WYTHOFF-PÁROK ÉS MÁSODRENDŰ SOROZATOK KAPCSOLATA

DR. MÁTYÁS FERENC

I.

Definiáljuk a $G = G(A, B, G_0, G_1) = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatot az A, B, G_0, G_1 rögzített egészekkel, amelyekre
$D = A^2 + 4B \neq 0$ és a

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \qquad (n > 1)$$

rekurzív formulával. Ismert, hogy ha az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet gyökei α, illetve β, akkor

$$G_n = a\alpha^n - b\,\beta^n \tag{1}$$

ahol $a = \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta}$ és $b = \frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta}$ (lásd [6], 89. oldal).

A $G = G(1, 1, G_0, G_1)$ sorozatok Fibonacci-típusúnak, míg a $G = G(1, 1, 0, 1)$ sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük, és $F = F(1, 1, 0, 1)$-el jelöljük.

Definiáljuk az $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat az alábbi módon:

$$u_1 := 1 \quad ; \quad v_1 := 2$$

és $k > 1$ esetén

$$u_k := m,$$

ahol m az a legkisebb pozitív egész, melyre $u_i \neq m$ $v_i \neq m$ és $1 \leqq i < k$,

$$v_k := u_k + k.$$

Az $(u_1; v_1)$, $(u_2; v_2)$, ... párokat Wythoff-pároknak nevezzük.
Ez alapján pl. az első öt Wythoff-pár a következő:

$$(1; 2),\ (3; 5),\ (4; 7),\ (6; 10),\ (8; 13).$$

Napjainkban — a Wythoff-párok eredetének tekinthető Wythoff-játéktól (a játék leírását lásd pl. [4]) függetlenül vizsgálták e párok sorozatának tulajdonságait, mint pl. V. E. Hoggatt, Jr., M. Bicknell Johnson, R. Sarsfield [3], W, W. Rouse Ball [7] és A. F. Horadam [4].

A továbbiakban két ismert eredményt idézünk:

1. Minden $i = 1,2,\ldots$ természetes szám esetén

$$u_i = [i\varphi] \text{ és } v_i = [i\varphi^2] \tag{2}$$

ahol $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és [x] az x egész részét jelenti [7].

2. Az $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok a természetes számok egy particióját adják [1].

A Wythoff-párok (2), valamint az $F = F(1, 1, 0, 1)$ Fibonacci sorozat

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} \quad \left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

explicit alakja (1) azt sejteti, hogy a Wythoff-párok és az F sorozat között kapcsolat van.

A. F. Horadam [4] és R. Silber [8], [9] a nem feltétlenül 0 és 1 kezdő elemekkel rendelkező, ún. Fibonacci-típusú $G = G(1, 1, G_0, G_1)$ sorozatok és a Wythoff-párok kapcsolatát vizsgálták.

A következőket bizonyították:

a) A $G = G(1, 1, N, [N\varphi])$ alakú sorozatok tagjaiból az összes Wythoff-pár előállítható, ahol N pozitív egész szám [4].

b) Ha (G_0, G_1) Wythoff-pár, akkor $G = G(1, 1, G_0, G_1)$ sorozat tagjaiból képezhető összes G_n, G_{n+1} pár Wythoff-pár, ahol a páros [8].

R. Silber [9] a természetes számok Fibonacci-számok összegeként való előállítását (Zeckendorf-féle reprezentációt) használva szükséges és elégséges feltételt adott arra, hogy a Fibonacci-típusú sorozat G_n, G_{n+1} szomszédos tagjai Wythoff-párt alkossanak. E szép eredmény hibája, hogy elég nagy számok esetén meglehetősen nehéz meggyőződni arról, hogy a szám Zeckendorf-féle reprezentációja a kívánt alakú-e, vagy sem, sőt az egész tétel alkalmazásához szükséges a G_n, G_{n+1} értékek konkrét ismerete.

A továbbiakban arra a kérdésre kívánunk választ adni, hogy van-e a Fibonacci-típusú sorozatokon kívül olyan másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melynek elemeiből végtelen sok Wythoff-pár konstruálható, illetve karakterizáljuk a Fibonacci-típusú sorozatokat abból a szempontból, hogy a sorozat tagjaiból végtelen sok Wythoff-pár képezhető-e, vagy sem. Ha végtelen sok pár képezhető, akkor explicit alakban megadunk egy n_0 értékét, úgy hogy $n \geqq n_0$ esetén minden G_n, G_{n+1} pár Wythoff-pár legyen (n paritása állandó).

