BÁLINT JÓZSEF

FIZIKAI JELENSÉGEK RENDSZEREZÉSE A MINIMÁL-ELV ALAPJÁN

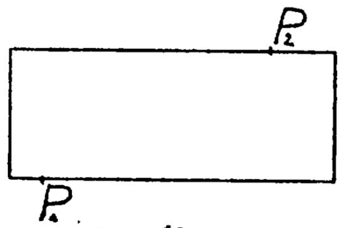
ABSTRACT: *Fermat's principle induces the intuition according to which the laws of nature show optimal behaviour. In the paper we give examples for the principles of least time, least energy and surface, the least dissipation of energy. Well-known laws are discussed here from a new point of view. We point out that the minimum-principle is as general as the law of the conservation of energy. It is frequently experienced that the interpretation of a phenomenon wants both principles.*

Sok sportágban az eredményesség meghatározása érdekében a <u>métereket</u> és <u>másodperceket</u> mérik. Vegyünk ezek közül kettőt: a 100 m-es síkfutást és az 50 m-es gyorsuszást. Választásunknál szempont volt, hogy elkerülhető legyen a kanyarodás, illetve a visszafordulás. Ennek a későbbiekben jelentősége lesz.

Ezekben a számokban a versenyzőknek kijelölt pályákon kell haladniuk. Ezeket a pályákat szándékosan nem is érdemes elhagyni, hiszen a rajttól a célig a legrövidebb utat jelölik. (Egyébként is diszkvalifikálnák érte!)

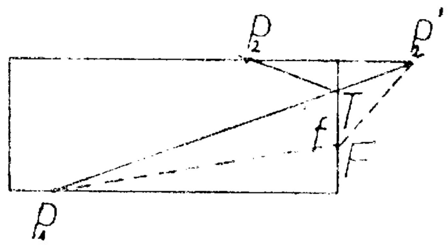
Az is természetes, hogy az győz, aki a <u>legrövidebb</u> idő alatt teszi meg az előre kimért utat.

Célunk elérése érdekében ezeket a versenyszámokat módosítjuk ugy, hogy a <u>gondolkodás</u> is szerephez jusson. (Ilyen számok persze a valóságban nincsenek.) A téglalap alakú pályákon a rajt (P_1) és a célpont (P_2) tartóegyenese nem merőleges az e pontokon átmenő határvonalakra (1. ábra). A versenyzőket egyenként inditják és az győz, aki a legrövidebb idő alatt ér célba. Aligha akadna versenyző, aki



1. ábra

nem a P_1P_2 egyenes szakaszt választaná pályaként. De ezután már valódi nehézséget támasztunk: meg kell közben érinteni az f falat is. A hagyományos geometriai alapismeretek itt már nem igazítanak el teljes mértékben. Addig még könnyű eljutni, hogy két egyenes szakaszból kell a pályát összerakni.
De a döntő kérdés az, hogy az f-en hogyan kell kiválasztani a T töréspontot ugy, hogy a megtett ut a legrövidebb legyen?
A jól gondolkodó versenyző tengelyes tükrözéssel meg tudja oldani a feladatot (2. ábra).

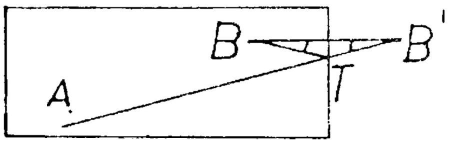


2. ábra

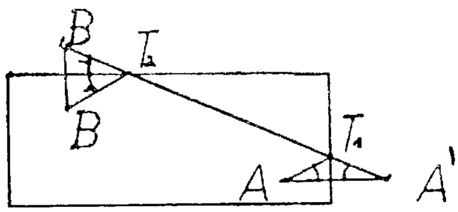
A $P_1TP_2 = P_1TP_2'$ és ezen utóbbi a minimális út P_1 és P_2 között. (A háromszög-egyenlőtlenségből adódóan $P_1F + FP_2' > P_1P_2'$, ahol F tetszőleges futópont az f-en és $F \neq T$.).
Eredményeinket ugy is megfogalmazhatjuk, hogy a minimális úthossz akkor adódik, ha az egyenes útszakaszok az f oldallal (illetve annak normálisával) azonos szöget zárnak be.

