

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ III. (A TETSZŐLEGES MAGASRENDŰ CIKLUSOKRÓL)

SZEPESSY BÁLINT

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ ($a < b$) zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek.

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos, a kezdő és a végpontban jobbról illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x) = \text{constans}$ teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvényének nevezzük az adott intervallumon. Az $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x))$, $\dots$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $\dots$ függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, $\dots$, n -edik (n -edrendű), $\dots$ iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az $f_n(x)$ ($n = 2, 3, \dots$) függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal*. Teljesülnek az $f_{n+m}(x) = f_n(f_m(x)) = f_m(f_n(x))$ azonosságok.

Ha $[c, d]$ ($c < d$) az $[a, b]$ szakasz egy részzszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele**, $[c, d]_1$. A $[c, d]$ szakasz n -edik iteráltján a $[c, d]_n = / [c, d]_{n-1} /_1$ intervallumot értjük.

Ha $f(c) = c$, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c) \neq c$ $n = 1, 2, \dots, r-1$ esetén, de $f_r(c) = c$, akkor a c pont az $f(x)$ függvény r -ed rendű fixpontja. Ekkor mint ismeretes a $c_1, c_2, \dots, c_{r-1}, c_r$ fixpontok egy r -edrendű ciklust alkotnak.

Már vizsgáltuk azt a kérdést, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén nem lehet a fixpontok (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni ([9]). Behizonyítottuk:

Ha az $[a, b]$ szakaszban $f(x)$ az 1., 2., 3 feltételeknek eleget tesz, és van két olyan diszjunkt részzszakasz, amelyeket a függvény az egész zárt $[a, b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus.

Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek bármilyen adott rendű ciklus létezéséhez. Ezt igazolja már a [9] második tétele, továbbá az ennél egyszerűbb tételek a következő fejezetben.

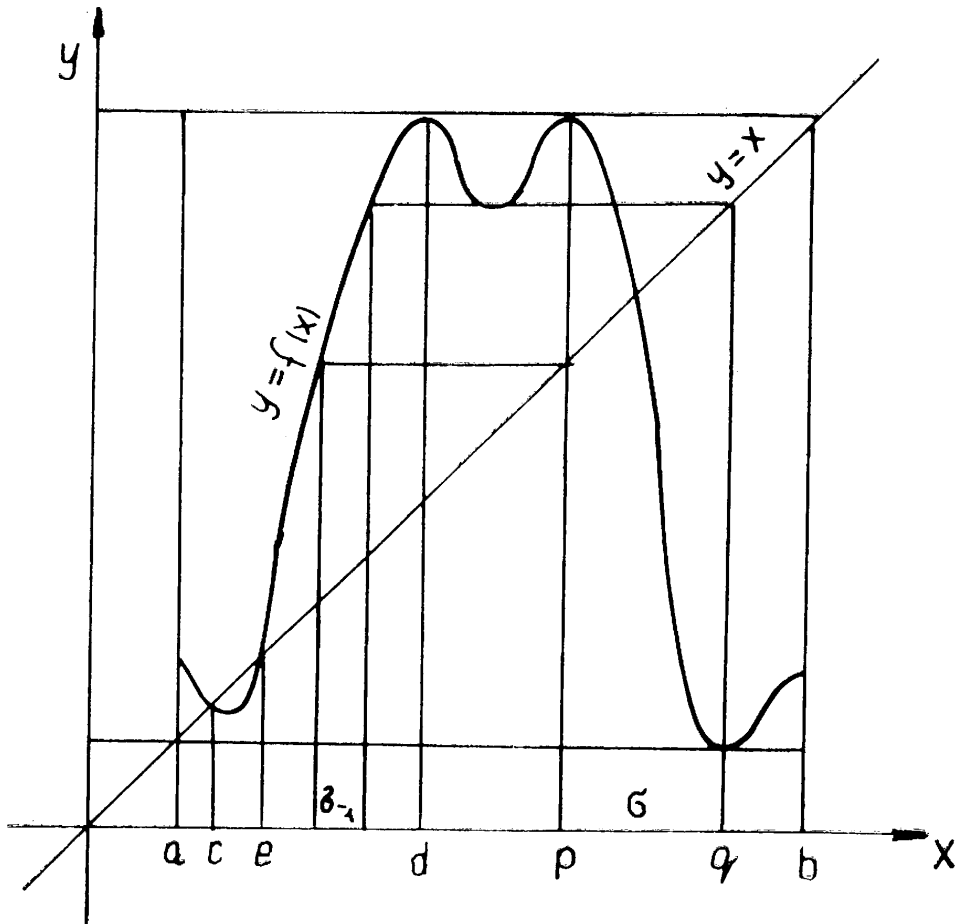
* Ezt a közvetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval egyszerűen bebizonyíthatjuk.