II.

Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ $(AB \neq 0, |G_1| + |G_0| \neq 0$ és $A^2 + 4B \neq 0)$ egy másodrendű sorozat, melynek G_n és G_{n+k} elemei az i-edik Wythoff-pár tagjai, azaz

$$(G_n;\ G_{n+k}) = (u_i;\ v_i)$$

valamely $i \geqq 1$ egészre, akkor u_i és v_i definíciója miatt $(v_i - u_i = i)$

$$G_{n+k} - G_n = i. \tag{3}$$

Így

$$(G_n;\ G_{n+k}) = (G_{n+k} - G_n)\,\varphi + G_{n+k} - G_n$$

de ez (2) és $\varphi^2 = \varphi + 1 \left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ szerint ekvivalens a

$$G_n \leqq (G_{n+k} - G_n)\ \varphi < G_n + 1$$

$$G_{n+k} \leqq (G_{n+k} - G_n)\,\varphi^2 = (G_{n+k} - G_n)\varphi + G_{n+k} - G_n < G_{n+k} + 1$$

egyenlőtlenség rendszerrel, melyből

$$0 \leqq (G_{n+k} - G_n)\,\varphi - G_n < 1 \tag{4}$$

adódik. Az eddigiekből következik, hogy a $G = G\,(A, B, G_0, G_1)$ sorozat elemeiből akkor és csak akkor képezhető végtelen sok Wyrthoff-pár, ha (4)-nek végtelen sok n, n +k pozitív egész megoldása van.

A továbbiakban a $G = G\,(A, B, G_0, G_1)$ sorozatra teljesüljön a $D = A^2 + 4B > 0$ feltétel is, így az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet α, β gyökei valósak. $\alpha + \beta = A \neq 0$, $D = (\alpha - \beta)^2 > 0$ és $|\alpha| > 1$.

Tétel. Legyen a $G = G\,(A, B, G_0, G_1)$ sorozatra $AB \neq 0$, $D = A^2 + 4B > 0$ és $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$. A G sorozat G_n, G_{n+k} elemeiből akkor és csak akkor képezhető végtelen sok Wythoff-pár, ha

$$A = B = k = 1 \text{ és } e = \frac{G_1 - \psi G_0}{\varphi - \psi} > 0,$$

ahol φ és ψ az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei $\left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Következmények. Legyen $G = G\ (1, 1, G\ , G_1)$ esetén $e > 0$ és

$$C = max\left(C_{01} = \frac{\log|G_1 - \psi G_0| - \log|G_1 - \varphi G_0|}{\log|\psi| - \log\varphi},\right.$$

$$\left.C_{02} = \frac{\log\varphi + \log|G_1 - \varphi G_0|}{\log|\psi|}\right).$$

1. A G_n, G_{n+1} elemek Wythoff-párt alkotnak minden $n = n_0 + 2t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ egészre, ahol

$$n_0 = [C] + \begin{cases} 2, \text{ ha vagy } [C] \text{ páros} & \text{és } G_1 - \varphi G_0 > 0, \\ \quad\text{vagy } [C] \text{ páratlan} & \text{és } G_1 - \varphi G_0 < 0; \\ 1, \text{ ha vagy } [C] \text{ páros} & \text{és } G_1 - \varphi G_0 < 0; \\ \quad\text{vagy } [C] \text{ páratlan} & \text{és } G_1 - \varphi G_0 > 0, \end{cases}$$

2. A $\{G_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ sorozatból előállítható $\left(u_{i_t}, v_{i_t}\right)$ Wythoff-párok i_t indexei rendre a $H = H(3, -1, H_0, H_1)$ másodrendű sorozat elemei, ahol

$$H_0 = G_{n_0-1} \qquad \text{és} \qquad H_1 = G_{n_0+1}$$

Tétel bizonyítása. Először a tétel feltételeinek szükségességét igazoljuk. Legyen $(G_n, G_{n+k}) = (u_i, v_i)$ valamely i-re, és tegyük fel, hogy

$$a = \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \neq 0.$$

Ekkor (4) miatt

$$0 \leqq (G_{n+k} - G_n)\varphi - G_n = G_{n+k}\varphi - G_n(\varphi + 1).$$

amiből

$$\varphi^2 = \varphi + 1, \text{ vagyis } \varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi} \quad \text{miatt}$$

$$\varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi} < \frac{G_{n+k}}{G_n}$$