Könnyű felismerni, hogy ezt az optimumot a természet megvalósítjaa pontszerű test tökéletesen rugalmas ütközése álló falnak esetén, illetve a fényvisszaverődésnél. Ebben a tényben egyfajta "természeti intellektus" nyilvánul meg.

Némi kitérésként utalunk arra, hogy lényegében ugyanazon probléma a minimális úthossz kérdése helyett egészen másként jelenik meg. A billiárdozó játékos egyszerűen el akarja találni az egyik golyóval a másikat egyszeri vagy kétszeri fallal való ütközést közbeiktatva. A probléma lényege (s így megoldása is) u.a. mint előbb, csak itt a szögek egyenlősége a kiinduló követelmény. (3.1 és 3.2 ábrák).

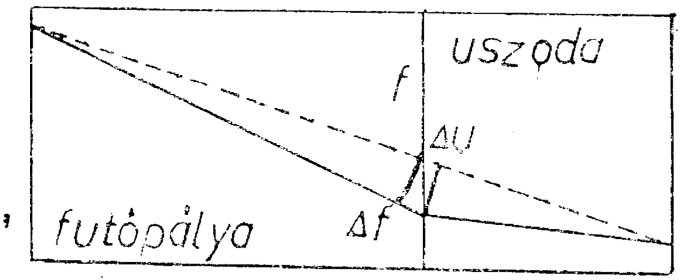


3.1 ábra



3.2 ábra

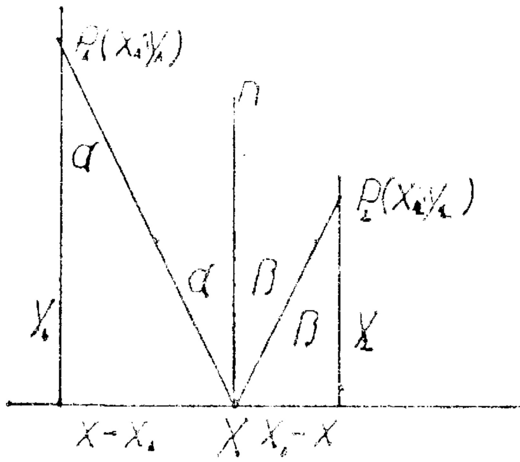
Folytatjuk az eredeti két sportág vizsgálatát, de ugy, hogy összekapcsoljuk azokat: olyan kéttusa pályát csinálunk, hogy a síkfutást kövesse az uszás. Ha "szemben van" a rajt és célhely, akkor a feladat megoldása triviális. Egészen más a helyzet egyébként (4. ábra). Az ösztönösen is megérezhető, hogy nem a legrövidebb út lesz az optimális. A T pont különböző megválasztásával nemcsak az út hossza, hanem ezen belül a futó- és



