

KOVÁCH LÁSZLÓNÉ

MESTERSÉGES ÉGITESTEK MOZGÁSÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSE

ABSTRACT: *In this paper we deal with the movement of space ships, the effect of unexpected events on the orbit of objects moving in the space, and with the determination of orbits. The problems treated here are suggested to discuss in practice lessons at colleges and in study circles at secondary schools.*

Az embert mindig érdekelte a csillagos ég, az égitestek, a világmindenség. A tudósok mérések alapján, tapasztalati uton, illetve elméleti levezetések kapcsán állították fel olyan törvényeket, amelyek alapul szolgálhattak a mai űrkutatás kifejlődéséhez.

Mik is azok az összefüggések, amelyeket a gravitációs kölcsönhatással kapcsolatban már a középiskolában is megismernek a tanulók? Kepler tapasztalati törvényei, Newton általános gravitációs törvénye, a gravitációs erőter jellemzői: térerősség, potenciál, potenciális energia. Ezek ismeretében már az I. és a II. kozmikus sebesség, illetve a szökési sebesség is meghatározható.

Három olyan probléma vizsgálatával szeretnék foglalkozni, amelyek akkor lépnek fel, amikor az űrhajó meteorfelhőbe kerül, vagy meteorral ütközik, illetve pályát valamilyen okból módosítani akarja.

1. Egy 300 km magasan, körpályán repülő műhold meteorfelhőben lefékeződött úgy, hogy sebessége 7 km/s lett. Milyen szög alatt lép be (80 km magasan) a sztratoszférába?

Megoldás:

A keresett szög nem más, mint a műhold sebessége és annak érintő irányú komponense által bezárt szög a sztratoszférába lépés pillanatában. Legyen a műhold sebessége ekkor v , ennek az érintő irányú komponens pedig v_t . Ekkor a keresett szög $\alpha = \arccos v_t/v$. A két sebességérték meghatározásához az energia és az impulzusmomentum (perdület) megmaradását használjuk fel. Az energiamegmaradás törvénye

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - f \frac{mM}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - f \frac{mM}{r}$$

ahol $r_0 = R+300$ km, $r = R+80$ km, R , M a Föld sugara, illetve tömege, $v_0 = 7$ km/s a műhold kezdeti sebessége, f a gravitációs állandó. Az impulzusmomentum megmaradás törvénye $m r_0 v_0 = m r v_t$.

A fenti egyenletből az ismert paraméterekkel

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2fM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = 7,3 \text{ km/s}$$

$$v_t = \frac{v_0 r_0}{r} = 7,245 \text{ km/s.}$$

A keresett szög: $\alpha = 6,5^\circ$.

2. Egy másik űrhajó ütközik egy meteorral. Milyen következménnyel jár ez az űrhajóra, s milyen változást eredményez a meteor pályájában?

Egy 30 tonnás űrhajó a Föld középpontjától 20 000 km távolságban, e távolságra merőlegesen 6 km/s kezdősebességgel indult. Ellipszispályája kistengelyének végpontjában egy vele szembejövő 10 tonnás, 0,5 km/s sebességű meteorral centrálisan ütközik. Hogyan mozog ezután az űrhajó és a meteor? (Feltesszük, hogy az ütközés rugalmas.)

Megoldás:

Centrális térben történő mozgáskor az energia és az impulzusmomentum mozgásállandó. A Föld gravitációs terében haladó m tömegű, v sebességű űrhajó teljes mechanikai energiája

$$\frac{1}{2} mv^2 - f \frac{Mm}{r} = E \quad (1)$$

impulzusmomentuma:

$$mrv \sin \varphi = N \quad (2)$$

ahol φ az r helyvektor és a v sebességvektor által bezárt szög.

Kezdeti feltételként ismerve a teljes mechanikai energiát és az impulzusmomentumot, (1) és (2) segítségével meghatározható a pálya alakja, a hely és a sebesség minden időpontban. Zárt pálya esetén a Kepler-törvények is közvetlenül adódnak a megoldásból.

A rövidség kedvéért tekintsük ismertnek Kepler I. törvényét, azaz hogy ha $E < 0$, az űrhajó pályája ellipszis (1. ábra). Az (1) és (2) összefüggést csupán az ellipszispálya adatainak meghatározására használjuk fel.

Ha az űrhajó sebessége Földközeli $v_{\max}$, a legtávolabbi pontban $v_{\min}$, a teljes energia ebben a két pontban:

$$E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 - f \frac{mM}{a-e} = \frac{1}{2} mv_{\min}^2 - f \frac{mM}{a+e} \quad (3)$$

Mivel a két szélső esetben $v \perp r$, ezekben a pontokban az impulzusmomentum:

$$mrv \sin \varphi = N \longrightarrow m(a-e)v_{\max} = m(a+e)v_{\min} \quad (4)$$

