BETRACHTUNGEN ZUM BOHR'SCHEN KORRESPONDENZPRINZIP

Dr. Phil. HANS-DIETER PÖLTZ
(Erfurt „Dr. Theodor Neubauer" Pädagogisches Institut)

Die von dem bedeutenden Theoretiker *Niels Bohr* bei der Ausarbeitung der Grundlagen der Quantenmechanik gewonnene Erkenntnis, daß die Quantenmechanik nicht im Widerspruch zur Newtonschen Mechanik steht, sondern diese als Grenzfall einschließt, bezeichnet man als Bohr'sches Korrespondenzprinzip. Die konsequente Anwendung dieser Erkenntnis auf die ältere, von Bohr entwickelte Quantenmechanik führte *Werner Heisenberg* zur Aufstellung der Grundlagen der Quantenmechanik in der jetzt vorliegenden Form.

In der Literatur wird das Korrespondenzprinzip folgendermaßen charakterisiert:

„Korrespondenzprinzip: Für den klassischen Grenzfall (Makrophysik) soll die zu konstruierende Quantentheorie dieselben Aussagen liefern wie die betreffende klassische Theorie" [1].

„Für die Eentwicklung der endgültigen Theorie (der Heisenbergschen Quantenmechanik — d. V.) stehen nach der bisherigen Darlegung zur Verfügung:

1. neugewonnene Erfahrungssätze der Quantentheorie,
2. statistische Gültigkeit einiger Formeln der klassischen Physik,
3. Korrespondenz zwischen klassischer Mechanik und Quantentheorie . . .

Die Korrespondenz der beiden Theorien schließlich muß darin bestehen, daß die Quantenmechanik beim Übergang zur Betrachtung makroskopischer Systeme, bei denen die Planck'sche Konstante h als bedeutungslos klein angesehen werden kann, in die klassische Mechanik übergehen muß, damit sie den umfangreichen, in der bisherigen klassischen Mechanik zusammengefaßten Erfahrungstatsachen nicht zuwiderläuft" [2].

„Es (das Korrespondenzprinzip — d. V.) besagt, daß die Quantenvorgänge, die sich nicht durch die klassische Mechanik, sondern nur durch die Quantenmechanik beschreiben lassen, nicht etwa restlos andersartigen Gesetzen als der klassischen Mechanik genügen, sondern daß im Gegenteil die Quantenvorgänge analog, d. h. entsprechend (korrespondenzmäßig) wie die klassischen ablaufen" [3].

Aus diesen und weiteren Darstellungen geht hervor, daß das von Bohr gefundene und für die Ausarbeitung der Grundlagen der Quantenmechanik bedeutungsvolle Korrespondenzprinzip im wesentlichen auf den Übergang von der Quantenmechanik zur Newtonschen Mechanik beschränkt ist. Es ist aber, wie noch gezeigt werden soll, nur ein spezieller Fall eines allgemeinen wissenschaftlichen Prinzips, das folgendermaßen formuliert werden kann:

> Jede allgemeinere, Wahrheitsgehalt beanspruchende Theorie muß die entsprechende speziellere Theorie, die die Wirklichkeit in einem bestimmten Gültigkeitsbereich richtig erfaßt, als Spezialfall enthalten [4].

Dieses allgemeine Korrespondenzprinzip, das nicht auf einen Wissenschaftsbereich beschränkt ist, soll im folgenden am Beispiel (oder ausgewählten Beispielen) der Mechaniken *Newtons, Einsteins, Schrödingers* und *Diracs* dargestellt und erläutert werden.

Zuerst soll der von Bohr erkannte Übergang von der Quantenmechanik zur Newtonschen Mechanik am Beispiel der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{(h/2\pi)^2}{2m}\Delta\psi + \frac{h/2\pi}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + V\psi = 0 \tag{1}$$

dargestellt werden.

