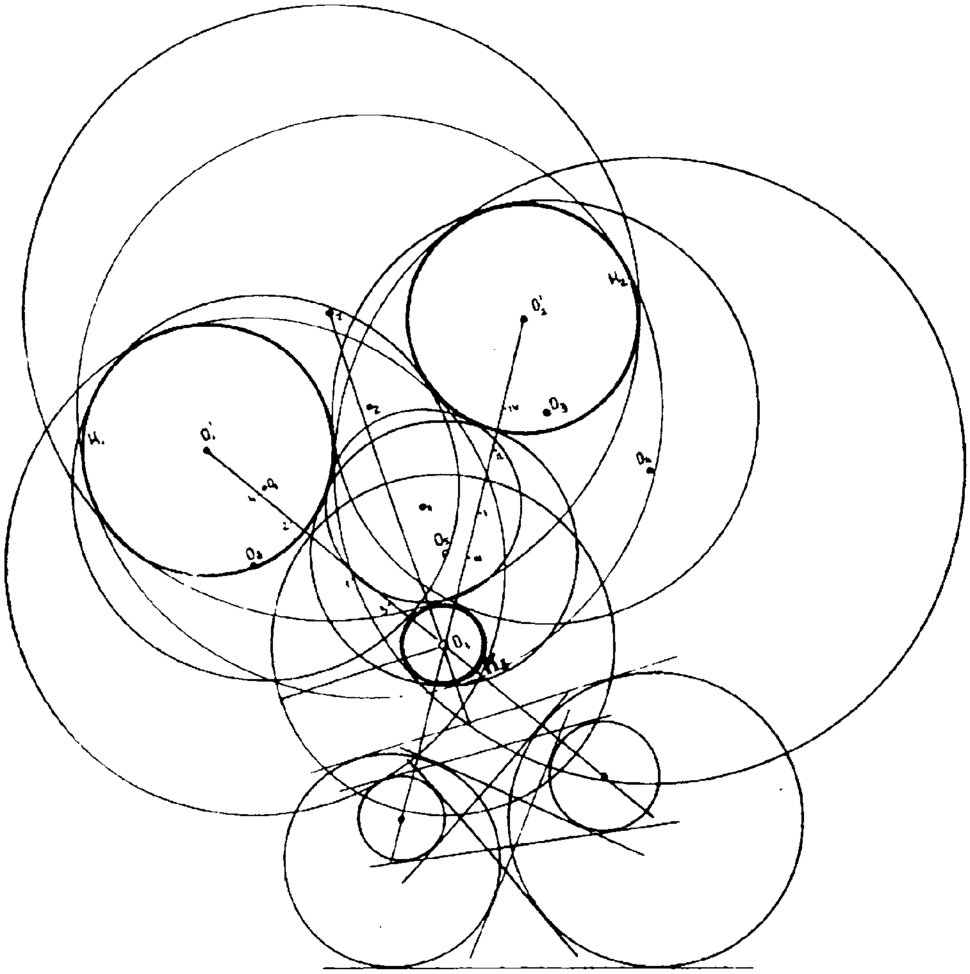


7. ábra

érintőiből a reciprok köröknek az $O_1'O_3'$ és $O_2'O_3'$ egyenesen lévő pontjait, amelyekből megrajzoljuk a köröket, ezután az egymást megoldásban metsző hiperbola ágaknak megfelelő körívekhez megszerkesztettük az érintőket, ezek visszaállítottjai az érintő körök középpontjai.

A három kör kölcsönös helyzetét tovább nem vizsgáljuk. Megoldásokat hiperbolák, ellipszisek és egyenesek metszéspontjai szolgáltatnak, amelyek szintén megszerkeszthetők.

b) Ha a három kör közül az egyik végtelen sugarú, akkor két körhöz k_1 és k_2 és egy e egyeneshez kell érintő köröket szerkeszteni. Válasszuk ki pl. a k_1 kört és keressük azon középpontok halmazát, amelyekből rajzolt körök érintik k_1-et és e-t, illetve k_1-et és k_2-t. Ha a három adott elem nem metszi egymást, a mértani helyek olyan helyzetű parabolák és hiperbolák lesznek, amelyeknek közös fókusza k_1 középpontja. Ebben az esetben a közös fókuszú parabolák és hiperbolák metszései közül kerülnek ki a megoldások. Az elemzést az előbbihez hasonlóan



8. ábra

kell elvégezni. Ha az elemek összes kölcsönös helyzeteit tekintjük, akkor közös fókuszú parabolák- hiperbolák, parabola-egyenes-hiperbolák, parabolák-hiperbola-ellipszis, parabola-egyenes-hiperbola-ellipszis metszéseit kell megszerkeszteni.