** Nyilvánvaló, hogy $[c, d]_1 = [\min f(x), \max f(x)]$, ha $c \leq x \leq d$.

2. Tetszőleges magasrendű ciklusokról

1. tétel. Legyen $a \leq c < d < b$ és $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény amelyre $f(c) = c$, $f(d) = b$, továbbá van a $[d, b]$ szakasznak olyan $[p, q] = \sigma$ részzakasza, amelyet $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszra képez le. Ekkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n -edrendű fixpontja.

BIZONYÍTÁS. $f(x)$ folytonossága következtében van a $[c, d]$ szakaszban olyan $e (\cong c)$ elsőrendű fixpont, amelytől jobbra $f(x) > x$, ha csak $x \leq d$; azaz $f(x)$ az $[e, d]$ szakaszban minden függvényértéket felvesz e és d között (1. ábra).



I. fibra

A tétel állítása egyszerűen nyerhető, ha igaz az

1.1 segéd-tétel. A tétel föltevéséi mellett van bármely n szám esetén a σ szakasznak n -cdrendű inverz-interált szakasza az $(e, d]$ szakaszban. Az így keletkező σ_n sorozat elemei közös belső pontot nem tartalmazó szakaszok.

A SEGÉDTÉTEL BIZONYÍTÁSA. Először azt látjuk be, hogy ha $[u, v] = \varrho$ tetszőleges részszakasza a $z[e, b]$ szakasznak, akkor mindig van $\varrho_{-1} \subset [e, d]$ szakasz, amelyre $(\varrho_{-1})_1 = \varrho$.

Mivel az $[e, d]$ szakaszban $f(x)$ minden értéket felvesz e és b között és $e \leq u < v \leq b$, ezért mind az u , mind v pontnak van az $[e, d]$ szakaszban (legalább egy-egy) inverz-iterált pontja. Tekintsük a v pont $[e, d]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legkisebb és jelöljük ezt v_{-1} -gyel. Tehát $v_{-1} = \min_{e < x \leq v} \{x\}$, $f(x) = v$. Az u pontnak az $[e, d]$ szakaszbeli inverziterált pontjai közül a v_{-1} -től balra, a hozzá legközelebb esőt választva legyen ennek abszcisszája u_{-1} ; azaz $u_{-1} = \max_{e \leq x < v} \{x\}$, $f(x) = u$.

Könnyű megmutatni, hogy $\varrho_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}]$ szakasz első iteráltja az $[u, v]$ $= \varrho$ szakasz. Ismert ugyanis, hogy az $[a, b]$ valamely zárt ε részszakaszának első iteráltja a $[\min f(x), \max f(x)]$ szakasz. Márpedig $\min f(x) = f(u_{-1}) = u$; hiszen ha a ϱ_{-1} szakasz belsejében lenne olyan p pont, hogy $f(p) \leq u$ teljesül, akkor – az $f(x)$ folytonossága következtében – lenne olyan r pont is amelyre $f(r) = u$ teljesül és $p \leq r < v_{-1}$, ellentétben azzal hogy $u_{-1} = \max_{e \leq x < v} \{x\}$, $f(x) = u$. Hasonlóképpen látható be az is hogy $\max f(x) = f(v_{-1}) = v$. Tehát $(\varrho_{-1})_1 = [u_{-1}, v_{-1}]_1 = [u, v] = \varrho$ teljesül. $x \in \varrho_{-1}$

Ennek megfelelően a σ szakaszból kiindulva képezhetjük a σ_{-1} szakaszt, majd eljárásunkat folytatva a σ_{-1} szakaszból kiindulva a σ_{-2} szakaszt, ...; s így előáll a σ_{-n} ($n = 1, 2, \dots$) végtelen szakaszsorozat, amelyre nézve $(\varrho_{-n})_1 = \sigma_{-(n-1)}$.

