PELL EGYENLETEK MEGOLDÁSA LINEÁRIS REKURZÍV SOROZATOK SEGÍTSÉGÉVEL

KISS PÉTER

Legyenek A, B, G_0, G_1 rögzített egész számok, melyekre $AB \neq 0$ és G_0, G_1 nem mindkettője zérus. Az egész számok $G_0, G_1, G_2, \ldots$ végtelen sorozatát, ahol

$$G_n = A \cdot G_{n-1} - B \cdot G_{n-2}$$

ha $n > 1$, másodrendű lineáris rekurzív sorozatnak nevezzük és G-vel illetve $G(A, B, G_0, G_1)$-el jelöljük. A következőkben hasonlóan definiáljuk és jelöljük a különböző adatokkal megadott másodrendű lineáris rekurzív sorozatokat..

Egy $G(A, B, G_0, G_1)$ sorozat asszociált sorozatának nevezzük azt a $H = H(A, B, H_0, H_1)$ sorozatot, melyben

$$H_0 = 2G_1 - AG_0$$

és

$$H_1 = AG_1 - BG_0$$

Az általános G sorozat speciális esete az $F = F(1, -1, 0,1)$ Fibonacci sorozat, az $L = L(1, -1,2,1)$ Lucas sorozat mely a Fibonacci sorozat asszociált sorozata, és a $P = P(2, -1, 0,1)$ Pell sorozat.

Az

$$x^2 - D \cdot y^2 = N$$

alakú Pell egyenletek és a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok között több kapcsolat ismert. Néhány jellemző eredményt felsorolunk. V. E. Hoggatt [4] bizonyította, hogy az $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ egyenlet egyedüli megoldásai $x = \pm L_n$, $y = \pm F_n$, ahol L_n illetve F_n a Lucas illetve Fibonacci sorozat n-edik tagja. E. M. Cohn [3], I. Adler [1, 2] és V. Thébault [7] az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet és a másodrendű rekurzív sorozatok illetve a Pell sorozat között találtak hasonló kapcsolatokat. M. J. de Leon [6] bizonyította, hogy ha x_0 y_0 egy alapmegoldása az $x^2 - 2y^2 = N$ egyenletnek, akkor azon x_n, y_n számpár is megoldás, melyre $x_n + y_n = (x_0 + y_0)P_{2n+1} + y_0 P_{2n}$ és $y_n = (x_0 + y_0)P_{2n} + y_0 P_{2n-1}$, ahol P_i a Pell sorozat i-edik tagja.

Várnai Ferenccel közösen [5]-ben bizonyítottuk, hogy az $x^2 - 2y^2 = N$ egyenlet összes megoldása megadható véges számú $P(2, -1, P_0, P_1)$ sorozat elemeiből alkotott

$$(x; y) = (\pm(P_{2n} + P_{2n+1}); \pm P_{2n+1})$$

párok által. Továbbá ezen sorozatokra $N > 0$ esetén $0 \leqq P_1 < 2\sqrt{N}$, $N < 0$ esetén pedig $0 < P_1 < \sqrt{-9N/2}$. Megmutatjuk, hogy ez az eredmény általánosabban is igaz:

1. TÉTEL. *Legyenek* $N \neq 0$ *és* $a > 0$ *egész számok. Ha az*

$$x^2 - (a^2+1)y^2 = N \tag{1}$$

egyenletnek van x, y egész megoldása, akkor az összes megoldást véges számú $G(2a, -1, G_0, G_1)$ *sorozat tagjaiból képezett*

$$(x; y) = (\pm (G_{2n} + aG_{2n+1}); \pm G_{2n+1})$$

párok szolgáltatják, és ezen G sorozatokra $N > 0$ *esetén* $0 \leqq G_1 < 2a\sqrt{N}$, $N < 0$ *esetén pedig* $0 < G_1 < (2a^2+1)\sqrt{-N/(a^2+1)}$.