Da gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial \bar{r}}\right) = \frac{1}{\psi}\Delta\psi - \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{r}}\right)^2,$$

kann die Gleichung (1) auch in der Form

$$\left\{-\frac{(h/2\pi)^2}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\psi\right) + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{r}}\right)^2\right] + \frac{h/2\pi}{i}\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} + V\right\} = 0 \tag{2}$$

aufgeschrieben werden. Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\left\{-\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\frac{(h/2\pi)^2}{2m}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\ln\psi - \frac{(h/2\pi)^2}{2m}\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{r}}\right)^2 + \frac{h/2\pi}{i}\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} + V\right\} = 0\,. \tag{3}$$

Wählt man als Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi = \psi_0 \cdot e^{\frac{i}{h/2\pi}W(\bar{r},\, t)},$$

dann folgt aus (3)

$$\left\{-\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\frac{i\,h/2\pi}{2m}\frac{\partial W}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{r}}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial t} + V\right\} = 0\,. \tag{4}$$

Führt man den interessierenden Grenzübergang $\begin{pmatrix} \frac{h/2\pi}{W} \to 0 \\ \mathrm{II} \longrightarrow \mathrm{I} \end{pmatrix}$ durch, so erhält man[1]

$$\lim_{h/2\pi \to 0} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \frac{i\,h/2\pi}{2m} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + V + \frac{\partial W}{\partial t} \right\} = \\ = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + V + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 . \tag{5}$$

Die Gleichung (5) ist die bekannte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung der Newtonschen Mechanik. Damit ist gezeigt, daß die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik mit der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der Newtonschen Mechanik korrespondiert. Dieser Übergang wird, dargestellt an Einzelbeispielen, in der Literatur zahlreich beschrieben.

Der Übergang von der Einsteinschen Mechanik zur Newtonschen Mechanik $\begin{pmatrix} \frac{v}{c} \to 0 \\ \mathrm{III} \longrightarrow \mathrm{I} \end{pmatrix}$ soll in einfacher Weise durch Gegenüberstellung und Überführung einiger im Rahmen dieser Theorien gültigen Beziehungen dargestellt werden[2].

	Einsteinsche Mechanik	Grenzübergang	Newtonsche Mechanik
Bewegungsgleichung	$\bar{f} = \frac{d}{dt}\frac{m\dot{\bar{r}}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	$\frac{v}{c} \to 0$	$\bar{f} = \frac{d}{dt} m\dot{\bar{r}}$
Länge	$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$	$\frac{v}{c} \to 0$	$\Delta x' = \Delta x$
Zeit	$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	$\frac{v}{c} \to 0$	$\Delta t' = \Delta t$
Addition von Geschwindigkeiten	$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$	$\frac{v}{c} \to 0$	$v = v_1 + v_2$

(6)

1 Anmerkung: Durch die Schreibweise $h \to 0$ soll zum Ausdruck gebracht werden, daß h im Vergleich zu in der Makrophysik auftretenden Wirkungen W vernachlässigt werden kann.

2 Es werden zwei Inertialsysteme $\Sigma(x, y, z, t)$ und $\Sigma'(x', y', z', t')$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung gegeneinander bewegen, betrachtet.

Damit ist gezeigt, daß die Einsteinsche Mechanik die Newtonsche Mechanik als Sonderfall enthält. Durch diese Aussage soll auch zum Ausdruck gebracht werden, daß die allgemeinere Theorie (Einsteinsche Mechanik) nicht nur verallgemeinerte Resultate (6) der spezielleren Theorie (Newtonsche Mechanik) enthält, sondern auch solche Resultate, die durch Grenzübergang nicht in die entsprechenden Resultate der spezielleren Theorie überführt werden können. Setzt man obige Tabelle (6) für die kinetische Energie fort, sor erhält man in der Einsteinschen Mechanik

$$W_{\text{rel}} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m\,c^2 + \frac{m}{2}\,v^2 + \frac{1}{c^2}\,\frac{m}{4}\,v^4 + \ldots \tag{7}$$