Még azt kell megmutatni, hogy bármely két ilyen inverz-iterált szakasznak nincs közös belső pontja. Ezt indirekt bizonyítással igazoljuk. Tegyük fel, hogy σ_{-n} és σ_{-n-k} (k pozitív egész) olyan szakaszpár, amelynek mindkét szakaszában közös belső pontok vannak; akkor e pontok első iteráltjai a σ_{-n+1} és a σ_{-n-k+1} szakaszok közös pontjai lesznek, és folytatva eljárásunkat azt nyerjük, hogy a $(\sigma_{-n})_n = \sigma$ és a $\sigma_{-n-k+n} = \sigma_{-k}$ is közös belső pontú szakaszok. Ez azonban lehetetlen, mert σ -nak nincs d -től balra eső pontja, σ_{-k} -nak pedig minden belső pontja d -től balra van.

Ezzel a segédtételt beh bizonyítottuk.

Ezután a tétel bizonyítását a következőképpen folytathatjuk. A segédtétel szerint kialakított σ_{-n} ($n = 1, 2, 3, \dots$) szakaszsorozatra nézve $(\sigma_{-n})_n = \sigma$ és így $(\sigma_{-n})_{n+1} = \sigma_1 = [a, b]$. Az $f_{n+1}(x)$ függvény tehát a σ_{-n} szakaszt az $[a, b]$ szakaszra képezi le, amiből következik, hogy vannak olyan $s, t \in \sigma_{-n}$ pontok amelyekben $f_{n+1}(x)$ rendre az a és a b értéket veszi fel; $f_{n+1}(s) = a$, $f_{n+1}(t) = b$. E két pont által határolt σ_{-n} -ben fekvő $[\min\{s, t\}; \max\{s, t\}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x) - x$ (folytonos) függvény minden értéket fölvesz, tehát az $f_{n+1}(s) - s = a - s$ és az $f_{n+1}(t) - t = b - t$ értékek között. Mivel ezek különböző előjelűek, azért van az $f_{n+1}(x) - x$ függvénynek σ_{-n} -ben 0-helye; azaz van olyan r pont, amelyre $f_{n+1}(r) = r$ ($r \in \sigma_{-n}$) teljesül. Ez a pont tehát legfeljebb $(n+1)$ -edrendű fixpont. Hogy éppen $n+1$ a rendszáma az abból következik, hogy az

$$r, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$$

$$\text{pontok rendre a} \quad \sigma_{-n}, \quad \sigma_{-n+1} \quad \sigma_{-n+2}, \quad \dots, \sigma_{-1}, \sigma$$

szakaszok belső pontjai, s ezek közös belső pont nélküli szakaszok. Így az $r, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ sorozat pontjai között nincsenek egybeesők.