V. E. Hoggatt [4] fentebb idézett eredménye általánosabb formában is igaz. A következő tételeket bizonyítjuk.

2. TÉTEL. *Legyenek a és N egész számok* $a > 2$ *és* $N \neq 0$ *feltétellel. Ha az*

$$x^2 - (a^2-4)y^2 = 4N$$

egyenletenk van x, y egész megoldása, akkor az összes megoldást véges számú $G(a, 1, G_0, G_1)$ *sorozat segítségével képzett*

$$(x; y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n}), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

számpárok szolgáltatják, ahol H a G sorozat asszociált sorozata. Továbbá ezen G sorozatokra $N > 0$ *esetén* $0 \leqq G_1 < \sqrt{N}$ *és* $N < 0$ *esetén*

$$0 \neq G_1 < a\sqrt{-N/(a^2-4)}.$$

3. TÉTEL. *Legyenek a és N egész számok* $a > 0$ *és* $N \neq 0$ *feltétellel. Ha az*

$$x^2 - (a^2+4)y^2 = 4N$$

egyenletnek van x, y egész megoldása, akkor az összes megoldást véges számú $G(a, -1, G_0, G_1)$ *sorozat segítségével képzett*

$$(x; y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n}), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

számpárok szolgáltatják, ahol H a G sorozat asszociált sorozata. Továbbá ezen G sorozatokra $N > 0$ *esetén* $0 \leqq G_0 < a\sqrt{N}$ *és* $N < 0$ *esetén pedig* $0 \leqq G_0 < (a^2+2)\sqrt{-N/(a^2+4)}$.

4. TÉTEL. *Ha az*

$$(x; y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n}), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

alakú számpárok az

$$x^2-(a^2+4)y^2 = 4N$$

egyenletnek megoldásai, akkor az

$$(x; y) = (\pm H_{2n+1}; \pm G_{2n+1}), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

alakú párok megoldásai az

$$x^2-(a^2+4)y^2 = -4N$$

egyenletnek.

Mielőtt rátérünk a tételek bizonyítására, megemlítjük a lineáris rekurzív sorozatok néhány ismert tulajdonságát és bizonyítunk egy segédtételt.

Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, továbbá jelölje az

$$f(x) = x^2-Ax+B$$

polinom két gyökét

$$\alpha = \frac{A+\sqrt{D}}{2} \text{ és } \beta = \frac{A-\sqrt{D}}{2},$$

ahol $D = A^2-4B$. Ha $D \neq 0$ (vagyis ha $\alpha \neq \beta$), akkor mint jól ismert, a G sorozat tagjai

$$G_n = \frac{b\alpha^n-c\beta^n}{\alpha-\beta}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

alakban is megadhatók, ahol

$$b = G_1-G_0\beta \text{ és } c = G_1-G_0\alpha. \tag{3}$$

Ennek alapján, felhasználva az asszociált sorozat fentebbi definícióját, könnyen belátható, hogy a G sorozat H asszociált sorozatának tagjai

$$H_n = b\alpha^n+c\beta^n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

alakban írhatók fel.

LEMMA. *Jelölje* $D = A^2 - 4B$ *a G sorozat* $f(x)$ *karakterisztikus polinomjának a diszkriminánsát. Ha* $D \neq 0$, *akkor a G sorozatnak és a H asszociált sorozatának tagjaira minden n természetes szám esetén fennáll a*

$$H_n^2 - D \cdot G_n^2 = 4bc \cdot B^n$$

egyenlőség, ahol b és c a (3)-ban definiált állandók.

BIZONYÍTÁS. Mivel $D = (\alpha - \beta)^2$, ezért (2) és (4) alapján

$$H_n^2 - D \cdot G_n^2 = (b\alpha^n + c\beta^n)^2 - (b\alpha^n - c\beta^n)^2 = 4bc \cdot (\alpha\beta)^n.$$

Ebből már következik az állítás, mivel $\alpha\beta = B$.
Rátérünk a tételek bizonyítására.