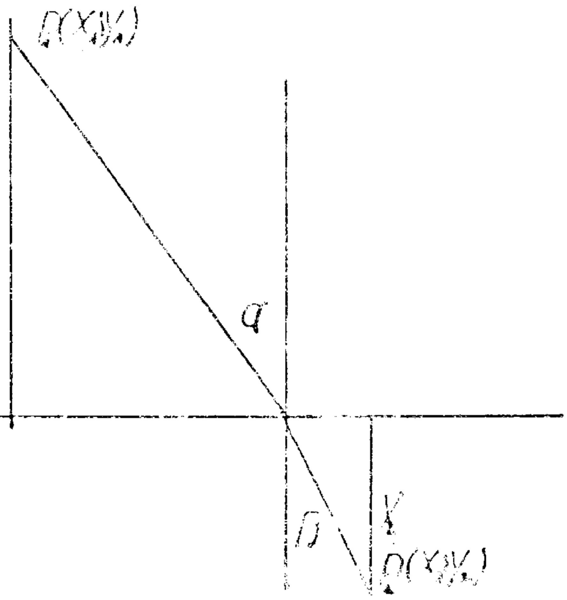
4. ábra

úszótávolság is változik. A viszonylag jó futó szivesen fut többet is (egy határig), mint amennyivel csökken az úszótávolság. Ez a követelmény azonban az f-re merőleges, P_1-en és P_2-n áthaladó egyenesekkel kimetszett szakasz belső pontjaiban mindenütt teljesül. Az ábrán felvett T pontra vonatkoztatva bejelöltük a Δf útnövekedést az egyik oldalon és a Δu csökkenést a másikon. Ezzel biztosan "jól járna" a versenyző, hiszen a két szakasz aránya $\approx$ 2:1, de ennél jóval nagyobb a megfelelő sebességek aránya. Melyik lesz az optimális T választás?

A probléma "hasonlít" a fénytöréshez. Bízhatunk is a természetben, hogy "optimálisan oldotta meg" ezt is. A következőkben belátjuk, hogy pontosan igy van. Tanulságos lesz a fénytörést és fényvisszaverődést ilyen szempontból azonos eszközökkel, paralel vizsgálni (5.1 és 5.2 ábrák).



5.1 ábra



5.2 ábra

Fényvisszaverődés:

$$t = \frac{P_1T+TP_2}{c_1} = \frac{1}{c_1}\left[\sqrt{\left(x-x_1\right)^2+y_1^2} + \sqrt{\left(x_2-x\right)^2+y_2^2}\right]$$

A t-nek szélső értéke - a jelen esetben nyilván minimuma - ott van, ahol a $\frac{dt}{dx}$ derivált értéke zérus.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1}\left[\frac{x-x_1}{\left[(x-x_1)^2+y_1^2\right]^{1/2}} - \frac{x_2-x}{\left[(x_2-x)^2+y_2^2\right]^{1/2}}\right] = 0 \qquad (+)$$

si n α sin β

$$\sin\alpha = \sin\beta$$
$$\alpha = \beta$$

Fénytörés: Felhasználjuk az előbbi eredményünket (+)

$$t = \frac{P_1T}{c_1} + \frac{TP_2}{c_2} = \frac{1}{c_1}P_1T + \frac{1}{c_2}TP_2$$

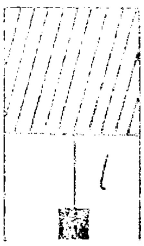
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1}\sin\alpha - \frac{1}{c_2}\sin\beta = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$$ átrendezve

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$ ez pedig éppen a fénytörés törvénye.

A fény terjedésének sugároptikai törvényeit Fermat elve foglalja magában, amely a fény P_1 pontból a P_2 pontba - megadott feltételek - pl.: visszaverődések és törések - mellet eljut, szélsőérték (minimum), ezért az elvet "a legrövidebb idő elvének" is hivjuk. Az tehát csak látszat lehetett (ha volt), hogy a fénytörésnél a fény (a természet) feleslegesen "cifrázza" a dolgot. Ellenkezőleg: az idő vonatkozásában optimálisan "oldotta meg" a feladatot. Felmerül a kérdés: jellemző-e ez általánosabban is? Joggal tételezhetjük-e fel a természetről, hogy valamilyen szempontból minden folyamatnál a szélsőérték, többnyire a minimum elérésére törekszik, illetve azt éri el? A kérdésre egzakt válasz nem adható. A világról alkotott képünk, a világnézeti modellünk vagy elfogadja, vagy vitatja, vagy elutasítja az un. miminál-elvet. Itt most nem akarunk állást foglalni egyik vagy másik mellett, inkább faggatjuk még egy kicsit a természetet.

<u>A felület energia</u>: A 6. ábrán vázolt összeállításban a mozgatható huzalt Δs-el elmozdítva $F \cdot \Delta s$ munkát végzünk. A terhelést csökkentve a folyadékhártya a sulyt felrántja.