következik, hiszen $G_n = u_i > 0$. Ebből $G_n = a\alpha^n - b\beta^n$ felhasználásával

$$(1 <)\, \varphi < \frac{G_{n+k}}{G_n} = \frac{a\alpha^{n+k}\left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\right)}{a\alpha^n\left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}$$

adódik. $G_n = u_i$, $G_{n+k} = v_i$ és $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = \lim\limits_{i\to\infty} v_i = \infty$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(n + k) = \infty$, így $|\beta| < |\alpha|$ miatt, az előző egyenlőtlenség végtelen sok n, $n + k$ pozitív egészre csak akkor teljesülhet, ha elegendően nagy n-től kezdve k olyan egész értéket vesz fel, melyre $1 < \alpha^k$. De $|\alpha| > 1$ miatt ehhez szükséges, hogy $k > 0$ álljon fenn.

Ugyancsak a $0 \leqq (G_{n+k} - G_n)\varphi - G_n < 1$ egyenlőtlenségből kiindulva és G_n, G_{n+k} explicit alakját használva

$$0 \leqq a\,\alpha^n(\alpha^k\varphi - \varphi - 1) - b\,\beta^n(\beta^k\varphi - \varphi - 1) < 1$$

egyenlőtlenséget kapjuk, melyből $\varphi + 1 = \varphi^2$ miatt

$$0 \leqq a\,\alpha^{n+k}\left(1 - \frac{\varphi}{\alpha^k} + \frac{\varphi}{\alpha^k}\,\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\right) < \frac{1}{\varphi} \tag{5}$$

adódik.

Mivel $k > 0$, ha n elég nagy, így $|\alpha| > 1$ miatt (5) csak akkor teljesülhet végtelen sok pozitív n, $n + k$ egészre, ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\varphi}{\alpha^k} + \frac{\varphi}{\alpha^k}\,\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\right) = 0$$

Ez utóbbi viszont csak akkor állhat fenn — mivel $1 > |\alpha|$, $0 < k$ és $|\beta| < |\alpha|$, ha tetszőleges pozitív ε-ra

$$\left|1 - \frac{\varphi}{\alpha^k}\right| < \varepsilon$$

Azonban $\frac{\varphi}{\alpha^k}$ értékei közül csak véges sok esik az egy szám egy adott környezetébe, így szükséges, hogy $\varphi = \alpha^k$ álljon fenn. $\varphi = \alpha^k$-ról pedig belátjuk, hogy csak $k = 1$ és $\alpha = \varphi$ értékek elégítik ki.

Ugyanis α és β az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet gyökei, így $k > 0$ miatt

$$\alpha^k + \beta^k = A' \text{ és } \alpha^k \cdot \beta^k = -B'$$

is egész szám, továbbá α^k és β^k gyöke az $x^2 - A'x - B' = 0$ egyenletnek. $\varphi = \alpha^k$ miatt $\varphi^2 - A'\varphi - B' = 0$, így φ minimális definiáló polinomjának egyértelműségéből

$$\alpha^k + \beta^k = A' = 1 \text{ és } \alpha^k\beta^k = (\alpha\beta)^k = (-B)^k = -B' = -1$$

következik. Ez utóbbiból kapjuk, hogy $B = 1$ és $k\,(> 0)$ páratlan egész szám. Így az $\alpha = \frac{A + \sqrt{A^2+4}}{2}$ alakból egyszerűen adódik, hogy $\varphi = \alpha^k$ csak $k = 1$ és $A = 1$ teljesül.

Ezzel beláttuk, hogy $(G_n, G_{n+k}) = (u_i, v_i)$ végtelen sok n esetén csak akkor teljesül, ha $A = B = 1$ és $k = 1$.

$u_i > 0$ és $v_i > 0$ minden $i \geqq 1$-re, így $G_n > 0$ és $G_{n+1} > 0$ végtelen sok n-re kell, hogy teljesüljön.