In (7) ist eine zusätzlich mögliche, aber bedeutungslose, additive Konstante fortgelassen. Der geforderte Grenzübergang liefert

$$\lim_{\frac{v}{c} \to 0} W_{\text{rel}} = m\,c^2 + \frac{m}{2}\,v^2 = m\,c^2 + W_{\text{klass}}\,. \tag{7/a}$$

Neben der kinetischen Energie der Newtonschen Mechanik $\frac{m}{2}\,v^2$ tritt in (7/a) noch ein zusätzlicher Ausdruck auf, der auch dann von Null verschieden ist, wenn gilt $v = 0$ und als Ruhenergie bezeichnet wird.

Die allgemeinere Theorie ist im Vergleich zur spezielleren Theorie im zweifachen Sinn umfassender. Sie enthält

1. die verallgemeinerten Resultate der spezielleren Theorie, die durch Grenzübergang in die entsprechenden Resultate der spezielleren Theorie überführt werden können (6) und
2. solche Resultate, die durch Grenzübergang nicht in die entsprechenden Resultate der spezielleren Theorie durch Grenzübergang überführt werden können (7/a).

Als weiteres Beispiel für die Gültigkeit des Korrespondenzprizips soll der Übergang von der Dirac'schen Mechanik zur Schrödingerschen Mechanik $\left(\mathrm{IV} \xrightarrow{\frac{v}{c} \to 0} \mathrm{II}\right)$ am Beispiel des kräftefreien Falls betrachtet werden.

Da die Dirac-Gleichung für den betrachteten Fall in der Form

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3} l_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{E_0}{c\,h/2\,\pi}\right\} \psi = 0 \tag{8}$$

als auch in der Form

$$\left\{\sum_{\beta=0}^{3} l_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) - \frac{E_0}{c\,h/2\,\pi}\right\} \psi = 0 \tag{8/a}$$

geschrieben werden kann, muß auch gelten

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3} l_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{E_0}{c\, h/2\pi}\right\}\left\{\sum_{\beta=0}^{3} l_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) - \frac{E_0}{c\, h/2\pi}\right\}\psi = 0 . \tag{8/b}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung

$$l_\alpha l_\beta + l_\beta l_\alpha = 2\,\delta_{\alpha\beta} \tag{8/c}$$

erhält man aus obiger Beziehung

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \frac{E_0^2}{(h/2\pi)^2\, c^2}\right\}\psi = 0 . \tag{9}$$

Geht man zur 3-dimensionalen Schreibweise über und betrachtet den Fall

$$\psi = \psi_0 \cdot e^{i(\overline{k}\,\overline{r} - \omega t)},$$

so erhält man unter Beachtung der Beziehung $E = \frac{h}{2\pi}\,\omega$ aus (9)

$$\left\{\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{E^2 - E_0^2}{(h/2\pi)^2\, c^2}\right\}\psi = 0 . \tag{10}$$

Nach dem relativistischen Energiesatz gilt

$$E^2 - E_0^2 = p_{\text{rel}} \cdot c^2 ,$$

wobei

$$p_{\text{rel}} = \left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right).$$

ist.
Damit ergibt sich

$$\left\{\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{m_0^2\, v_\alpha^2\, c^2}{(h/2\pi)^2\, c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right]\right\}\psi = 0 . \tag{11}$$

Der geforderte Übergang $\left(\begin{matrix} \frac{v}{c} \to 0 \\ \mathrm{IV} \longrightarrow \mathrm{III}\end{matrix}\right)$ für den hier interessierenden Impuls liefert

$$\lim_{\frac{v}{c}\to 0} p_{\text{rel}} = \lim_{\frac{v}{c}\to 0} \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 v_\alpha = p_{\text{klass}} , \tag{12}$$

und Gleichung (11) geht über in

$$\left\{\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2+\frac{m_0^2 v_\alpha^2}{(h/2\pi)^2}\right]\right\}\psi=0. \tag{13}$$