1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Ha egy $G = G(A, -1, G_0, G_1)$ sorozatban

$$G_0^2 + AG_0G_1 - G_1^2 = k,$$

akkor minden $n \geqq 0$ esetén

$$G_n^2 + AG_nG_{n+1} - G_{n+1}^2 = (-1)^n \cdot k. \tag{5}$$

Ugyanis

$$G_{n+1}^2 + AG_{n+1}G_{n+2} - G_{n+2}^2 = G_{n+1}^2 + AG_{n+1}(AG_{n+1} + G_n) - \\ -(AG_{n+1} + G_n)^2 = -(G_n^2 + AG_nG_{n+1} - G_{n+1}^2)$$

és $n = 0$ esetén (5) nyilvánvaló.
Ha $A = 2a$, akkor (5) alapján

$$(G_n + aG_{n+1})^2 - (a^2 + 1)G_{n+1}^2 = (-1)^n k. \tag{6}$$

Tegyük fel, hogy az (1) egyenletnek x, y egészek megoldásai, továbbá feltehető, hogy $x, y \geqq 0$. Definiáljuk egy G sorozatot az $A = 2a$, $B = -1$ konstansokkal és valamely i természetes számmal meghatározott

$$G_{2i+1} = y \quad \text{és} \quad G_{2i} + aG_{2i+1} = x$$

illetve

$$G_{2i} = x - ay \quad \text{és} \quad G_{2i+1} = y$$

szomszédos tagokkal. Az így definiált sorozat esetén $k = N$. Ez a G sorozat minden egész indexre értelmezve van, mert $B = -1$ miatt két egymást követő G_j, G_{j+1} tag a sorozat definíciója miatt egyértelműen meghatározza a G_{j-1} és G_{j+2} tagokat, melyek egészek, ha G_j, G_{j+1} egészek. Így meghatározhatjuk a i indexet úgy, hogy G_1 a páratlan indexű tagok között a legkisebb nem negatív értékű legyen. Ekkor (6) miatt minden

$$(x; y) = (G_{2n} + aG_{2n+1}; G_{2n+1})$$

számpár megoldása (1)-nek.

Meg kell még mutatni, hogy a hasonló tulajdonságú G sorozatok száma véges.

Legyen először $N > 0$. Ha $x_1, y_1 > 0$ egészek megoldásai az (1) egyenletnek, akkor az előzőekhez hasonlóan generált G sorozat két szomszédos tagja

$$G_{2i} = x_1 - ay_1$$

illetve

$$G_{2i+1} = y_1.$$

Ekkor a sorozat definíciója alapján

$$G_{2i-1} = G_{2i+1} - 2aG_{2i} = (2a^2+1)y_1 - 2ax_1$$

és

$$G_{2i-2} = G_{2i} - 2aG_{2i-1} = (4a^2+1)x_1 - (4a^3+3a)y_1,$$

továbbá (6) következtében

$$x_2 = G_{2i-2} + aG_{2i-1} = (2a^2+1)x_1 - (2a^3+2a)y_1$$

és

$$y_1 = G_{2i-1} = (2a^2+1)y_1 - 2ax_1$$

szintén kielégíti az (1) egyenletet. De ha $x_1, y_1 > 0$, akkor

$$x_1 = \sqrt{(a^2+1)y_1^2 + N}$$

és

$$y_1 = \sqrt{(x_1^2 - N)/(a^2+1)},$$

továbbá

$$y_2 = (2a^2+1)y_1 - 2ax_1 = (2a^2+1)y_1 - 2a\sqrt{(a^2+1)y_1^2+N} <$$
$$< (2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1})y_1 < y_1,$$

valamint

$$x_2 = (2a^2+1)x_1 - (2a^3+2a)\sqrt{(x_1^2-N)/(a^2+1)} =$$
$$= (2a^2+1)x_1 - \sqrt{4a^2(a^2+1)(x_1^2-N)} > 0$$

és könnyű belátni, hogy

$$y_2 = (2a^2+1)y_1 - 2a\sqrt{(a^2+1)y_1^2+N} \geqq 0,$$

ha $y_1 \geqq 2a\sqrt{N}$. Így, ismételve az eljárást, olyan $y_1, y_2, y_3, \ldots$ és $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sorozatot kapunk, melyek tagjaira $y_{i+1} < y_i$ és $x_{i+1}, y_{i+1} \geqq 0$, ha $y_i \geqq 2a\sqrt{N}$. Ezért van olyan j index, melyre $0 \leqq y_j < 2a\sqrt{N}$ és így a G sorozat generálható $G_0 = x_j - ay_j$, $G_1 = y_j$ kezdő elemekkel, melyekre $0 \leqq G_1 < 2a\sqrt{N}$. Az ilyen G sorozatok száma nyilván véges.