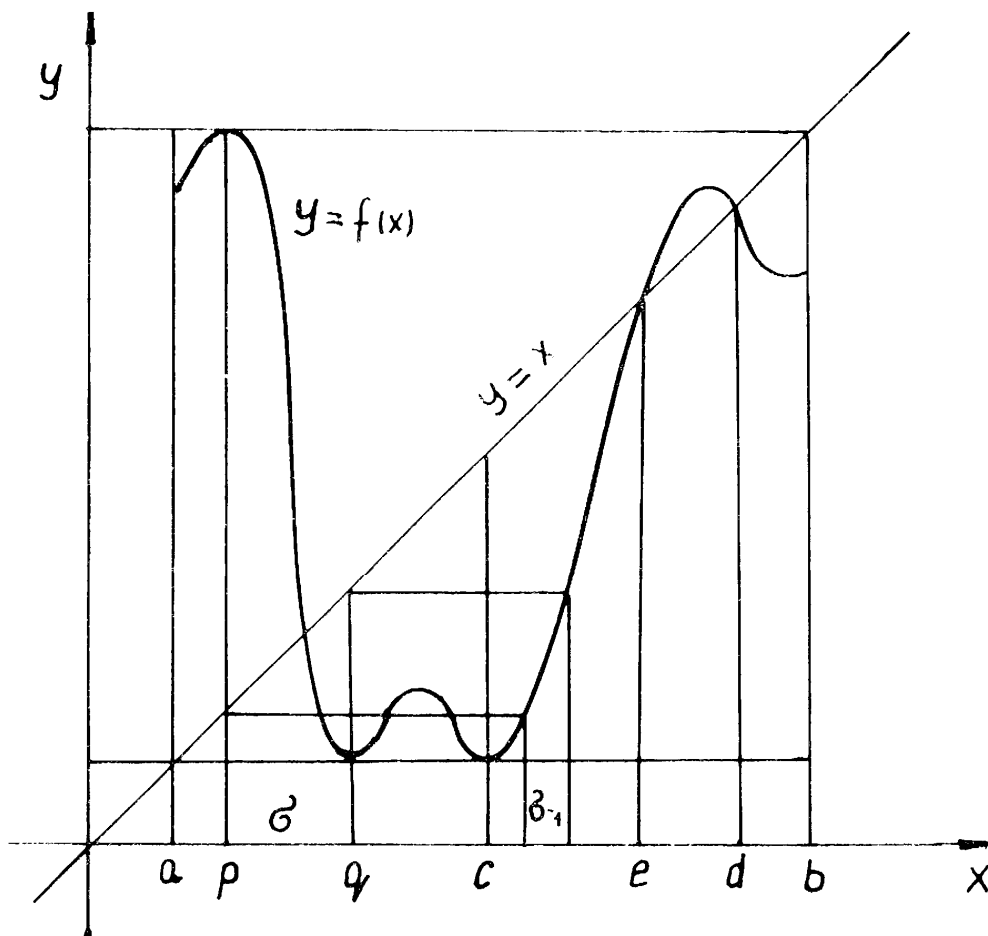
Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés: $a < c$ vagy $q < b$ esetén a tétel érvényessége nem függ az $f(x)$ függvény $[a, c]$ vagy $[q, b]$ szakaszbeli menetétől. Ugyancsak nem befolyásolja a tétel érvényességét $d < p$ esetben $f(x)$ $(d, p]$ szakaszbeli viselkedése. Lényegében kihasználatlanul maradt a bizonyítás során az alapfüggvénynek az említett szakaszokban való folytonossága is.

E tételéhez hasonló bizonyítással igazolható a következő

2. tétel. Legyen $a < c < d \leq b$ és $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(c) = a$, $f(d) = d$ teljesül, továbbá az $[a, c]$ szakaszban van olyan $[p, q] = \sigma$ részsakasz, amelyet $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszra képez le. Ekkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n -edrendű fixpontja.

BIZONYÍTÁS. Az $f(x)$ folytonossága által most a $[c, d]$ szakaszban van olyan e ($\leq d$) elsőrendű fixpont, amelytől balra $f(x) < x$, ha csak $x \geq c$. Tehát $f(x)$ a $[c, e]$ szakaszban minden értéket felvesz a c és e között (2. ábra).



2. ábra

A tétel bizonyítását most megszakítjuk és megmutatjuk, hogy igaz az 1.1 segédtételhez analóg 2.1 *segédtétel*. A tétel feltevéseiből következik, hogy bármely (természetes) n szám esetén van a σ szakasznak n -edrendű inverz-iterált szakasza a $[c, e]$ szakaszban. Az így előállítható σ_{-n} sorozat elemei közös belső pontot nem tartalmazó szakaszok.

A segédtétel bizonyítása: Most is először azt látjuk be, hogy ha $[u, v] = \varrho$ az $[a, e]$ szakasz tetszőleges részzszakasza, akkor mindig van $\varrho_{-1} \subset [c, e]$ amelyre $(\varrho_{-1})_1 = \varrho$.