Schreibt man schließlich für

$$\sum_{\alpha=1}^{3}{}'\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^2=\Delta \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{m_0^2 v_\alpha}{(h/2\pi)^2}=\frac{2m_0 E}{(h/2\pi)^2},$$

so erhält man die Schrödinger-Gleichung für den kräftefreien Fall in der üblichen Form

$$\Delta\psi+\frac{2m\ E}{(h/2\pi)^2}\psi=0. \tag{14}$$

Damit ist für den betrachteten einfachen Fall gezeigt, daß die Dirac'sche Mechanik im Grenzfall $\frac{v}{c}\to 0$ mit der Schrödingerschen Mechanik übereinstimmt, wie es das Korrespondenzprinzip fordert.

Schließlich muß noch der Übergang von der Dirac'schen Mechanik zur Einsteinschen Mechanik $\begin{pmatrix} \frac{h/2\pi}{W}\to 0 \\ \mathrm{IV} \longrightarrow \mathrm{III}\end{pmatrix}$ gezeigt werden.

Aus

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3} l_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\frac{i e}{c h/2\pi}\Phi_\alpha\right)+\frac{E_0}{c h/2\pi}\right\}\psi=0$$

und

$$\left\{\sum_{\beta=0}^{3} l_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}-\frac{i e}{c h/2\pi}\Phi_\beta\right)-\frac{E_0}{c h/2\pi}\right\}\psi=0$$

folgt, daß unter Berücksichtigung (8/c) auch gelten muß

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}-\frac{2ie}{c h/2\pi}\Phi_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\frac{E_0^2+e^2\Phi^2}{(h/2\pi)^2c^2}\right\}\psi=0. \tag{15}$$

Durch eine einfache mathematische Umformung folgt aus (15) unmittelbar

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\ln\psi\right)-\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2-\frac{1}{\psi}\frac{2ie}{c h/2\pi}\Phi_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}-\frac{E_0^2+e^2\Phi^2}{(h/2\pi)^2c^2}\right]\right\}=0. \tag{15/a}$$

Unter Verwendung des allgemeinen Ansatzes

$$\psi=\psi_0\cdot e^{\frac{i}{h/2\pi}W(x_\alpha)}$$

für die Wellenfunktion ergibt sich aus (15/a):

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3} \frac{i}{h/2\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \ln W\right) + \frac{1}{(h/2\pi)^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{2e}{(h/2\pi)^2 c} \Phi_\alpha \frac{\partial W}{\partial x_\alpha} - \frac{E_0^2 + e^2\Phi^2}{(h/2\pi)^2 c^2}\right\} = 0 . \tag{16}$$

Multiplikation der Gleichung (16) mit $(h/2\pi)^2$ liefert

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3} i\, h/2\pi \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \ln W\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{2e}{c} \Phi_\alpha \frac{\partial W}{\partial x_\alpha} - \frac{E_0^2 + e^2\Phi^2}{c^2}\right\} = 0 . \tag{17}$$

Führt man den Grenzübergang $\begin{pmatrix} \frac{h/2\pi}{W} \to 0 \\ \mathrm{IV} \longrightarrow \mathrm{III} \end{pmatrix}$ durch, so ergibt sich aus (17)

$$\left\{\sum_{\alpha=0}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{2e}{c} \Phi_\alpha \frac{\partial W}{\partial x_\alpha} - \frac{E_0^2 + e^2\Phi^2}{c^2}\right\} = 0 \tag{18}$$

Ausführlich aufgeschrieben lautet die Gleichung (18), wenn man für $\Phi_\alpha = \left(0, 0, 0, \frac{i}{e} V\right)$ wählt und zur dreidimensionalen Schreibweise übergeht.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + \frac{2V}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{E_0^2 - V^2}{c^2} = 0 . \tag{19}$$

Die Gleichung (15) in der Dirac'schen Mechanik entspricht der Gleichung (19) in der Einstein'schen Mechanik, die durch einen weiteren Grenübergang $\begin{pmatrix} \frac{v}{c} \to 0 \\ \mathrm{III} \longrightarrow \mathrm{I} \end{pmatrix}$ in die ihr entsprechende Gleichung (5) der Newtonschen Mechanik übergeht.

