KÚPSZELETEK METSZÉSPONTJAINAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL

Dr. PELLE BÉLA

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, milyen feltételek mellett szerkeszthetők meg két kúpszelet metszéspontjai. Befejezésül pedig megadunk olyan transzformációt, amelyben meghatározott feltétellel rendelkező kúpszeletek metszéspontjai szerkeszthetők. Tekintsünk két tetszőleges kúpszeletet. Ezeknek a fokális egyenletei [1]:

$$x_1^2 + x_2^2 = (e_1 x_1 + p_1)^2 \tag{1}$$

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = (e_2 \bar{x}_1 + p_2)^2 \tag{2}$$

Az x_1, x_2 és $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ koordináták közötti összefüggést egy lineáris transzformáció szolgáltatja [2]:

$$x_i = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} x_k + b_i \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ik} a_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ 1 & (k = l) \end{cases} \qquad k, l = 1, 2 \tag{4/a}$$

és

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 \tag{4/b}$$

Így a (2) egyenlet a következő formába írható:

$$(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1)^2 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2)^2 = [e_2(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1) + p_2]^2$$

Négyzetreemelés és rendezés után

$$x_1^2(a_{11}^2 + a_{21}^2) + x_2^2(a_{12}^2 + a_{22}^2) + 2 x_1 x_2(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22}) + 2 x_1(a_{11} b_1 + a_{21} b_2) +$$
$$+ 2 x_2(a_{12} b_1 + a_{22} b_2) + (b_1^2 + b_2^2) = [e_2(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_2) + p_2]^2 .$$

(4 a) szerint

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0$$
$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 .$$

Ennek felhasználásával a következőt kapjuk:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1(a_{11}b_1 + a_{21}b_2) + 2x_2(a_{12}b_1 + a_{22}b_2) + (b_1^2 + b_2^2) = [e_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_2) + p_2]^2 . \tag{5}$$

Fejezzük ki (1)-ből x_2^2-t,

$$x_2^2 = (e_1x_1 + p_1)^2 - x_1^2 , \tag{1*}$$

és írjuk (5)-be. Rendezés után

$$(e_1x_1 + p_1)^2 + 2x_1(a_{11}b_1 + a_{21}b_2) + 2\sqrt{(e_1x_1 + p_1)^2 - x_1^2}(a_{12}b_1 + a_{22}b_2) + (b_1^2 + b_2^2) = [e_2(a_{11}x_1 + a_{12}\sqrt{(e_1x_1 + p_1)^2 - x_1^2} + b_2) + p_2]^2 . \tag{6}$$

Ennek az egyenletnek gyökei lesznek a két kúpszelet metszéspontjainak abszcisszái [3]. A kúpszeletek metszéspontjai és a (6) egyenlet valós gyökei között egyértelmű megfelelés van. Valós metszéspont abszcisszája az egyenlet valós gyöke és fordítva. Ha a (6)-os egyenlet gyökei szerkeszthetők, akkor az két egyenlő fokú tényező szorzatára bomlik [4]. Milyen feltételek mellett bontható a (6)-os egyenlet két egyenlő fokú tényezők szorzatára? Ha pl. a következő összefüggések érvényesek:

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 &= 0 \\ a_{12}b_1 + a_{22}b_2 &= 0 \\ b_1^2 + b_2^2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

akkor a (6)-os egyenlet két egyenlő fokú tényezők szorzatára bontható. Ezek

$$b_1 = b_2 = 0 \tag{8}$$

feltételek mellett teljesülnek, vagyis, ha a (6)-os egyenlet alakja:

$$(e_1x_1 + p_1)^2 - [e_2(a_{11}x_1 + a_{12}\sqrt{(e_1x_1 + p_1)^2 - x_1^2}) + p_2]^2 = 0 \tag{9}$$

Ha viszont a két kúpszelet egyik fókusza közös, akkor ezt a közös fókuszt választva a fokális egyenletek felírásakor, (8) teljesül. Érvényes tehát a következő tétel:

Két kúpszelet metszéspontjai megszerkeszthetők, ha egyik fókuszuk közös.