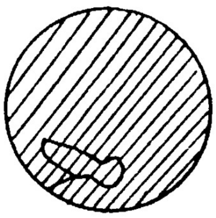


6. ábra

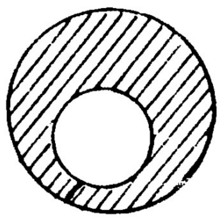
Ez azt jelenti, hogy a folyadék határfelülete mentén <u>energiával rendelkezik</u>. A <u>felületi energia</u> a folyadék határfelületének kialakításából származó energia. A felületi energia megváltozása:

$$\Delta E_f = F \cdot \Delta s = \alpha \cdot 2l \cdot \Delta s = \alpha \cdot \Delta A$$

Ezen eredmény alapján α-nak egy lehetséges, szemléletes jelentést adhatunk: a <u>felületi feszültség</u> számértékben a folyadékfelület egységnyi területtel való növeléséhez szükséges munka. A felületi energia annál kisebb, minél kisebb a felület. Mivel stabilis egyensulyi helyzetben a <u>potenciális energia minimális</u>: ezért adott körülmények között a folyadék felszine a lehető legkisebb. (Emlékeztetőül, pl.: L. a 7.1 és 7.2 ábrákat)



7.1 ábra



7.2 ábra

M.1.: A sulytalanság állapotában lévő folyadék adott térfogata mellett a lehető legkisebb felületű alakot vesz fel, a gömb alakút. Szappanoldatba merített és onnan kivett drótvázakon olyan felületek alakulnak ki, hogy a vázra illeszkedő felület a lehető legkisebb legyen. Ezek az un. minimálfelületek.

M.2.: Az előző pontbeli példa mindkét szélsőértékkel megfogalmazható. A sulytalanság állapotában lévő folyadékra az jellemző, hogy adott térfogatú részt minimális felülettel zár körül, illetve adott felülettel maximális térfogatú folyadékot zár be.

M.3.: Mivel hasonló térbeli alakzatok esetén a felület négyzetesen, a térfogat, s vele együtt a tömeg és a súly köbösen változik; a hányados a méretek csökkenésével egyre kisebb lesz. Egy parányi test egyre inkább felületi képződmény: egyre inkább dominálnak a felületi jelenségek. Ilyen pl.: un. porlasztott folyadék. Igy (is) magyarázható, hogy ezek egyre tökéletesebben megközelítik a gömb alakot.

Az előzőekben már esett szó arról, hogy stabil egyensulyi helyzetben a potenciális energia minimális. Most tágabb értelemben szólunk az energia minimumáról, illetve az erre való törekvésről.

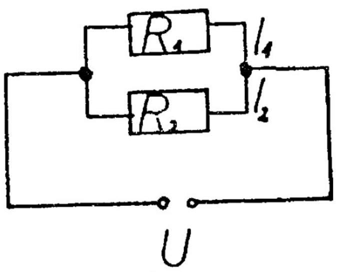
1. példa: Megkeressük a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon keletkező Joule-hő szélsőértékének feltételét. (8. ábra jelöléseivel).

$P = I^2R$

P összes $= P_ö = I_1^2R_1 + I_2^2R_2$

mivel $I_1+I_2 = I \qquad I_2 = I-I_1$

$P_ö = I_1^2R_1 + I^2R_2 - 2II_1R_2 + I_1^2R_2$



8. ábra

Keressük $P_ö$ minimumát!

$$P'_ö\,(I_1) = \frac{dP_ö}{dI_1} = 2\, I_1R_1+0-2IR_2+2I_1R_2 = 0$$

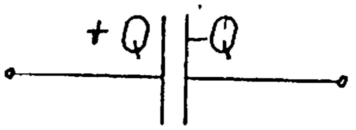
Visszahelyettesítés után:

$$P'_ö = I_1R_1-I_1R_2-I_2R_2+I_1R_2 = 0$$

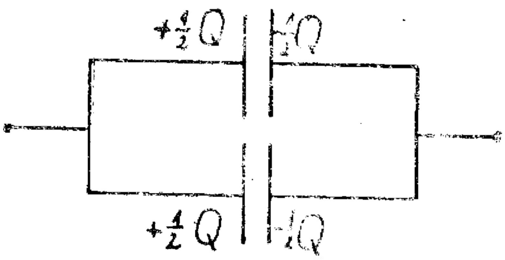
$$\underline{I_1R_1 = I_2R_2}$$

Ez viszont $U_1 = U_2$ fennállását feltételezi, ami köztudottan igaz. Arra jutottunk tehát, hogy A pontból a B pontba az I erősségű áram ugy jut el, hogy a <u>Joule-hő minimális</u>.