$G = G\,(1,\,1,\,G_0\,G_1)$ sorozat.

$$G_n = a\varphi^n - b\psi^n = a\varphi^n\left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n\right)$$

explicit alakjából $|\psi| < \varphi$ miatt kapjuk, hogy $G_n > 0$ és $G_{n+1} > 0$ végtelen sok n-re akkor teljesülhet, ha

$$a = e = \frac{G_1 - \psi\,G_0}{\varphi - \psi} > 0.$$

Térjünk vissza arra az esetre, ha $G = G\,(A, B, G_0, G_1)$ sorozat esetén

$$a = \frac{G_1 - \beta\,G_0}{\alpha - \beta} = 0.$$

$0 \leqq (G_{n+k} - G_n)\,\varphi - G_n < 1$ egyenlőtlenségből most $G_n = -b\,\beta^n$ és $G_{n+k} = -b\,\beta^{n+k}$ helyettesítéssel $\varphi + 1 = \varphi^2$ miatt

$$0 \leqq b\,\beta^n\,(\varphi - \beta^k) < \frac{1}{\varphi}$$

adódik, mely $b \neq 0$ (különben $G_n \equiv 0$ lenne) miatt $|\beta| > 1$ esetben csak akkor teljesülhet végtelen sok n ($\geqq 1$) egészre, ha $\varphi = \beta^k$. De $\varphi \neq \beta^k$ egyetlen k-ra sem, mivel $a = 0$-ból $\beta = \frac{G_0}{G_1}$ következik.

Ha $|\beta| \leqq 1$, akkor $|G_n| = |b\,\beta^n| \leqq |b|$. Összegezve $a = 0$ esetben legfeljebb véges sok Wythoff-pár képezhető a $G = (A,\,B,\,G_0\,G_1)$ sorozat elemeiből.

Ezzel a tétel feltételeinek szükséges voltát bizonyítottuk.

A tétel feltételeinek elégséges voltát az alábbiak szerint láthatjuk be.

A

$$0 \leqq (G_{n+k} - G_n)\,\varphi - G_n < 1$$

egyenlőtlenség $G = G\,(1,\,1,\,G_0,\,G_1)$, $k = 1$ miatt

$$0 \leqq (G_{n+1} - G_n)\,\varphi - G_n < 1,$$

vagy $G_{n+1} = G_{n-1} + G_n$ alapján

$$0 \leqq G_{n-1}\,\varphi - G_n < 1$$

alakra hozható. Ez azonban (felhasználva, hogy $\frac{1}{\psi} = -\varphi$)

$$G_{n-1}\varphi - G_n = \left(\frac{G_1-\psi G_0}{\varphi-\psi}\varphi^{n-1} - \frac{G_1-\varphi G_0}{\varphi-\psi}\psi^{n-1}\right)\varphi -$$

$$\left(\frac{G_1-\psi G_0}{\varphi-\psi}\varphi^{n} - \frac{G_1-\varphi G_0}{\varphi-\psi}\psi^{n}\right) = \frac{G_1-\varphi G_0}{\varphi-\psi}\psi^{n}\left(1-\frac{\varphi}{\psi}\right) = (G_1-\varphi G_0)\psi^n\varphi$$

alapján

$$0 \leqq (G_1-\varphi G_0)\psi^n < \frac{1}{\varphi} \tag{6}$$

alakban is felírható, mely $-1 < \psi < 0$ miatt végtelen sok n pozitív egész esetén teljesül, azaz a $G = G(1, 1, G_0, G_1)$ $(e > 0)$ sorozat elemeiből végtelen sok Wythoff-pár képezhető.

1. Következmény bezonyítása. (6) első egyenlőtlensége teljesül $G_1 - \varphi G_0 = (\varphi - \psi)\, b = \sqrt{5}\, b > 0$ esetén minden páros n ($\geqq 2$)-re, míg $G_1 - \varphi G_0 < 0$ esetén minden páratlan n ($\geqq 1$)-re.

$$G_n = a\varphi^n\left(1-\frac{b}{a}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n\right)$$

-ból következik, hogy $G_n > 0$ és $G_{n+1} > 0$ (n és $n+1$ párosítása különböző lévén), ha $\frac{b}{a}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n < 1$, mely

$$n > C_{01} = \frac{\log a - \log|b|}{\log|\psi| - \log\varphi} = \frac{\log|G_1-\psi G_0| - \log|G_1-\varphi G_0|}{\log|\psi| - \log\varphi}$$

esetén már igaz. Ugyancsak (6)-ból adódik, hogy az első egyenlőtlenséget kielégítő azonos paritású n-ekre teljesül a második egyenlőtlenség is, ha

$$n > C_{02} = \frac{\log\varphi + \log|G_1-\varphi G_0|}{|\log|\psi||}.$$

Az 1. következményben szereplő n_0 értékét C_{01} és C_{02} konstansok, és a paritási feltételek határozzák meg.