a) Kimutattuk tehát, hogy ha két kúpszelet egyik fókusza közös, akkor metszéspontjai megszerkeszthetők.
   A (3) lineáris transzformáció ekkor a következő alakú lesz:

$$x_i = \sum_{k=i}^{2} a_{ik}x_k . \tag{10}$$

Ez a koordinátarendszer nullpont körüli forgását jelenti [5], ahol az a_{ik} együtthatóknak eleget kell tenni a (4/a) és (4/b) feltételeknek, vagyis

$$a_{12} = -a_{21}$$

és

$$a_{11} = a_{22} \quad .$$

Ismeretes, hogy a forgatásnál az a_{ik} együtthatók a tengelyek szögének cosinusai [6], tehát a(10) végleges formája:

$$\bar{x}_1 = x_1 \cos (x_1\bar{x}_1) + x_2 \cos (x_2\bar{x}_1)$$

$$\bar{x}_2 = x_1 \cos (x_1\bar{x}_2) + x_2 \cos (x_2\bar{x}_2)$$

Másképpen:

$$\bar{x}_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$$

$$\bar{x}_2 = - x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \,, \tag{11}$$

ahol α az elfordulás szöge.

b) Más úton is kimutatható, hogy ha két kúpszelet egyik fókusza közös, akkor metszéspontjai megszerkeszthetők.
Legyenek a közös fókuszú kúpszeletek egyenletei

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (e_1 x_1 + p_1)^2 \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 &= (e_2 \bar{x}_1 + p_2)^2 \,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ahol az x_1x_2 és $\bar{x}_1\bar{x}_2$ koordinátarendszerek kezdőpontjai a közös fókuszban vannak, és közöttük az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\bar{x}_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$$

$$\bar{x}_2 = - x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \,,$$

(α az $(x_1\bar{x}_1)$ tengelyek szöge).

Ennek felhasználásával (12) alakja:

$$x_1^2 + x_2^2 = (e_1 x_1 + p_1)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = [e_2 (x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) + p_2]^2$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$e_1 = a \qquad e_2 \cos \alpha = c$$

$$p_1 = b \qquad e_2 \sin \alpha = d$$

$$p_2 = e \,.$$

Ekkor az alábbi egyenletrendszer megoldására redukáltuk a feladatot:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (cx_1 + dx_2 + e)^2 . \\ x_1^2 + x_2^2 &= (ax_1 + b)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

A két kúpszelet metszéspontjain az alábbi kúpszelet is átmegy:

$$(ax_1 + b)^2 - (cx_1 + dx_2 + e)^2 = 0$$

Ez pedig a következő formában írható:

$$[x_1(a+c) + dx_2 + b + e]\,[x_1(a-c) - dx_2 + b - e] = 0$$

Így (13) helyett az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (ax_1 + b)^2 \\ [x_1(a+c) + dx_2 + b + e]\,[(a-c)\,x_1 - dx_2 + b - e] &= 0 \end{aligned} \tag{13/a}$$

A második egyenlet akkor nulla, ha

$$(a+c)\,x_1 + dx_2 + b + e = 0 \text{, vagy ha}$$

$$(a-c)\,x_1 - dx_2 + b - e = 0 \text{,}$$

$$\begin{aligned} \text{vagyis } x_2 &= \frac{-(a+c)\,x_1 - b - e}{d} \text{, vagy ha} \\ x_2 &= \frac{(a-c)\,x_1 + b - e}{d} \end{aligned} \tag{14}$$

Ezeket behelyettesítve a (13/a) első egyenletébe, a metszéspontok abszcisszáit a következő egyenletek szolgáltatják:

$$A_1 x_1^2 + B_1 x_1 + C_1 = 0$$

$$A_2 x_1^2 + B_2 x_1 + C_2 = 0 .$$

Ahol

$$A_1 = d^2 + (a+c)^2 - a^2 d^2$$

$$B_1 = 2\,(a+c)\,(b+e) - 2\,abd^2$$

$$C_1 = (b+e)^2 - b^2 d^2$$

$$A_2 = d^2 + (a-c)^2 - a^2 d^2$$

$$B_2 = 2\,(a-c)\,(b-e) - 2\,abd^2$$

$$C_2 = (b-e)^2 - b^2 d^2$$

Mivel a kúpszeletek meghatározó adataiból A_i, B_i, C_i ($i = 1,2$), az együtthatókból pedig a másodfokú egyenlet gyökei körzővel és vonalzóval megszerkeszthetők, a metszéspontok abszcisszái körzővel és vonalzóval szerkeszthetők. Az ordináta értékek (14)-ből nyerhetők. Ezzel a tételt igazoltuk.