Abschließend sei noch vermerkt, daß das allgemeine Korrespondenzprinzip, das nur eingeschränkt am Beispiel der Mechaniken Diracs, Einsteins, Schrödingers und Newtons in der vorliegenden Arbeit dargestellt wurde, als spezifischer Ausdruck des Gesetzes von der Negation der Negation der marxistischen Philosophie gewertet werden kann. Die neue, allgemeinere Theorie enthält die alte, speziellere Theorie als Sonderfall, d. h., die alte Theorie ist in der neuen Theorie enthalten. Gleichzeitig überwindet die neue Theorie gewisse Beschränkungen der alten Theorie und liefert weiterreichende Aussagen, die von der alten Theorie nicht erklärt werden können.

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, das von Niels Bohr entwickelte Korrespondenzprinzip, das auf den Übergang von der nichtrelativischen Quantenmechanik zur Newtonschen Mechanik beschränkt ist, auf weitere Bereiche zu verallgemeinern und zu einem allgemeinen Korrespondenzprinzip zu entwickeln, das folgendermaßen formuliert werden kann: Jede allgemeinere, Wahrheitsgehalt beanspruchende Theorie muß die entsprechende speziellere Theorie, die die Wirklichkeit in einem bestimmten Gültigkeitsbereich richtig erfaßt, als Spezialfall enthalten.

Im Einzelnen wird die Gültigkeit dieses Prinzips an den Übergängen zeitabhängige Schrödinger-Gleichung—Hamilton-Jacobische Differentialglaichung; Grundgesetz der relativistischen Mechanik-Grundgesetz der Newtonschen Mechanik; Dirac-Gleichung für den kräftefreien Fall-Schrödinger-Gleichung für den kräftefreien Fall und Dirac-Gleichung—Bewegungsgleichung der relativischen Mechanik gezeigt.

ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a dolgozatban a szerző megkísérelte a Bohr-féle korreszpondencia-elvet, amely a nem relativisztikus kvantummechanikának a klasszikus mechanikába való átmenetére korlátozódik, további területre általánosítani és a következő általánosabb korreszpondencia-elvet megfogalmazni: bármely általánosabb, valóságtartalmat igénylő elmélet a megfelelő speciálisabb elméletet, amely egy meghatározott érvényességi tartományban a valóságot helyesen írja le, speciális esetként szükségképpen magába foglalja.

Ennek az elvnek az érvényességét részletekben a következő átmenetek esetére mutatta meg a szerző: az időtől függő Schrödinger-egyenletből a Hamilton—Jacobi differenciálegyenletbe, a relativisztikus mechanika alaptörvényéből a Newton-féle mechanika alaptörvényébe, az erőmentes esetű Dirac-egyenletből a megfelelő Schrödinger-egyenletbe, végül az általános Dirac-egyenletből a relativisztikus-mechanika mozgásegyenletébe.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Heber, Weber: „Grundlagen der modernen Quantenphysik." B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1956. Bd. I. S. 5.

[2] Macke: „Quanten — Ein-lehrbuch der theoretischen Physik." Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig KG. Leipzig, 1962. S. 74.

[3] Westphal: „Physikalisches Wörterbuch." Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1952. S. 719.

[4] Siehe Schmutzer: „Einzelwissenschaft und Philosophie in der Sicht eines Physikers" in DZfP, 9/1964. S. 1114.