Legyen az egyik kör pl. k_3 nulla sugarú. Akkor k_1 és k_2 körökhöz és egy P ponthoz kell érintőköröket szerkeszteni. Főponttul válasszuk az adott P pontot, és ez a köröknek legyen külső pontja, továbbá azok ne messék egymást. Azon körközéppontok, amelyekből rajzolt körök érintik k_1-et és átmennek P-n, hiperbolán vannak, és azok szintén, amelyek k_2-t érintik és átmennek P-n. A megoldást ebben a helyzetben két közös fókuszú hiperbolák metszései szolgáltatják. Ha pedig az egyik kör középpontját választjuk főponttul, akkor az érintő körök középpontjait közös fókuszú hiperbolák és hiperbola metszéspontjai jelölik ki. Az elemek helyzetétől függően megoldást még egy közös fókusszal bíró hiperbola-ellipszis, ellipszis-ellipszis, továbbá hiperbola-egyenes metszései szolgáltatnak.

Ha a három kör közül az egyik nulla sugarú, a másik pedig végtelen sugarú, akkor adott k körhöz, e egyeneshez és P ponthoz kell érintő köröket szerkeszteni. Vegyük fel az elemeket úgy, hogy P ne illeszkedjen egyikre sem és k-nak külső pontja legyen, továbbá az egyenesnek azon oldalán legyen, amelyen k. Válasszuk főponttul a P pontot. A P-t és e-t érintő körök középpontjai parabolán vannak, P, és k-t érintő körök középpontjai pedig hiperbolán. A megoldást a közös fókuszszal bíró parabola és hiperbola közös pontja adja. Ha főponttul a k kör középpontját választjuk, akkor a k-t és e-t érintő körök középpontjai két közös fókuszú parabolán vannak, k és P-t érintőké pedig hiperbolán. A megoldások ebben az esetben közös fókuszú parabolák és hiperbola közös pontjai. Az elemek helyzetétől függően egyenes-hiperbola, parabola-egyenes-hiperbola, parabola-ellipszis metszéseit kell megszerkeszteni.

Ha két kör végtelen sugarú, akkor adott e_1 és e_2 egyeneseket és k kört érintő köröket kell szerkeszteni. A szerkesztést elvégezhetjük úgy, hogy a két egyeneshez tartozó szögfelező, továbbá a kör és az egyik egyeneshez tartozó parabolák metszéspontjait szerkesztjük meg. Elvégezhetjük úgy is, hogy főponttul a kör középpontját választjuk és ke körhöz tartozó parabolák metszéspontjait szerkesztjük meg. Az eddigi módszerekkel ezek szintén elvégezhetők.

Két végtelen sugarú és egy nulla sugarú kör esetében a feladat a következőkép fogalmazható meg: e_1 és e_2 egyeneshez és P ponthoz érintő köröket szerkesszünk! Főponttul a P-t választva egyenes és parabola metszése szolgáltatja a megoldást, vagy pedig két parabola metszése.

Ha a körök között kettő nulla sugarú, egy pedig végtelen sugarú, akkor két ponthoz és egy egyeneshez kell érintő köröket szerkeszteni. A pontok közül egyiket főpontnak tekintjük és a megoldást egyenes és parabola metszése adja.

Két nullasugarú kör esetében két ponthoz és egy k körhöz kell érintőköröket szerkeszteni. A megoldások a két ponthoz tartozó hiperbolikus körsor azon körei lesznek, amelyek érintik k-t. Ebből következik, hogy a körvonal nem választhatja szét a két pontot. Ha főponttul az egyik pontot választjuk, akkor egyenes és hiperbola, vagy egyenes és ellipszis metszéspontját kell megszerkeszteni. Ha főpontként a kör középpontját választjuk, akkor két hiperbola, két ellipszis, vagy egyenes-hiperbola és egyenes-ellipszis közös pontjaként is felfogható a megoldás.

Három pont és három egyenes esetében a megoldás egyszerűen adódik, semmilyen helyzetben nincs szükség az ismertetett módszer alkalmazására.

JEGYZETEK:

[1] Lásd Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie c. könyvének 83. oldalán.
[2] Az előző könyv 84. oldalán.
[3] Stiefel ugyanazon könyvének 88. oldalán.

IRODALOM:

E. Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Basel 1947.
Cranz: Apollonisches Berührungsproblem, Bremerhaven, (1890).
Gyelone—Zsitomirszkij: Geometriai feladatgyűjtemény. Szocialista nevelés könyvtára, 1956.