A következőkben megadunk olyan transzformációt, amely a kúpszeletek metszéspontjainak szerkeszthető képelemeket feleltet meg. Induljunk ki a kúpszeletek polárkoordinátás egyenleteiből, ahol a pólus a közös fókuszban van.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon \cos \varphi} \tag{15}$$

Bevezetve az $\frac{1}{p} = R$, $\frac{\varepsilon}{p} = m$ és $\varrho = R+m \cos \varphi$ jelöléseket, (15)-öt a következő alakban írhatjuk:

$$r = \frac{1}{R+m \cos \varphi} = \frac{1}{\varrho}. \text{ Innen} \tag{16}$$

$$r \varrho = 1 . \tag{17}$$

Tekintsük azokat a leképezéseket, amelyeknél az eredeti elemek és képelemek közötti összefüggést (17) írja le, és ezek egy egyenesre illeszkednek. (15), (16) és (17)-ből belátható, hogy ha r az eredeti elem távolsága a pólustól, akkor ϱ a képelem távolsága a pólustól.

a) Legyen a leképezés ponttranszformáció. Akkor (17) szerint

$$HP \cdot HP' = 1 \qquad \text{és} \qquad \overline{HP'} = \varrho = R+m \cos \varphi , \tag{18}$$

ahol H a közös fókusz. Azon pontok mértani helye, amelyek (18)-nak eleget tesznek, a *Pascal-féle csigavonal.* A kúpszeletek metszéspontjai a csigavonalak közös pontjai lesznek. Ebben a transzformációban a metszéspontok képelemei nem szerkeszthetők. (Ilyen transzformáció az inverzió. Kimutattuk, hogy az inverzióban a kúpszelet képe a Pascal-féle csigavonal.)

b) Tekintsünk most olyan leképezést, amely egy síkot úgy képez le önmagára, hogy ponthoz és egyeneshez a duálisát rendeli kölcsönösen egyértelműen, illeszkedés tartóan, és (17) szerint. Ebben a leképezésben, ha r a kúpszelet pontjainak távolsága a közös fókusztól, ϱ a képegyenes távolságát jelenti. Mit burkolnak azok az egyenesek, amelyeknek egy fixponttól mért távolságukra az alábbi összefüggés érvényes:

$$\varrho = R+m \cos \varphi \quad ?$$

Ezeknek az egyeneseknek egyenleteit a következő formában írhatjuk fel:

$$F(x, y, \alpha) = x \sin \alpha + y \cos \alpha - \varrho = 0 , \tag{19}$$

ahol

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi .$$

Az $F(x, y, \alpha) = 0$ görbesereg burkolójának egyenletét megkapjuk, ha $F = 0$ és $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ egyenletrendszerből α-t kiküszöböljük [7]. Ezek szerint

$$\begin{aligned} \sin \alpha (x - m) + y \cos \alpha &= R \\ \cos \alpha (x - m) - y \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

egyenletrendszerből kell α-t kiküszöbölni. Négyzetreemelés és összegezés után (20)-ból az alábbi egyenletet kapjuk:

$$(x - m)^2 + y^2 = R^2. \tag{21}$$

Ez pedig olyan kör egyenlete, amelynek sugara $R = \frac{1}{p}$, és középpontjának koordinátái $(\frac{\varepsilon}{p}, 0)$ tehát egyértelműen meghatározható.

Ebben a leképezésben a közös fókuszú kúpszeletek pontjainak képegyenesei köröket burkolnak, és a kúpszeletek metszéspontjainak képegyenesei a körök közös érintői. Ezek szerkeszthetők, visszatranszformálással pedig kapjuk a metszéspontokat.

JEGYZET

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, 1960. 419. oldal).
[2] Erwin Kreyszig: Differentialgeometrie (Leipzig, 1957. 5. oldal).
[3] Dr. Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete (Kolozsvár, 1943. 64. oldal).
[4] Dr. Szőkefalvi Nagy Gyula: uo. (14. oldal).
[5] E. Kreyszig: uo. (7. oldal).
[6] Hajós György: uo. (293. oldal).
[7] Bronstejn—Szemengyajev: Matematikai Zsebkönyv (1955. 275. oldal).