Tehát az állítás $N > 0$ esetben igaz.

Legyen most $N < 0$. Ha $x_1, y_1 > 0$ megoldásai az (1) egyenletnek, akkor (mint az előzőekben)

$$x_2 = (2a^2+1)x_1 - (2a^3+2a)y_1,$$
$$y_2 = (2a^2+1)y_1 - 2ax_1$$

is megoldás. Folytatva az eljárást, megmutatjuk, hogy $x_{i+1} \geqq 0$ és $0 < y_{i+1} < y_i$ mindaddig, míg $y_i \geqq (2a^2+1)\sqrt{-N/(a^2+1)}$. Ha ugyanis $y_i \geqq (2a^2+1)\sqrt{-N/(a^2+1)}$, $x_i \geqq 0$ és $x_i^2-(a^2+1)y_i^2 = N$, akkor

$$x_i = \sqrt{(a^2+1)y_i^2+N} \geqq 2a\sqrt{-(a^2+1)N},$$

amiből pedig

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (2a^2+1)x_i - (2a^3+2a)y_i = \\ &= (2a^2+1)x_i - 2a(a^2+1)\sqrt{(x_i^2-N)/(a^2+1)} \geqq 0 \end{aligned}$$

következik. Továbbá $N < 0$ miatt

$$y_{i+1} = (2a^2+1)y_i - 2ax_i = (2a^2+1)y_i - 2a\sqrt{(a^2+1)y_i^2+N} > 0,$$

és $y_i \geqq (2a^2+1)\sqrt{-N/(a^2+1)} > \sqrt{-N}$ alapján pedig

$$y_{i+1} = (2a^2+1)y_i - 2a\sqrt{(a^2+1)y_i^2+N} < y_i$$

adódik.

Tehát $N < 0$ esetén minden megoldás megadható olyan $G(2a, -1, G_0, G_1)$ sorozatok segítségével, melyekre $x = G_0 + aG_1$, $y = G_1$ megoldásai az (1) egyenletnek és $0 < G_1 < (2a^2+1)\sqrt{-N/(a^2+1)}$.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Elegendő az egyenlet nem negatív megoldásait keresni, hiszen ha $(x; y)$ egy megoldás akkor $(\pm x; \pm y)$ is az. Legyenek x és y nem negatív egész számok megoldásai az

(7) $$x^2-(a^2-4)y^2 = 4N$$

egyenletnek. Definiáljuk egy G sorozatot az $A = a$, $B = 1$ konstansokkal úgy hogy valamely i indexre $G_i = y$ és $H_i = x$. Ekkor (2) és (4) miatt, felhasználva az $\alpha - \beta = \sqrt{D}$ egyenlőséget,

$$b\alpha^i - c\beta^i = y(\alpha - \beta) = y\sqrt{D},$$

illetve

$$b\alpha^i + c\beta^i = x$$

adódik, amiből

$$b = \frac{x + \sqrt{D} \cdot y}{2 \cdot \alpha^i} \text{ ill. } c = \frac{x - \sqrt{D} \cdot y}{2 \cdot \beta^i} \tag{8}$$

következik. Tehát a G ill. H sorozat tagjai egyértelműen meg vannak határozva, ha, mint az 1. Tétel bizonyításában láttuk, negatív indexű tagokat is definiálunk. $B = \alpha\beta = 1$ miatt $B^n = 1$ minden egész n esetén, ezért a Lemma alapján $N = bc$ és minden $(x; y) = (\pm H_n; \pm G_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ pár megoldása (7)-nek.