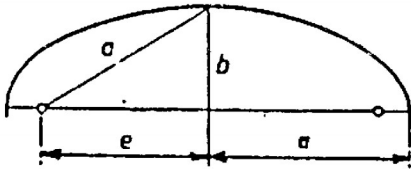
A (3) és (4) egyenleteket $v_{\max}$ -ra megoldva:

$$\frac{1}{2} mv_{\max}^2 = f \frac{mM}{2a} \cdot \frac{a+e}{a-e} \quad (5)$$

amit (3)-ba visszahelyettesítve a teljes mechanikai energia:

$$E = - f \frac{mM}{2a} \quad (6)$$

Ez az egyenlet - azon a felismerésen túl, hogy a teljes mechanikai energia a pálya adatai közül csupán a nagytengelytől függ - az (1) egyenletbe téve fontos összefüggést jelent:



$$\frac{1}{2} m v^2 - f \frac{mM}{r} = - f \frac{mM}{2a} \quad (7)$$

vagy átrendezve:

$$v^2 = fM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (8)$$

1. ábra

Az indítási pontban $r_0 = 2 \cdot 10^7$ m, $v_0 = 6 \cdot 10^3$ m/s, és így (8) segítségével a félnagyitengely:

$$a = \frac{fMr_0}{2fM - r_0 v_0^2} = 10 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (9)$$

Mivel

$$r_0 = a - e \text{ és } e = 8 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (10)$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 6 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (11)$$

(8) alapján a kistengely végpontjában (ahol $r=a$) az űrhajó sebessége:

$$v_1 = \sqrt{fM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]} = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (12)$$

Az m_1 tömegű űrhajó $v_1 = 2 \cdot 10^3$ m/s sebességgel halad, amikor az m_2 tömegű, $v_2 = -0,5 \cdot 10^3$ m/s meteorral ütközik. Centrális, rugalmas ütközést feltételezve, az ütközés utáni sebességek:

$$u_1 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = 0,75 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (13)$$

$$u_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = 3,25 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (14)$$

(Pozitív iránynak az űrhajó ütközés előtti sebességét választottuk.)

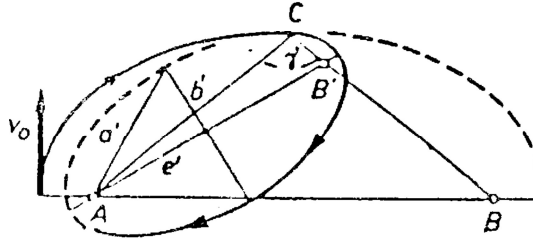
Az űrhajó sebessége - így energiája is - csökken, továbbra is ellipszispályán halad. Az új pálya félnagyitengelye a' , (8) alapján

$$u_1^2 = fM \left[\frac{2}{a} - \frac{1}{a'} \right] \quad (15)$$

ahonnan

$$a' = 5,38 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (16)$$

A sebesség irányának egyenese mindig a pálya érintője. Mivel centrális ütközésnél ezen egyenes iránya nem változik, az eredeti és az új pálya az ütközési pontban közös érintővel rendelkezik (2. ábra). Az érintőszerkesztés szabályai szerint az új ellipszispálya második fókuszja az eredeti ellipszis második fókuszához vezető vezérsugáron van.



2. ábra

Az új pálya e' excentricitásának, b' fél kistengelyének meghatározása – a 2. ábra alapján – egyszerű geometriai feladat. Az ellipszis mértani hely tulajdonságát felhasználva:

$$AC + CB' = 2a' \quad (17)$$

másrészt ismerjük az

$$AC=a, \quad AB'=2e', \quad AB=2e \quad (18)$$

távolságokat. A cosinus tételt alkalmazva az ABC, illetve az AB'C háromszögekre:

$$(2e)^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos \gamma \quad (19)$$

$$(2e')^2 = a^2 + (2a' - a)^2 - 2a(2a' - a) \cos \gamma$$

Innen

$$e' = \left[2e^2 - a^2 \right] \left(\frac{a'}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{a^2}{4} + \left(a' - \frac{a}{2} \right)^2 = 5,12 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (20)$$

Az új pálya fél kistengelye:

$$b' = \sqrt{a'^2 - e'^2} = 1,65 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (21)$$

Az új pályán az űrhajó legkisebb távolsága a Föld középpontjától $r_{\min} = a' - e' = 2,6 \cdot 10^6 \text{ m}$ lenne, ami kisebb, mint a Föld sugara. Az űrhajó a Földbe csapódik.

Vizsgáljuk a meteor mozgását! Az ütközés előtt az energiája az (1) összefüggés alapján

$$E_{\text{met.}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - f \frac{m_2 M}{a} = -3,875 \cdot 10^9 \text{ J} < 0 \quad (22)$$

volt, azaz szintén ellipszispályán keringett a Föld körül. Ütközés után

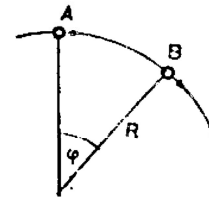
$$E'_{\text{met.}} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - f \frac{m_2 M}{a} = 1,28 \cdot 10^9 \text{ J} > 0 \quad (23)$$

energiával fog rendelkezni; a meteor hiperbolapályájára kerül.