2. Következmény bizonyítása. Állításunk bizonyításához felhasználjuk J. N. Kapur [5] alábbi eredményét: $G = G(1, 1, G_0, G_1)$ sorozatból megalkotott $\{G_{j+kt}\}_{t=0}^{\infty}$ (j, k fix egészek) sorozat a $H = H(P, Q, H_0, H_1)$ másodrendű sorozatot alkotja, ahol $P = \varphi^k + \psi^k$, $Q = -\varphi^k\psi^k$, $H_0 = G_j$ és $H_1 = G_{j+k}$. A mi esetünkben — (3) szerint —

$$\{i_t\}_{t=0}^{\infty} = \{G_{n_0+2t+1} - G_{n_0+2t}\}_{t=0}^{\infty} = \{G_{n_0-1+2t}\}_{t=0}^{\infty},$$

azaz $j = n_0 - 1$, $k = 2$ és így $P = 3$, $Q = -1$, $H_0 = G_{n_0 - 1}$ és $H_1 = G_{n_0 + 1}$.
Példaként megadjuk a $G = G\,(1, 1, 1, 7)$ sorozat tagjaiból előállítható Wythoff-párokat. A sorozat tagjai:

$$\{G_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 7, 8, 15, 23, 38, 61, 99, 160, 259, \ldots\ldots\}$$

Könnyen kiszámítható, hogy jelen esetben $n_0 = 6$. Így az előzőek alapján a sorozatból alkotható Wythoff-párok a következők:

$$(G_6, G_7) = (61, 99) = (u_{38}, v_{38});\ i = G_7 - G_6 = 38$$

$$(G_8, G_9) = (160, 259) = (u_{99}, v_{99});\ i = G_9 - G_8 = 99$$

.

.

.

SUMMARY

WYTHOFF-PAIRS AND SECOND ORDER RECURRENCES

by Ferenc Mátyás

In this paper we deal with the connection between second order linear recurrences and Wythoff-pairs.

Let $G = G(A, B, G_0\ G_1) = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recurrence defined by integer constants A, B, G_0, G_1 and the recurrence

$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$ $(n > 1)$,

where $A\,B \neq 0$, $D = A^2 + 4B \neq 0$ and $|G_0| + |G_1| \neq 0$.

If α and β are the roots of the equation $x^2 - Ax - B = 0$, then we have

$$G_n = a\,\alpha^n - b\,\beta^n,$$

where

$$a = \frac{G_1 - \beta G_0}{\alpha - \beta} \qquad \text{and} \qquad b = \frac{G_1 - \alpha G_0}{\alpha - \beta}$$

Let us define the sequences $\{u_n\}_{n=1}$ and $\{v_n\}_{n=1}$ in the following manner:

$$u_1 := 1, \qquad v_1 := 2$$

and for $k > 1$

$$u_k := m,$$

where m is the smallest positive integer for which $u_i \neq m$, $v_i \neq m$ if $1 \leqq i < k$ and

$$v_k := u_k + k.$$

The pairs (u_1, v_1), $(u_2; v_2)$, ... are called Wythoff-pairs. We prove the following theorem:

Let $D > 0$. The equation

$$(G_n; G_{n+k}) = (u_i; v_i)$$

has an iinfanite number of solutions in integer n, k, i, iff $A=B=k=1$ and $a > 0$.

IRODALOM

1. G. E. Bergum, V. E. Hoggatt, Jr., Some extension of Wythoff-pairs sequences, The Fibonacci Quart, Vol. 18. No. 1. 1980. 28—32.
2. V. E. Hoggatt, Jr., A. A. Hillmann, A property of Wythoff pairs, The Fibonacci Quart, Vol. 16., No. 5 (october 1978), 472.
3. V. E. Hoggatt, Jr., M. Bicknell — Johnson, R. Sarsfield, A Generalization of Wythoff's Game, The Fibonacci Quart., Vol. 18. No. 3. 1979, 198—211.
4. A. F. Horadam, Wythoff Pairs, The Fibonacci Quarterly, Vol. 16. No. 2. (april 1978), 147—151.
5. J. N. Kapur, Derived Fibonacci sequences, Acta Ciencia Indica, 4 (1978), 276—282.
6. I. Niven, H. S. Zuckermann, Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978.
7. W. W. Rouse Ball, Mathematical Recreations on Sssays, New York, The Macmillan co., 1962. 36—40.
8. R. Silber, A. Fibonacci Property of Wythoff Pairs, The Fibonacci Quart, Vol. 14. No. 4 (1976). 380—384.
9. R. Silber, Wythoff's Nim and Fibonacci Representations, Tha Fibonacci Quart, Vol. 15. No. 1 (1977). 85—88.