Azt kell még igazolni, hogy az i index megválasztható úgy, hogy G_1 a a tételben megadott intervallumba essen. Tegyük fel, hogy a (7) egyenlet egy $(x_1; y_1)$ megoldására $x_1 = H_i > 0$ és $y_1 = G_i > 0$. Ekkor $(x_2; y_2) = H_{i-1}$; $G_{i-1})$ is megoldás és (8) alapján

$$H_{i-1} = b\alpha^{i-1} + c\beta^{i-1} = \frac{x_1 + \sqrt{D} \cdot y_1}{2\alpha} + \frac{x_1 - \sqrt{D} \cdot y_1}{2\beta} =$$
$$= \frac{(\alpha + \beta)x_1 - (\alpha - \beta)\sqrt{D} \cdot y_1}{2\alpha\beta} = \frac{ax_1 - Dy_1}{2},$$

mivel $\alpha + \beta = A = a$, $\alpha\beta = B = 1$ és $\alpha - \beta = \sqrt{D}$. Hasonlóan adódik a

$$G_{i-1} = \frac{1}{\alpha - \beta}(b\alpha^{i-1} - c\beta^{i-1}) = \frac{-x_1 + ay_1}{2}$$

egyenlőség. $x_2 = H_{i-1} \geqq 0$ akkor és csak akkor, ha $ax_1 \geqq Dy_1$, vagyis ha

$$a\sqrt{4N + (a^2 - 4)y_1^2} \geqq Dy_1.$$

Ez a feltétel azonban $D = A^2 - 4B = a^2 - 4$ következtében

$$(a^2 - 4)y_1^2 \geqq -a^2N \tag{9}$$

alakba írható. $N > 0$ esetén az $a > 2$ feltétel miatt (9) minden egész y_1 esetén fennáll. $N < 0$ esetben pedig (9)-ből az következik, hogy H_i, $G_i > 0$ mellett $H_{i-1} \geqq 0$, ha $G_i = y_1 \geqq a\sqrt{-N/(a^2 - 4)}$.

Hasonlóan látható be, hogy H_i, $G_i > 0$ mellett $G_{i-1} \geqq 0$ akkor és csak akkor, ha $N < 0$, vagy ha $N > 0$ és $G_i = y_1 \geqq \sqrt{N}$.

Tehát ha H_i, $G_i > 0$ és G_i nem esik a tételben megadott intervallumba, akkor az $(x_2;y_2) = H_{i-1};G_{i-1})$ megoldás is nem negatív. Bizonyítjuk, hogy ekkor $H_{i-1} < H_i$ és $G_{i-1} < G_i$. Be kell látni, hogy $H_{i-1} = (ax_1 - Dy_1)/2 < x_1 = H_i$. Ehhez elég igazolni, hogy $(a-2)x_1 = (a-2)\sqrt{4N+(a^2-4)y_1^2} < (a^2-4)y_1$. Ez a feltétel azonban az $N < (a+2)y_1$ egyenlőtlenséggel ekvivalens, ezért valóban $0 \leqq H_{i-1} < H_i$, ha $N < 0$, vagy ha $N > 0$ és $G_i = y_i > \sqrt{N/(a+2)}$, ami nyilván teljesül, ha $y_1 \geqq \sqrt{N}$. Hasonlóan látható be, hogy $G_{i-1} < G_i$ ha $N > 0$, vagy ha $N < 0$ és $G_i = y_1 \geqq \sqrt{-N/(a-2)}$, ami nyilván igaz, ha $G_i = y_1 \geqq a\sqrt{-N/(a^2-4)}$, mert $a > 2$.

Ezek szerint előállítható az $(x;y)$ megoldások $(H_i;G_i)$, $(H_{i-1};G_{i-1})$, $(H_{i-2};G_{i-2})$, ...sorozata úgy, hogy valamely k-ra $H_i > H_{i-1} > \ldots > H_{i-k} \geqq 0$ és $G_i > G_{i-1} > \ldots > G_{i-k} \geqq 0$, továbbá G_{i-k} a tételben megadott intervallumba esik, vagy pedig $H_{i-k} = 0$. De ha $H_{i-k} = 0$, akkor $N < 0$ és $G_{i-k} = \sqrt{-4N/(a^2-4)} < a\sqrt{-N/(a^2-4)}$, ezért $i = k+1$ választással a kapott G sorozat kielégíti a tétel feltételeit és meghatározza a (7) egyenlet egy megoldássorozatát. Ezen G sorozatok száma nyilván véges a G_1-re adott feltételek miatt.

3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A bizonyítás a 2. Tétel bizonyításával analóg módon végezhető el, ezért csak vázoljuk.