3. Végül állapítsuk meg, hogyan érhet utól pályamódosítással egy űrhajó egy másikat.

Két űrhajó, A és B azonos, R sugarú körpályán halad. Hogyan manőverezzen a B mögött φ szöggel lemaradt A, hogy pontosan egy körülfordulás után a

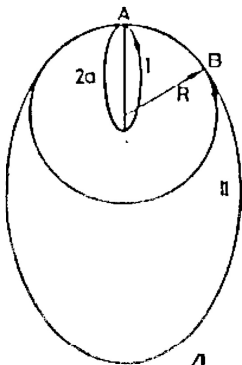
B-vel együtt haladjon? (Lásd a 3. ábrát!)



3. ábra

Megoldás:

A lemaradó űrhajónak csökkenteni kell a sebességét - ezt nevezik asztronautikai paradoxonnak. Ahhoz, hogy az A űrhajó pontosan egy körülfordulás után utolérje a B űrhajót, keringési idejét $\frac{2\pi - \varphi}{2\pi}$ -szeresére kell csökkenteni. Kepler III. törvénye szerint ezt úgy érheti el, hogy a sebességét csökkentve egy



4. ábra

$$a = R \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (24)$$

félnagyitengelyű ellipszispályára áll (4. ábra, I. pálya). Az ellipszispályán keringő űrhajó v pillanatnyi sebessége a következőképpen függ a középponttól mért r távolságtól:

$$v = \sqrt{fM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]} \quad (25)$$

ahol M a vonzó égitest tömege, f a gravitációs állandó, a a nagytengely fele. A formula megtalálható a Függvénytáblázatban és levezethető a Kepler-törvényekből. A kör és az ellipszispálya adatait behelyettesítve megkapjuk az A űrhajó manőver előtti (v_{A1}) és utáni (v_{A2}) sebességének nagyságát. (Az A űrhajó a manőver előtt a B űrhajóval egyező v_B sebességgel halad.)

$$v_{A1} = \sqrt{f \frac{M}{R}} = v_B$$

$$v_{A2} = \sqrt{f \frac{M}{R} \left[2 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} \right]} = v_B \sqrt{2 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}}} \quad (26)$$

A-nak, miután utolérte B-t, vissza kell állni a körpályára, vagyis újból v_B sebességre kell gyorsítani. Ez a manőver addig kivitelezhető, ameddig

$$2 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} \geq 0 \quad (27)$$

azaz

$$\varphi \leq 2\pi \left(1 - 2^{-\frac{3}{2}} \right) = 4,062 = 232,7^\circ$$

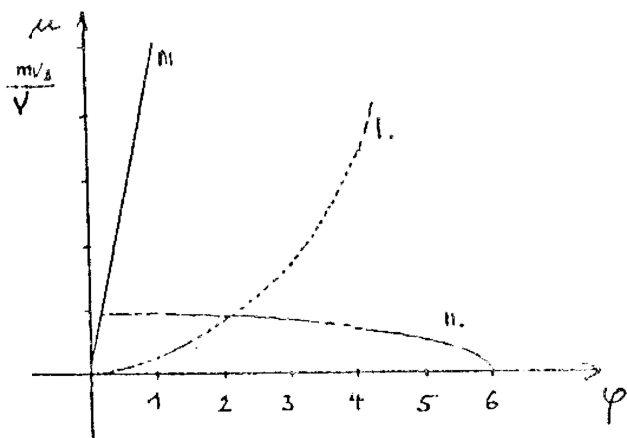
Az A űrhajó ugyanis utolérheti B-t, hogy keringési idejét $\frac{4\pi - \varphi}{2\pi}$ -szeresére növeli. Ilyenkor a találkozásig a B űrhajó több mint egy teljes kört tesz meg (1. ábra, II. pálya). A szükséges új sebességet ugyanugy számítjuk ki, mint az előző manőver esetén; az eredmény:

$$v_{A2} = v_B \sqrt{2 - \left(2 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}}} \quad (28)$$

Ez a manőver bármekkora φ esetén végrehajtható. Az űrhajós azt a megoldást választja, amely során kevesebb üzemanyagot kell felhasználni. A v sebességváltozás Δv tömegű üzemanyagot igényel (m az űrhajó tömege, V a kiáramló hajtóanyag sebessége).

A szükséges üzemanyag tehát:

$$\mu = 2(m/v) |v_{A2} - v_B| \quad (29)$$



5. ábra

(kétszer kellett sebességet megváltoztatni). Az 5. ábrán φ függvényében ábrázoltuk μ -t (I és II görbék). Látható, hogy $\varphi = 1,8435 = 105,6^\circ$ -ig az első, ennél nagyobb szögek esetén a második manőver a gazdaságosabb.

IRODALOM

- [1] Budó Ágoston – Pócza Jenő: Kisérleti fizika I.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [2] Budó Ágoston: Mechanika.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- [3] Elméleti fizikai példatár I. Szerk.: Nagy Károly
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [4] KOMAL 36. évf. 6.