Mivel $a \leq u < v \leq e$ és $f(x)$ a $[c, e]$ szakaszban minden értéket felvesz a és e között, ezért mind az u , mind a v pontoknak van a $[c, e]$ szakaszban inverz-iterált pontja.

Tekintsük az u pont $[c, e]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt amelynek abszcisszája a legnagyobb és jelöljük ezt u_{-1} -gyel; $u_{-1} = \max_{c \leq x < e} \{x\}$, $f(x) = u$.

A v pontnak az $[c, e]$ szakaszbeli inverziterált pontjai közül az u_{-1} -től jobbra a hozzá legközelebb esőt választva jelöljük ennek abszcisszáját v_{-1} -gyel; $v_{-1} = \min_{u_{-1} < x \leq e} \{x\}$, $f(x) = v$. (2. ábra). Legyen $[u_{-1}, v_{-1}] = \varrho_{-1}$.

Éppúgy bizonyítható mint az 1.1 segédtételnél, hogy $(\varrho_{-1})_1 = \varrho$.

Most már a σ szakaszból kiindulva ($\sigma \supseteq [a, c]$) képezhetjük — az előzőek alapján — a σ_{-1} , majd ebből kiindulva a σ_{-2} szakaszt, ...; az így előáll σ_{-n} ($n = 1, 2, \dots$) szakaszsorozatra $(\sigma_{-n})_1 = \sigma_{-(n-1)}$.

Mint az 1.1 segédtételnél most is indirekt bizonyítással igazolható, hogy bármely két ilyen inverz-iterált szakasznak nincs közös belső pontja. Éppúgy megmutatható, mint 1.1-nél hogy ha σ_{-n} és σ_{-n-k} állításunkkal ellentétben olyan szakaszpár amelynek mindkét szakaszában vannak közös belső pontok, akkor σ és σ_{-k} is közös belső pontú szakaszok. Ez esetünkben azért lehetetlen, mert σ -nak nincs c -től jobbra eső, σ_{-k} -nak pedig nincs c -től balra eső belső pontja. Ezzel 2.1 segédtételt beh bizonyítottuk.

Ezután a 2. tétel bizonyítása szó szerint úgy folytatható és fejezhető be, mint az 1. tétel esetén.

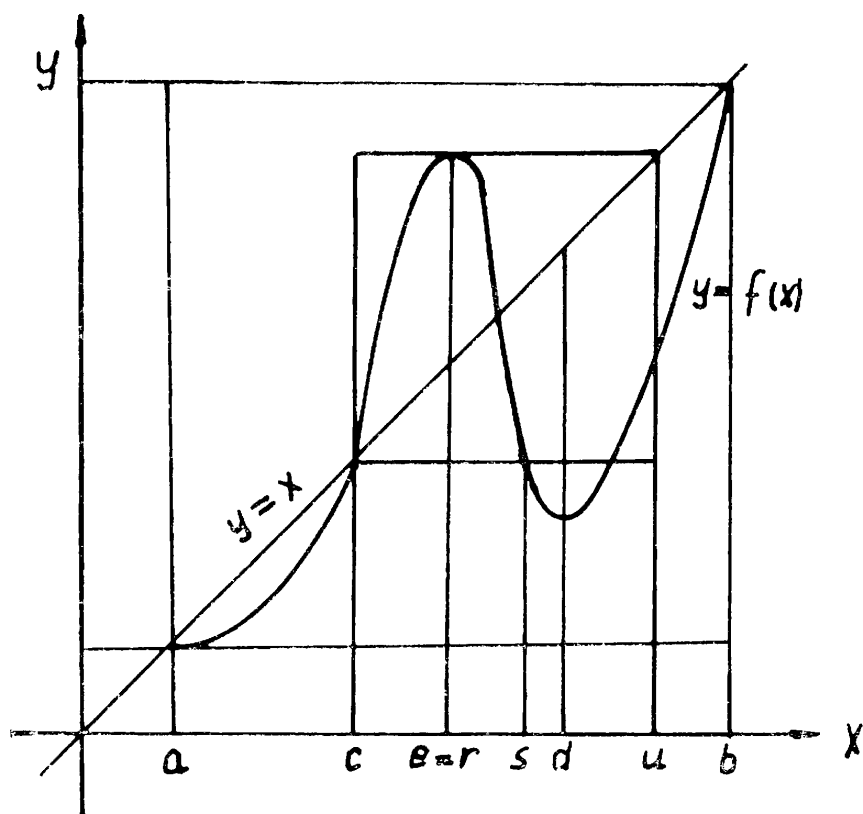
Megjegyzés: a $a < p$ vagy $d < b$ esetén a tétel érvényessége nem függ az $f(x)$ függvény $[a, p]$ vagy $[d, b]$ szakaszbeli menetétől, $q < c$ esetén a $[q, c]$ szakaszbeli viselkedésétől sem. A bizonyításból kitűnik, hogy a tétel akkor is érvényes, ha $f(x)$ ezekben a szakaszokban nem is folytonos.