Legyen $(x;y)$ egy nem negatív megoldása az

$$x^2-(a^2+4)y^2 = 4N \tag{10}$$

egyenletnek és definiáljuk egy G sorozatot az $A = a$, $B = -1$ konstansokkal úgy, hogy valamely i egész esetén $G_{2i} = y$ és $H_{2i} = x$. Ekkor az $f(x)$ polinom diszkriminánsa $D = A^2-4B = a^2+4$ és most is

$$b = \frac{x+\sqrt{D}y}{2\alpha^{2i}} \text{ illetve } c = \frac{x-\sqrt{D}y}{2\beta^{2i}} \tag{11}$$

adódik. Ennek alapján

$$H_{2(i-1)} = \frac{x+\sqrt{D}y}{2\alpha^2} + \frac{x-\sqrt{D}y}{2\beta^2} = \frac{(a^2+2)x-aDy}{2}$$

illetve

$$G_{2(i-1)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{x+\sqrt{D}y}{2\alpha^2} - \frac{x-\sqrt{D}y}{2\beta^2}\right) = \frac{-ax+(a^2+2)y}{2}.$$

A Lemma alapján $(x';y') = (H_{2(i-1)};G_{2(i-1)})$ is megoldása (10)-nek, továbbá belátható, hogy $0 \leqq H_{2(i-1)} < H_{2i} = x$ és $0 \leqq G_{2(i-1)} < G_{2i} = y$, ha y nem esik a tételben megadott intervallumba. Ebből már az előzőekhez hasonlóan következik a tétel állítása.

4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A tétel állítása következik a 3. tételből és a Lemmából.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy V. E. Hoggatt [4] említett eredménye a 3. és 4. Tételből egyszerű következményként adódik. Tekintsük ugyanis az $x^2 - 5y^2 = 4$ egyenletet. Jelen esetben $A = a = 1$, $B = -1$ és $N = 1 > 0$, ezért ha van megoldása az egyenletnek, akkor a 3. Tétel alapján olyan $(x;y)$ megoldás is van, melyre $0 \leqq y < 1$. Tehát y csak 0 lehet és így csak egy megoldássorozat létezik, melyet a $(2;0) = H_0;G_0)$ megoldás generál. (11) alapján $b = c = 1$, ezért a megoldásokat generáló sorozat a $G(1, -1, 0, 1)$ sorozat, ami azonos a Fibonacci sorozattal és $H = L$. Az összes megoldás tehát $(\pm L_{2n};\pm F_{2n})$ alakú. Hasonlóan látható be a 4. Tétel alapján, hogy az $x^2 - 5y^2 = -4$ egyenlet összes megoldása $(\pm L_{2n+1}; \pm F_{2n+1})$, tehát az $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ egyenlet összes megoldását a $(\pm L_n;\pm F_n)$, $n = 1, 1, 2, \ldots$ számpárok szolgáltatják.

IRODALOM

[1] *I. Adler*, Three diphantine equations I, Fibonacci Quart., 6 (1968), 360 – 369, 371.
[2] *I. Adler*, Three diphantine equations II, Fibonacci Quart., 7 (1969), 181 – 193.
[3] *E. M. Cohn*, Complette diphantine solution of the Pythagorean triple (a, b = a + 1, c), Fibonacci Quart., 8 (1970), 402 – 405.
[4] *V. E. Hoggatt*, Some more Fibonacci diphantine equations, Fibonacci Quart., 9 (1971), 437 and 448.
[5] *P. Kiss* and *F. Várnai*, On generalized Pell numbers, Math. Sem. Not. (Kobe Univ. Japan), 6 (1978), 259 – 267.
[6] *M. J. de Leon*, Pell's equation and Pell number triples, Fibonacci Quart., 14 (1976), 456 – 460.
[7] *V. Thébault*, Sur les suites de Pell, Mathesis, 65 (1956), 390 – 395.