<u>2. példa</u>: Egyszerűség kedvéért két egyenlő, (C) kapacitású kondenzátor közül az egyiket feltöltjük, majd párhuzamosan kapcsoljuk vele a másikat. Vizsgáljuk meg az energia változását (9.1 és 9.2 ábrák).



9.1 ábra



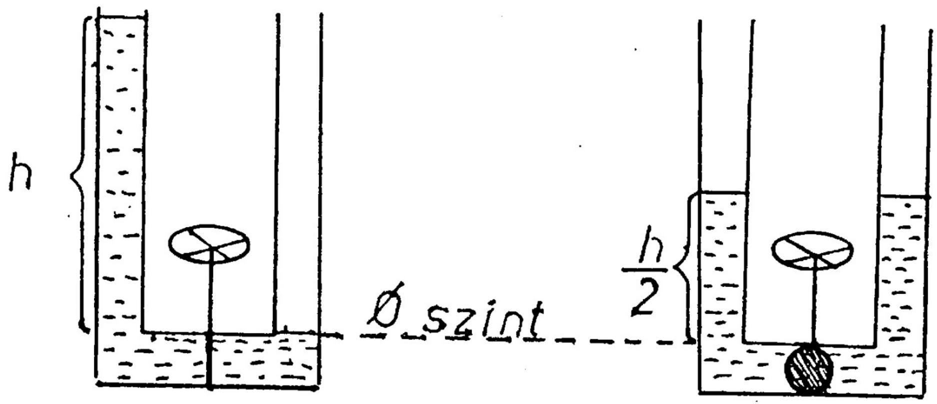
9.2 ábra

$$E_1 = \frac{1}{2C}\,Q^2 \qquad E_2 = 2\left[\frac{1}{2C}\,\left(\frac{Q}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2C}\,Q^2 = \frac{1}{4C}\,Q^2$$

Vagyis $E_1 = 2E_2$. Nem könnyű rátalálni, hogy hová lehetett az E_1 energia fele? Első pillanatban még azt is gondolhatnánk, hogy meg kellett volna maradnia E_1-nek, hiszen a rendszer energetikailag zártnak tünik.

Ha viszont "hiszünk" a minimálelvben, akkor eleve ugy tekintünk erre az eseményre, hogy az energiának csökkenie kell, mert a természet különben "nem tartotta volna indokoltnak" a töltés felének átáramlását. Kiemeljük, hogy ez a világnézeti koncepció szakmai munkánknak irányt szab: keresni kell a veszteség forrását. A világnézet tehát nemcsak valami máz az ismereteinken, hanem serkentője is az ismeretszerzésnek.

Analóg modellként nézzünk egy közlekedőedényt (10.1 és 10.2 ábrák).



10.1 ábra

10.2 ábra

$$E_1 = g \cdot \left(m \cdot \frac{h}{2}\right) \qquad E_2 = g \cdot \left(\frac{m}{2} \cdot \frac{h}{4}\right) 2 = \frac{1}{2}\, g \cdot \left(m \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} E_1$$

vagyis $E_1 = 2\ E_2$.

Itt már nyomon követhető az energia "eltünésének" folyamata. Igy ráirányul figyelmünk a kondenzátorok esetén is a rendszer ohmos ellenállására, majd a Joule-hőre, valamint a két állapot közötti folyamatra: az egyre csillapodó rezgésre. Ezen jelenség energetikai vonatkozásban az elektromos példában összetettebb: elektromágneses hullámok is keletkeznek, ezzel mintegy megkönnyítve a "felesleges energiától" való megszabadulást.

IRODALOM

[1] Dr. Budó Ágoston - Dr. Mátrai Tibor: Kisérleti Fizika III.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[2] Holics László (szerk.): Fizika
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[3] Bálint József - Berkes József: Világnézeti kérdések a fizikában
Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.