Ezeknek a tételeknek a segítségével bizonyítható a következő két tétel:

3. tétel. Legyen $a \leq c < d < b$. Ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre az $f(c) = c$, $a \leq f(d) \leq c$ és $\max_{x \in [c, d]} f(x) \geq d$ relációk teljesülnek, akkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n -edrendű fixpontja.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\max_{x \in [c, d]} f(x) = u$ és e egy olyan pont a $[c, d]$ szakaszban, amelyre $f(e) = u$ ($\geq d$) teljesül (3. ábra)

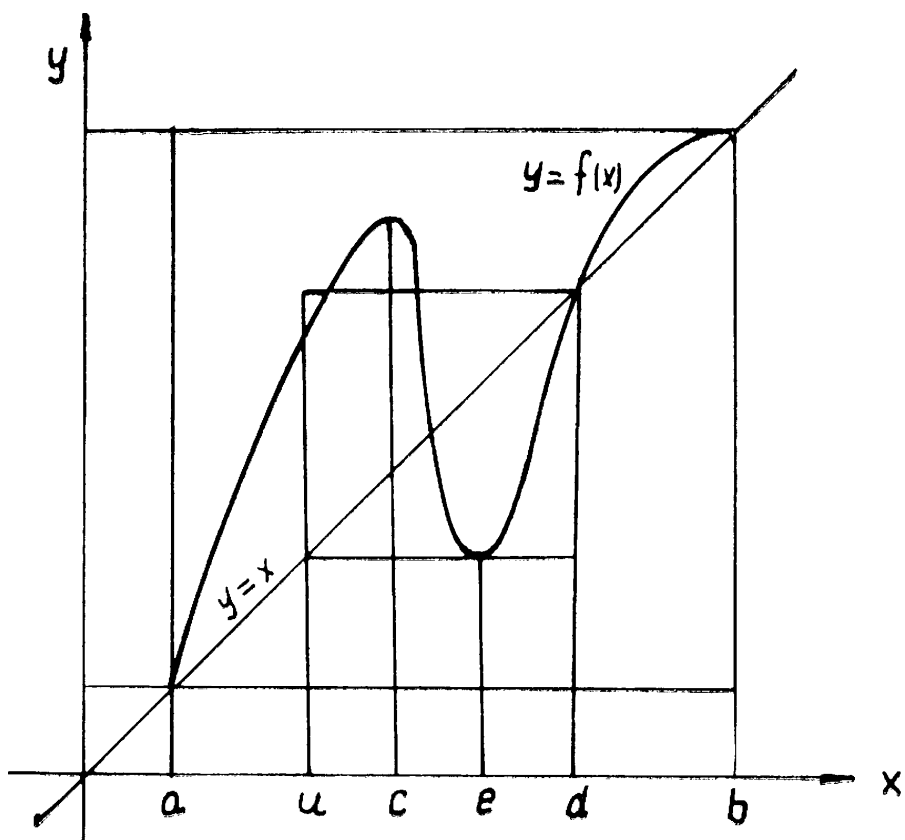
Mivel a $[c, d]$ szakaszban $f(c) = c$, $f(e) = u$ és az $[e, u]$ szakasznak a feltevések értelmében van olyan $[r, s]$ részzszakasza amelyet $f(x)$ az egész $[c, u]$ szakaszra képez le, ezért $f(x)$ $[a, c]$ és $[s, b]$ szakaszokban való menetétől függetlenül — az 1. tétel és a bizonyítása után tett megjegyzés értelmében — bármely természetes n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n -edrendű fixpontja a $[c, d]$ szakaszban.