SOLUTION OF PELL EQUATIONS BY THE HELP OF LINEAR RECURRENCES

BY PÉTER KISS

(Summary)

Let A, B, G_0 and G_1 be fixed integers such that $AB \neq 0$ and G_0, G_1 are not both zero. The infinite sequence $G_0, G_1, G_2, \ldots$ of integers, for wich

$$G_n = A \cdot G_{n-1} - B \cdot G_{n-2}$$

for $n > 1$, is called second order linear recurrence and we shall denote it by $G = G(A, B, G_0, G_1)$. If $D = A^2 - 4B \neq 0$, then the terms of G can be written in the form

$$G_n = \frac{b\alpha^n - c\beta^n}{\alpha - \beta},$$

where α and β are the roots of the polynomial $f(x) = x^2 - Ax + B$ and

(i) $\qquad b = G_1 - G_0\beta$ and $c = G_1 - G_0\alpha$.

The sequence H, defined by

$$H_n = b\alpha^n + c\beta^n,$$

is called the associate sequence of G. The sequence H is also a linear recurrence having parameters A, B, $H_0 = 2G_1 - AG_0$ and $H_1 = AG_1 - BG_0$.

Some connections are known between the Pell equations of the form $x^2 - Dy^2 = N$ and second order linear recurrences. For example V. E. Hoggatt [4] proved that the all integer solutions of the eqqation $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ are the numbers $(x;y) = (\pm L_n; \pm F_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, where $L(1, -1, 2, 1)$ and $F(1, -1, 0, 1)$ is the well knowm Lucas and Fibonacci sequence, respectively. Some similar results were obtained by I. Adler [1, 2] E. M. Cohn [3] and V. Thébault [7] for the equation $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

The purpose of this paper is to look for solutions of some classes of Pell equations. We prove the following theorems.

THEOREM 1. Let N ($\neq 0$) and a (>0) be integers. If the equation

$$x^2 - (a^2 + 1)y^2 = N$$

has integer $(x;y)$ solutions, then all solutions are obtained by $(x;y) = (\pm(G_{2n}+aG_{2n+1});\pm G_{2n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, using finitely many linear recurrences $G(2a, -1, G_0, G_1)$. These sequences satisfy the conditions $0 \leqq G_1 < 2a\sqrt{N}$ or $0 \leqq G_1 < (2a^2+1)\sqrt{-N/(a^2+1)}$ according as $N > 0$ or $N < 0$.

THEOREM 2. Let N $(\neq 0)$ and a (>2) be integers. If the equation

$$x^2-(a^2-4)y^2 = 4N$$

has integer $(x;y)$ solutions, then all solutions are obtained by $(x;y) = (\pm H_n;\pm G_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, using finitely many linear recurrences $G(a, 1, G_0, G_1)$ and their associate sequences H. These sequences satisfy the conditions $0 \leqq G_1 < \sqrt{N}$ or $0 \leqq G_1 < a\sqrt{-N/(a^2-4)}$ according as $N > 0$ or $N < 0$.

THEOREM 3. Let N $(\neq 0)$ and a (>0) be integers. If the equation

$$x^2-(a^2+4)y^2 = 4N$$

has integer $(x;y)$ solutions, then all solutions are obtained by $(x;y) = (\pm H_{2n};\pm G_{2n})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, using finitely many linear recurrences $G(a, -1, G_0, G_1)$ and their associate sequences H. These sequences satisfy the conditions $0 \leqq G_0 < a\sqrt{N}$ or $0 \leqq G_0 < (a^2+2)\sqrt{-N/(a^2+4)}$ according as $N > 0$ or $N < 0$.

THEOREM 4. If the pairs $(x;y) = (\pm H_{2n};\pm G_{2n})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, are solutions of the equation $x^2-(a^2+4)y^2 = 4N$, then the numbers $(x;y) = (\pm H_{2n+1};\pm G_{2n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, are solutions of the equation $x^2-(a^2+4)y^2 = -4N$.

The proofs of the theorems are based on the following two results:

1. If $(A, -1, G_0, G_1)$ is a linear recurrence and $k = G_0^2+AG_0G_1^2-G_1^2$, then

$$G_n^2+A\cdot G_n\cdot G_{n+1}-G_{n+1}^2 = (-1)^n\cdot k$$

for every integer $n \geqq 0$.

2. Let $G = G(A, B, G_0, G_1)$ be a linear recurrence and let $D = A^2-4B \neq 0$. If H is the associate sequence of G, then

$$H_n^2-D\cdot G_n^2 = 4bc\cdot B^n$$

for every integer $n \geqq 0$, where b and c are defined in (i).