3. ábra

Hasonlóan bizonyítható az előző tételhez analóg

4. tétel. Legyen $a \leq c < d \leq b$ és $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $d \leq f(c) \leq b$, $f(d) = d$ és $\min_{x \in [c, d]} f(x) \leq c$ teljesül. Ekkor bármely n természetes szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n -edrendű fixpontja. (4. ábra)



4. ábra

I R O D A L O M

- [1] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I. Publ. Math. (Debrecen) 7 (1960), 16 – 40.
- [2] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II. Publ. Math. (Debrecen) 13 (1966), 169 – 172.
- [3] B. Barna, Berichtigung zur Arbeit „Über die Iteration reeller Funktionen II.“ Publ. Math. (Debrecen) 20 (1973), 281 – 282.
- [4] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III. Publ. Math. (Debrecen) 22 (1975), 269 – 278.
- [5] L. Berg, (Rostock) Über irreguläre Iterations-folgen Publ. Math. (Debrecen) 17 (1970), 112 – 115.
- [6] A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Graw-Hill Inc.), New York, 1965
- [7] A. Björck-G. Dahlquist, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) München – Wien, 1972
- [8] J. Stoer, Einführung in die numerische Mathematik I. (Springer) Berlin – Heidelberg – New York, 1972
- [9] Szepessy B. Megjegyzések a valós függvények iterálásához I. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetek XV. (Eger, 1979), 395 – 405.
- [10] Szepessy B. Megjegyzések a valós függvények iterálásához II. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetek XVI. (Eger, 1982), 557 – 566.

Remarks on iteration of real functions III.

BY BÁLINT SZEPESY

(Summary)

Let $f(x)$ be a real valued function defined on the closed interval $[a, b]$. If $f(x)$ satisfies the conditions

- (i) $f(x)$ is a continuous function at every inside points of the interval $[a, b]$; furthermore $f(x)$ is continuous on the right and on the left at point a and b respectively;
- (ii) $f(x)$ maps the interval $[a, b]$ onto itself;
- (iii) there is no subinterval of the interval $[a, b]$ where $f(x)$ is a constant function;

then $f(x)$ is called *iterational basic function*. For $i = 0, 1, 2, \dots$ the function $f_i(x)$, defined by $f_0(x) = x$ and $f_i(x) = f(f_{i-1}(x))$ for $i > 0$, is called i^{th} iterated function of $f(x)$. We say a real number c is a *fix point* of $f(x)$ of order one if $f(c) = c$, furthermore c is a *fix point* of order r if $f_r(c) = c$ but $f_n(c) \neq c$ for $n = 1, 2, \dots, r-1$. If c is a *fix point* of $f(x)$ of order r , then the numbers $f(c) = c_1, f(c_1) = c_2, \dots, f(c_{r-1}) = c$ are also *fix points* of order r and the *fix points*, $c_1, c_2, \dots, c$ give a *cycle* of order r .

In [10] we looked for conditions for function $f(x)$ if $f(x)$ has no *fix point* of order greater than two. In [9] we studied *iterational basic functions* for which the orders of the *cycles* have not upper bound. We have proved: If $f(x)$ is a function satisfying the conditions (i), (ii), (iii) and there are two subinterval of $[a, b]$ without common points which are mapped onto the interval $[a, b]$ by $f(x)$, then there are *cycles* of arbitrary order.

In this paper we give some other sufficient conditions for $f(x)$ having *fix points* of arbitrary order. Among others the following theorem is proved. Let a, b, c and d real numbers with conditions $a \leq c < d < b$ and let $f(x)$ be an *iterational basic function* defined on the interval $[a, b]$. If $f(c) = c, f(d) = b$ and $[a, b]$ has a subinterval which is mapped by $f(x)$ onto the interval $[a, b]$, then $f(x)$ has *fix points* of order n for any natural number n .